

1 - Variabili aleatorie normali o gaussiane.

Sia W una variabile aleatoria caratterizzata dalla seguente densità di probabilità:

$$(1.1) \quad p_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}}$$

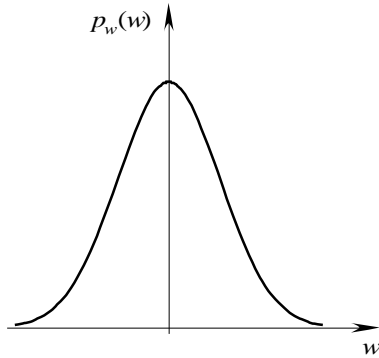


Fig. 1 Densità di probabilità di una variabile aleatoria normale

rappresentata in Fig. 1.

Una tale variabile aleatoria presenta:

a) *valor medio nullo.*

Infatti è:

$$(1.2) \quad \mu_W = E\{W\} = \int_{\mathbb{R}} w p_W(w) dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w e^{-\frac{w^2}{2}} dw = 0$$

poiché l'integrando è una funzione dispari di w .

b) *varianza unitaria.*

Infatti, essendo il valor medio nullo, è:

$$(1.3) \quad \sigma_W^2 = E\{W^2\} = \int_{\mathbb{R}} w^2 p_W(w) dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 e^{-\frac{w^2}{2}} dw$$

che, notando che è $d\left\{\exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)\right\} = -w \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw$, diviene, sviluppando l'integrale per parti:

$$(1.4) \quad \sigma_W^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w d\left[-\exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-w \cdot \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = 1$$

avendo tenuto conto che è, per la condizione di normalizzazione:

$$(1.5) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = 1$$

Una variabile aleatoria siffatta si definisce normale (o gaussiana) a valor medio nullo e varianza unitaria e si scrive:

$$(1.6) \quad W \approx \mathcal{N}(0,1)$$

Di particolare interesse è la **funzione Q**, definita dalla

$$(1.7) \quad Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-w^2/2} dw$$

Essa non può essere espressa in forma chiusa; tuttavia se ne possono dare efficaci approssimazioni. A tale scopo si ha, integrando per parti:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \int_x^{\infty} e^{-w^2/2} dw &= \int_x^{\infty} \frac{1}{w} (w e^{-w^2/2}) dw = \int_x^{\infty} \frac{1}{w} d(-e^{-w^2/2}) dw = \\ &= \frac{1}{w} (-e^{-w^2/2}) \Big|_x^{\infty} - \int_x^{\infty} \frac{1}{w^2} e^{-w^2/2} dw = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{\infty} \frac{1}{w^2} e^{-w^2/2} dw \end{aligned}$$

Poiché, per $x > 0$, è:

$$(1.9) \quad 0 < \int_x^{\infty} \frac{1}{w^2} e^{-w^2/2} dw = \int_x^{\infty} \frac{w}{w^3} e^{-w^2/2} dw < \frac{1}{x^3} \int_x^{\infty} w e^{-w^2/2} dw = \frac{e^{-x^2/2}}{x^3}$$

si ottiene:

$$(1.10) \quad \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) < Q(x) < \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x} \quad (x > 0)$$

Nella Fig.2 sono riportati i diagrammi dei limiti inferiore e superiore, forniti dalla (1.10), unitamente a quello della funzione $Q(x)$.

Sia X una variabile aleatoria definita dalla (1.11) $X = aW + b$ con a ($a \neq 0$) e b costanti reali. Per determinare la densità di probabilità di X , basta osservare che la probabilità che X appartenga all'intervallo $I_x \equiv \left[x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2} \right]$ è eguale alla probabilità che W appartenga all'intervallo $I_w \equiv \left[w - \frac{\Delta w}{2}, w + \frac{\Delta w}{2} \right]$ (v. Fig. 3). In altre parole si deve avere:

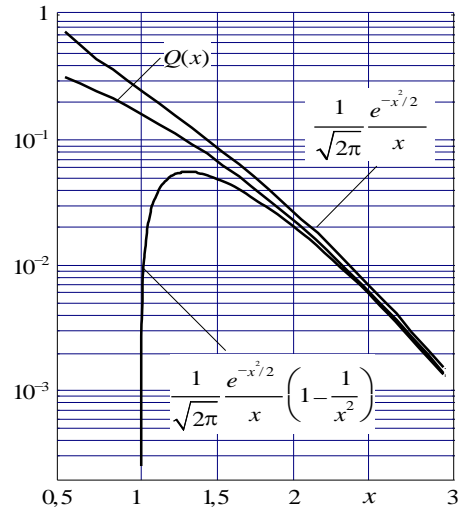


Fig. 2 - Funzione $Q(x)$ e suoi limiti.

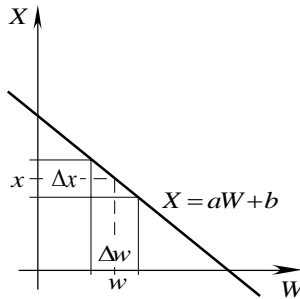


Fig. 3 - Determinazione della d.d.p. della v.a. X .

$$(1.12) \quad p_X(x)|\Delta x| = p_W(w)|\Delta w|$$

dove si è tenuto conto del fatto che le probabilità interessate sono quantità positive. La (1.12), essendo $w = \frac{x-b}{a}$, può essere riscritta come segue:

$$(1.13) \quad p_X(x) = \frac{p_W\left(\frac{x-b}{a}\right)}{\left|\frac{dx}{dw}\right|}$$

e cioè:

$$(1.14) \quad p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$$

Dalla (1.11) si ricava il valore medio:

$$(1.15) \quad \mu_X = E\{X\} = aE\{W\} + b = b$$

e la varianza;

$$(1.16) \quad \sigma_X^2 = E\{(X - \mu_X)^2\} = E\{(X - b)^2\} = E\{(aW)^2\} = a^2$$

per cui la (1.14) assume la forma:

$$(1.17) \quad p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}$$

che costituisce la più generale espressione delle densità di probabilità di una variabile aleatoria gaussiana caratterizzata da un valor medio μ_X e da una varianza σ_X^2 . Si scrive:

$$(1.18) \quad X \approx \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$$

2 - Vettori aleatori a valori reali, normali o gaussiani.

Le considerazioni sopra espone possono essere facilmente estese ai vettori aleatori.

Sia:

$$(2.1) \quad \mathbf{W} = [W_1 \quad W_2 \quad \dots \quad W_n]^T$$

un vettore aleatorio a valori reali, ad n dimensioni caratterizzato da una densità di probabilità congiunta delle sue componenti data dalla:

$$(2.2) \quad p_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i^2\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w}\right)$$

È facile verificare che le quantità W_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sono variabili aleatorie gaussiane, statisticamente indipendenti, con valor medio nullo e varianza unitaria. Infatti, integrando la (2.2) rispetto a tutte le W_j (con $j \neq i$) si deduce la densità di probabilità del primo ordine della variabile aleatoria W_i :

$$(2.3) \quad p_{W_i}(w_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w_i^2}{2}} \prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{(n-1)}}} e^{-\frac{w_j^2}{2}} dw_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w_i^2}{2}}$$

e quindi:

$$(2.4) \quad E\{w_i\} = 0; \quad E\{w_i^2\} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

In modo analogo, dalla (2.2), si ottiene la densità di probabilità congiunta delle variabili aleatorie W_r e W_s :

$$(2.5) \quad p_{W_r, W_s}(w_r, w_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w_r^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w_s^2}{2}} = p_{W_r}(w_r) \cdot p_{W_s}(w_s)$$

dalla quale si deduce che le variabili aleatorie W_r e W_s sono statisticamente indipendenti. Ciò comporta:

$$(2.6) \quad E\{w_r w_s\} = \begin{cases} 1 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases}$$

Le (2.4) e (2.6) sono riassunte nelle:

$$(2.7) \quad E\{\mathbf{W}\} = \mathbf{0} \quad ; \quad \Sigma_{\mathbf{w}} = E\{\mathbf{W}\mathbf{W}^T\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Un vettore aleatorio di questo tipo è pertanto caratterizzato da un vettore dei valori medi nullo e da una matrice di correlazione $\Sigma_{\mathbf{w}}$ unitaria. Esso si dice normale (o gaussiano) e si denota con:

$$(2.8) \quad \mathbf{W} \approx \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

Sia ora

$$(2.9) \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{b}$$

un vettore aleatorio a valori reali ottenuto da \mathbf{W} per trasformazione affine la cui matrice \mathbf{A} , di dimensioni $n \times n$, si suppone non singolare. Per dedurre la densità di probabilità congiunta $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ delle componenti del vettore \mathbf{X} in funzione della analoga densità $p_{\mathbf{w}}(\mathbf{w})$ delle componenti del vettore \mathbf{W} , basta osservare che, detto $\Delta \mathbf{x}$ un elemento infinitesimo dello spazio \mathbb{R}^n , si deve avere:

$$(2.10) \quad p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) |\Delta \mathbf{x}| = p_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}) |\Delta \mathbf{w}|$$

dove $\Delta \mathbf{w}$ denota l'elemento dello spazio \mathbb{R}^n che porta a $\Delta \mathbf{x}$ per effetto della trasformazione (2.9). È noto dalla Geometria che è

$$(2.11) \quad |\Delta \mathbf{x}| = |\det(\mathbf{J})| |\Delta \mathbf{w}|$$

essendo \mathbf{J} la matrice jacobiana della trasformazione, il cui generico elemento è definito dalla $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial w_j}$. Si ha $\mathbf{J} = \mathbf{A}$. Pertanto, ricordando la (2.2) è:

$$(2.12) \quad p_X(\mathbf{x}) = \frac{p_W[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})]}{|\det(\mathbf{A})|} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n} |\det(\mathbf{A})|} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n} |\det(\mathbf{A})|} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})\right]$$

Dalla (2.9), tenendo conto delle (2.7), si deducono le espressioni del vettore dei valori medi e della matrice di covarianza del vettore aleatorio \mathbf{X} .

$$(2.13) \quad \boldsymbol{\mu}_X = E\{\mathbf{X}\} = \mathbf{A}E\{\mathbf{W}\} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$$

$$(2.14) \quad \boldsymbol{\Sigma}_X = E\{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)^T\} = E\{\mathbf{A}\mathbf{w}\mathbf{w}^T \mathbf{A}^T\} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

e di conseguenza la (2.12) può essere riscritta nella forma:

$$(2.15) \quad p_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n} |\det(\boldsymbol{\Sigma}_X)|} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)^T (\boldsymbol{\Sigma}_X)^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)\right]$$

essendo $\det(\boldsymbol{\Sigma}_X) = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^T) = [\det(\mathbf{A})]^2$.

Generalizzando un vettore aleatorio è definito gaussiano quando la sua densità di probabilità congiunta è della forma espressa dalla (2.15) purché il determinante della matrice di covarianza è non negativo o, che è lo stesso, quando la matrice di covarianza è definita positiva. La statistica di un vettore gaussiano è completamente determinata se si conosce il vettore dei valori medi $\boldsymbol{\mu}_X$ e la matrice di covarianza $\boldsymbol{\Sigma}_X$. Poiché è:

$$(2.16) \quad \boldsymbol{\Sigma}_X = E\{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)^T\} = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T - \mathbf{x}\boldsymbol{\mu}_X^T - \boldsymbol{\mu}_X \mathbf{x}^T + \boldsymbol{\mu}_X \boldsymbol{\mu}_X^T\} = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\} - \boldsymbol{\mu}_X \boldsymbol{\mu}_X^T$$

tale statistica è anche definita dal vettore dei valori medi $\boldsymbol{\mu}_X$ e dalla matrice di correlazione $\mathbf{R}_X = E\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\}$.

Si scrive:

$$(2.17) \quad \mathbf{X} \approx \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X)$$

Un'utile grandezza associata ad un vettore aleatorio \mathbf{X} è la cosiddetta **funzione caratteristica**. Essa è definita dalla:

$$(2.18) \quad F_X(\mathbf{u}) = E\{e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{x}}\} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{x}} p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

cioè come la media della funzione $e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{x}}$, essendo \mathbf{u} un vettore ad n dimensioni.

La (2.18) può essere invertita per dare luogo alla:

$$(2.19) \quad p_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F_X(\mathbf{u}) e^{-j\mathbf{u}^T \mathbf{x}} d\mathbf{u}$$

per cui la statistica di un vettore aleatorio può essere individuata o assegnando la densità di probabilità congiunta delle sue componenti o la funzione caratteristica di ordine n .

È possibile dimostrare (v. Appendice A) che la funzione caratteristica di un vettore gaussiano si può esprimere nella forma:

$$(2.20) \quad F_X(\mathbf{u}) = \exp\left[j\mathbf{u}^T \boldsymbol{\mu}_X - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \boldsymbol{\Sigma}_X \mathbf{u}\right]$$

3. - Proprietà dei vettori aleatori gaussiani.

I vettori aleatori gaussiani godono delle seguenti proprietà:

a) Ogni trasformazione lineare di un vettore gaussiano

$$(3.1) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{h}$$

in cui \mathbf{X} e \mathbf{Y} denotano due vettori di dimensioni n e m rispettivamente con $\mathbf{X} \approx \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_X, \boldsymbol{\Sigma}_X)$ e dove \mathbf{H} è una matrice di dimensioni $(m \times n)$ e \mathbf{h} un vettore non aleatorio anch'esso di dimensioni m , conduce ad un vettore anch'esso gaussiano.

DIM. La funzione caratteristica del vettore \mathbf{Y} vale

$$(3.2) \quad F_Y(\mathbf{u}) = E\left\{e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{y}}\right\} = E\left\{e^{j\mathbf{u}^T (\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{h})}\right\} = e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{h}} E\left\{e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{H}\mathbf{x}}\right\} = e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{h}} E\left\{e^{j(\mathbf{H}^T \mathbf{u})^T \mathbf{x}}\right\} = e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{h}} F_X(\mathbf{H}^T \mathbf{u})$$

Poiché \mathbf{X} obbedisce ad una statistica di tipo gaussiano, la sua funzione caratteristica è espressa dalla (2.20) che sostituita nella (3.2) conduce alla:

$$(3.3) \quad F_Y(\mathbf{u}) = e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{h}} e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_X - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_X \mathbf{H}^T \mathbf{u}} = e^{j\mathbf{u}^T (\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_X + \mathbf{h}) - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_X \mathbf{H}^T \mathbf{u}}$$

Notando infine che dalla (3.1) si deducono: il vettore dei valori medi

$$(3.4) \quad \boldsymbol{\mu}_Y = E\{\mathbf{Y}\} = \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_X + \mathbf{h}$$

e la matrice di covarianza

$$(3.5) \quad \boldsymbol{\Sigma}_Y = E\{(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_Y)(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_Y)^T\} = E\{\mathbf{H}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)^T \mathbf{H}^T\} = \mathbf{H}E\{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)^T\} \mathbf{H}^T = \mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_X \mathbf{H}^T$$

la (3.3) può essere riscritta come segue

$$(3.6) \quad F_Y(\mathbf{u}) = \exp\left[j\mathbf{u}^T \boldsymbol{\mu}_Y - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \boldsymbol{\Sigma}_Y \mathbf{u}\right]$$

che confrontata con la (2.20) permette di concludere che il vettore \mathbf{Y} è un vettore gaussiano caratterizzato dal vettore dei valori medi e dalla matrice di covarianza date dalle (3.4) e (3.5) rispettivamente.

In particolare se si pone $\mathbf{H} = [k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_n]$, e $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, la proprietà di cui sopra assicura che la combinazione lineare di un insieme di n variabili aleatorie congiuntamente gaussiane produce una variabile aleatoria anch'essa gaussiana.

b) Un qualunque sottovettore \mathbf{X}_k di dimensioni k estratto da un vettore aleatorio \mathbf{X} gaussiano è anche gaussiano.

DIM. Basti osservare che il vettore \mathbf{X}_k può essere ottenuto a mezzo di una trasformazione lineare del tipo $\mathbf{X}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{X}$. Ad esempio se da un vettore \mathbf{X} tridimensionale si vuole estrarre un vettore che contiene solo le prime due componenti, si deve porre

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{h} = \mathbf{0}.$$

c) Se le componenti di un vettore aleatorio \mathbf{X} gaussiano sono a due a due incorrelate, esse sono anche statisticamente indipendenti.

DIM. La matrice di covarianza del vettore \mathbf{X} vale:

$$(3.7) \quad \boldsymbol{\Sigma}_X = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

per cui la funzione caratteristica è:

$$(3.8) \quad F_X(\mathbf{u}) = \exp\left[j\mathbf{u}^T \boldsymbol{\mu}_X - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \boldsymbol{\Sigma}_X \mathbf{u}\right] = \exp\left[\sum_{i=1}^n \left(ju_i \mu_{X_i} - \frac{1}{2}\sigma_i^2 u_i^2\right)\right] = \\ = \prod_{i=1}^n \exp\left[ju_i \mu_{X_i} - \frac{1}{2}\sigma_i^2 u_i^2\right] = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(u_i)$$

essendo $F_{X_i}(u_i) = \exp\left[ju_i \mu_{X_i} - \frac{1}{2}\sigma_i^2 u_i^2\right]$. La funzione caratteristica si fattorizza nel prodotto delle funzioni caratteristiche delle componenti del vettore e ciò comporta che la densità di

probabilità congiunta delle componenti del vettore X è fattorizzata nel prodotto delle densità di probabilità delle singole componenti.

4 – Vettori aleatori a valori complessi, normali o gaussiani.

Un vettore aleatorio di n dimensioni a valori complessi $X = X_R + jX_I$ si dice normale o gaussiano quando il vettore $\begin{bmatrix} X_R \\ X_I \end{bmatrix}$ composto dalla parte reale e dal coefficiente della parte immaginaria del vettore X costituisce un vettore gaussiano e pertanto definito da una densità di probabilità di ordine $2n$ come quella data dalla (2.15). Ciò comporta che, per caratterizzare un vettore gaussiano a valori complessi è necessario conoscere il vettore dei valori medi

$$(4.1) \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} E\{X_R\} \\ E\{X_I\} \end{bmatrix}$$

e la matrice di correlazione:

$$(4.2) \quad \mathbf{R} = E \left\{ \begin{bmatrix} X_R \\ X_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_R \\ X_I \end{bmatrix}^T \right\} = E \left\{ \begin{bmatrix} X_R \\ X_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_R^T & X_I^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} E\{X_R X_R^T\} & E\{X_R X_I^T\} \\ E\{X_I X_R^T\} & E\{X_I X_I^T\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_R & \mathbf{R}_{RI} \\ \mathbf{R}_{IR} & \mathbf{R}_I \end{bmatrix}$$

dove si sono denotate con \mathbf{R}_R , \mathbf{R}_I le matrici di correlazione associate ai vettori X_R e X_I rispettivamente e con \mathbf{R}_{RI} e \mathbf{R}_{IR} le matrici di correlazione mutua fra X_R e X_I . Si noti che è $\mathbf{R}_{RI} = \mathbf{R}_{IR}^T$.

È da osservare che mentre per caratterizzare un vettore aleatorio gaussiano a valori reali occorre conoscere il vettore dei valori medi e la matrice di correlazione, per la determinazione della statistica di un vettore aleatorio gaussiano a valori complessi non basta conoscere, oltre il vettore dei valori medi, la sua matrice di correlazione; infatti quest'ultima è:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}_X &= E\{XX^H\} = E\{(X_R + jX_I)(X_R + jX_I)^H\} = E\{(X_R + jX_I)(X_R^T - jX_I^T)\} = \\ &= E\{X_R X_R^T + X_I X_I^T\} + jE\{X_I X_R^T - X_R X_I^T\} = (\mathbf{R}_R + \mathbf{R}_I) + j(\mathbf{R}_{IR} - \mathbf{R}_{RI}) \end{aligned}$$

Per definire completamente la statistica del vettore X occorre aggiungere un'ulteriore condizione. Di norma è introdotta la cosiddetta matrice di **pseudo correlazione** definita dalla:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_X &= E\{XX^T\} = E\{(X_R + jX_I)(X_R + jX_I)^T\} = E\{(X_R + jX_I)(X_R^T + jX_I^T)\} = \\ &= E\{X_R X_R^T - X_I X_I^T\} + jE\{X_I X_R^T + X_R X_I^T\} = (\mathbf{R}_R - \mathbf{R}_I) + j(\mathbf{R}_{IR} + \mathbf{R}_{RI}) \end{aligned}$$

Dalle (4.3) e (4.4) si deduce:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}_R &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{R}_X + \tilde{\mathbf{R}}_X] \quad , \quad \mathbf{R}_I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{R}_X - \tilde{\mathbf{R}}_X] \\ \mathbf{R}_{RI} &= \frac{1}{2} \operatorname{Im}[-\mathbf{R}_X + \tilde{\mathbf{R}}_X] \quad , \quad \mathbf{R}_{IR} = \frac{1}{2} \operatorname{Im}[\mathbf{R}_X + \tilde{\mathbf{R}}_X] \end{aligned}$$

Una particolare classe di vettori aleatori gaussiani a valori complessi è costituita dai cosiddetti **vettori gaussiani propri**. Essi sono definiti dalla condizione:

$$(4.6) \quad \tilde{\mathbf{R}}_X = 0$$

che comporta:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{R}_R &= \mathbf{R}_I \\ \mathbf{R}_{IR} &= -\mathbf{R}_{RI} \end{aligned}$$

È da notare che, poiché è $\mathbf{R}_{RI} = \mathbf{R}_{IR}^T$, dalla seconda delle (4.7) si ha:

$$(4.8) \quad \mathbf{R}_{RI} = -\mathbf{R}_{RI}^T$$

e cioè le parti reali e i coefficienti delle parti immaginarie \mathbf{X}_R e \mathbf{X}_I di un vettore gaussiano proprio hanno identiche matrici di correlazione e la matrice di correlazione incrociata è antisimmetrica e, in particolare, la diagonale principale è costituita da valori tutti nulli.

Per determinare la statistica di un vettore gaussiano proprio occorre quindi conoscere il vettore dei valori medi $\boldsymbol{\mu}_X$ e la sola matrice di correlazione \mathbf{R}_X .

Un'ulteriore particolare classe di vettori gaussiani è costituita dai vettori che godono della cosiddetta proprietà di simmetria circolare. Un vettore gaussiano \mathbf{X} è **circolarmente simmetrico** (o a simmetria circolare) se per ogni $\vartheta \in [0, 2\pi)$ la statistica di \mathbf{X} è la stessa di quella di $e^{j\vartheta} \mathbf{X}$. Devono perciò coincidere il vettore dei valori medi e le funzioni di correlazione e di pseudo correlazione. Basta, in particolare, che risulti, per ogni ϑ :

$$(4.9) \quad E\{e^{j\vartheta} \mathbf{X}\} = e^{j\vartheta} E\{\mathbf{X}\} = E\{\mathbf{X}\}$$

e

$$(4.10) \quad E\left\{\left(e^{j\vartheta} \mathbf{X}\right)\left(e^{j\vartheta} \mathbf{X}^T\right)\right\} = e^{j2\vartheta} \tilde{\mathbf{R}}_X = \tilde{\mathbf{R}}_X$$

Le (4.9) e (4.10) comportano:

$$(4.11) \quad E\{\mathbf{X}\} = \mathbf{0}$$

e

$$(4.12) \quad \tilde{\mathbf{R}}_X = \mathbf{0}$$

È opportuno osservare che un vettore gaussiano proprio a valor medio nullo è circolarmente simmetrico e ciò si esprime scrivendo:

$$(4.13) \quad \mathbf{X} \approx \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_X)$$

5 – Segnali gaussiani.

Un segnale aleatorio $s(t, \zeta)$, a valore reale, si dice **normale** o **gaussiano** se l'insieme dei suoi campioni presi in corrispondenza ad una generica n -upla d'istanti t_1, t_2, \dots, t_n , costituisce un vettore aleatorio gaussiano. In altri termini se, detto $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ risulta:

$$(5.1) \quad p_{s_1, s_2, \dots, s_n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\boldsymbol{\Sigma}_s|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_s)^T \boldsymbol{\Sigma}_s^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_s)\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

dove $\boldsymbol{\mu}_s = [m_s(t_1), m_s(t_2), \dots, m_s(t_n)]^T$ è un vettore la cui i -esima componente è pari al valore medio $m_s(t) = E\{s(t, \zeta)\}$ del segnale nell'istante t_i , e il generico elemento della matrice $\boldsymbol{\Sigma}_s$

$$(5.2) \quad \sigma_s(t_i, t_j) = E\left\{\left[s(t_i, \zeta) - E\{s(t_i, \zeta)\}\right]\left[s(t_j, \zeta) - E\{s(t_j, \zeta)\}\right]\right\}$$

è la covarianza delle variabili aleatorie individuate dal segnale agli istanti t_i e t_j .

Ci si rende facilmente conto del fatto che un segnale gaussiano stazionario in senso lato lo è anche in senso stretto. Infatti, se il segnale è stazionario in senso lato, almeno fino al secondo ordine, gli elementi della sua matrice di covarianza dipendono soltanto dalle differenze tra gli istanti di tempo t_i e t_j e il valore medio del segnale è indipendente dal tempo, quindi tale è anche il vettore $\boldsymbol{\mu}_s$ che compare nella sua densità di probabilità.

La statistica del segnale è allora invariante rispetto a qualsiasi traslazione dell'origine dei tempi.

Poiché dalla (5.2) discende:

$$(5.3) \quad \sigma_s(t_i, t_j) = R_s(t_i, t_j) - E\{s(t_i, \zeta)\}E\{s(t_j, \zeta)\} = R_s(t_i, t_j) - m_s(t_i)m_s(t_j)$$

la funzione di covarianza può essere espressa in termini della funzione di autocorrelazione e del valore medio; la statistica di un segnale gaussiano, quindi, risulta perfettamente nota se si conosce il valore medio e la funzione di autocorrelazione.

Un segnale $s(t, \zeta)$ a valore complesso

$$(5.4) \quad s(t, \zeta) = s_R(t, \zeta) + js_I(t, \zeta)$$

si dirà gaussiano se un qualsiasi insieme di campioni presi sulla parte reale e sulla parte immaginaria costituisce un vettore di variabili aleatorie congiuntamente gaussiane. Questo significa che per caratterizzare la statistica del segnale $s(t, \zeta)$ occorre definire i valori medi delle parti reali ed immaginarie

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \mu_R(t) &= E\{s_R(t, \zeta)\} \\ \mu_I(t) &= E\{s_I(t, \zeta)\} \end{aligned}$$

e le funzioni di correlazione:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} R_R(t_i, t_j) &= E\{s_R(t_i, \zeta)s_R(t_j, \zeta)\} \\ R_I(t_i, t_j) &= E\{s_I(t_i, \zeta)s_I(t_j, \zeta)\} \\ R_{RI}(t_i, t_j) &= E\{s_R(t_i, \zeta)s_I(t_j, \zeta)\} \\ R_{IR}(t_i, t_j) &= E\{s_I(t_i, \zeta)s_R(t_j, \zeta)\} = R_{RI}(t_j, t_i) \end{aligned}$$

Se i valori medi, definiti dalle (5.5) non dipendono dal tempo e le funzioni di autocorrelazione, date dalle (5.6) dipendono dalla differenza fra gli istanti t_i e t_j , il segnale $s(t, \zeta)$ è stazionario in senso stretto poiché la sua statistica è invariante rispetto a qualsiasi traslazione dell'origine dei tempi.

È interessante osservare che la conoscenza della funzione di correlazione data dalla:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} R(t_i, t_j) &= E\{s^*(t_i, \zeta)s(t_j, \zeta)\} = \\ &= E\left\{\left[s_R(t_i, \zeta) - js_I(t_i, \zeta)\right]\left[s_R(t_j, \zeta) + js_I(t_j, \zeta)\right]\right\} = \\ &= \left[R_R(t_i, t_j) + R_I(t_i, t_j)\right] + j\left[R_{RI}(t_i, t_j) - R_{IR}(t_i, t_j)\right] \end{aligned}$$

non consente di definire completamente le funzioni $R_R(t_i, t_j)$, $R_I(t_i, t_j)$ e $R_{RI}(t_i, t_j)$ che intervengono nella definizione della statistica del segnale. Per definire quindi la statistica di un segnale gaussiano a valori complessi occorre, analogamente a quanto proposto a proposito del vettore aleatorio gaussiano a valori complessi, introdurre la cosiddetta funzione di **pseudo correlazione** definita dalla:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \tilde{R}(t_i, t_j) &= E\{s(t_i, \zeta)s(t_j, \zeta)\} = \\ &= E\left\{\left[s_R(t_i, \zeta) + js_I(t_i, \zeta)\right]\left[s_R(t_j, \zeta) + js_I(t_j, \zeta)\right]\right\} = \\ &= \left[R_R(t_i, t_j) - R_I(t_i, t_j)\right] + j\left[R_{RI}(t_i, t_j) + R_{IR}(t_i, t_j)\right] \end{aligned}$$

Dalle (5.7) e (5.8) si deduce facilmente:

$$\begin{aligned}
 R_R(t_i, t_j) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [R(t_i, t_j) + \tilde{R}(t_i, t_j)] \\
 R_I(t_i, t_j) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [R(t_i, t_j) - \tilde{R}(t_i, t_j)] \\
 R_{RI}(t_i, t_j) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} [R(t_i, t_j) + \tilde{R}(t_i, t_j)] \\
 R_{IR}(t_i, t_j) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} [-R(t_i, t_j) + \tilde{R}(t_i, t_j)]
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

Una classe particolarmente interessante di segnali gaussiani a valori complessi è costituita dai cosiddetti **segnali gaussiani propri**. Essi sono caratterizzati dalla condizione che, per ogni valore di t_i e t_j , si ha:

$$\tilde{R}(t_i, t_j) = 0 \tag{5.10}$$

per cui risulta:

$$\begin{aligned}
 R_R(t_i, t_j) &= R_I(t_i, t_j) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [R(t_i, t_j)] \\
 R_{RI}(t_i, t_j) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} [R(t_i, t_j)] = -R_{IR}(t_i, t_j)
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

La statistica di un segnale gaussiano proprio pertanto è completamente determinata se si conosce la sua funzione di autocorrelazione.

È da osservare che dalla seconda delle (5.11) si deduce che è $R_{RI}(t, t) = R_{IR}(t, t) = 0$. Le parti reali ed immaginarie di un segnale gaussiano proprio sono incorrelate in $t_i = t_j = t$.

Come nel caso di vettore aleatorio a valori complessi gaussiano a simmetria circolare, un segnale gaussiano si dice **circularmente simmetrico** (o a **simmetria circolare**) se per ogni valore di $\vartheta \in [0, 2\pi)$ la statistica del segnale $s(t, \zeta)$ è uguale a quella di $e^{j\vartheta} s(t, \zeta)$.

Ciò comporta che, per ogni ϑ , si deve avere:

$$E \{ e^{j\vartheta} s(t, \zeta) \} = e^{j\vartheta} E \{ s(t, \zeta) \} = E \{ s(t, \zeta) \} \tag{5.12}$$

e questo comporta $E \{ s(t, \zeta) \} = 0$. Inoltre, sempre per ogni ϑ , basta che si abbia:

$$E \{ [e^{j\vartheta} s(t_i, \zeta)] [e^{j\vartheta} s(t_j, \zeta)] \} = e^{2j\vartheta} E \{ s(t_i, \zeta) s(t_j, \zeta) \} = E \{ s(t_i, \zeta) s(t_j, \zeta) \} \tag{5.13}$$

e questo comporta

$$\tilde{R}(t_i, t_j) = 0 \tag{5.14}$$

Un segnale gaussiano proprio a valor medio nullo è a simmetria circolare.

6 - Trasformazioni lineari di segnali gaussiani.

Sia $y(t, \zeta)$ un segnale aleatorio dipendente dal segnale $x(t, \zeta)$ mediante una trasformazione lineare del tipo:

$$y(t, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(\tau, \zeta) d\tau \tag{6.1}$$

in cui $h(t, \tau)$ denota una funzione peso dipendente dalle variabili t e τ .

Dividendo il dominio d'integrazione nella (6.1) in intervalli disgiunti di ampiezza Δ , l'integrale può essere calcolato mediante la:

$$y(t, \zeta) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \Delta \sum_{i=-N}^N h(t, i\Delta) x(i\Delta, \zeta) \tag{6.2}$$

Valutando la precedente in $t = j\Delta$, con $j \in \mathbb{Z}$, si ha:

$$y(j\Delta, \zeta) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \Delta \sum_{i=-N}^N h(j\Delta, i\Delta) x(i\Delta, \zeta) \quad j \in \mathbb{Z} \tag{6.3}$$

L'argomento del limite nella (6.3) può essere interpretato per fissati N e Δ come la componente j -esima $y_j = \sum_{i=-N}^N h(j\Delta, i\Delta)x(i\Delta, \zeta)$ di un vettore aleatorio Y ottenuto dal prodotto tra una matrice H il cui generico elemento è $\Delta \cdot h(j\Delta, i\Delta)$ e un $2N+1$ vettore aleatorio gaussiano la cui i -esima componente vale $x(i\Delta, \zeta)$. Y è pertanto, indipendentemente dai valori di N e Δ , un vettore aleatorio gaussiano e tale resta passando al limite per $N \rightarrow \infty$ e $\Delta \rightarrow 0$. Quindi $y(t, \zeta)$ è un segnale gaussiano, la sua densità di probabilità, a qualunque ordine, dipende soltanto dal valor medio e dalla funzione di autocorrelazione.

Dalla (6.1), prendendo il valore medio statistico di ambo i membri, si ha, con ovvio significato dei simboli:

$$(6.4) \quad m_y(t) = E\{y(t, \zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)E\{x(\tau, \zeta)\}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)m_x(\tau)d\tau$$

La funzione di autocovarianza vale:

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \sigma_y(t_1, t_2) &= E\left\{\left(y(t_1, \zeta) - m_y(t_1)\right)\left(y(t_2, \zeta) - m_y(t_2)\right)\right\} = \\ &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(t_1, \tau_1)\left(x(\tau_1, \zeta) - m_x(\tau_1)\right)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2, \tau_2)\left(x(\tau_2, \zeta) - m_x(\tau_2)\right)d\tau_2\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\left\{\left[x(\tau_1, \zeta) - m_x(\tau_1)\right]\left[x(\tau_2, \zeta) - m_x(\tau_2)\right]\right\} h(t_1, \tau_1)h(t_2, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\tau_1, \tau_2)h(t_1, \tau_1)h(t_2, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

avendo denotato con $\sigma_x(t_1, t_2)$ la funzione di autocovarianza di $x(t, \zeta)$.

Sia $a(\zeta)$ una variabile aleatoria dedotta da un segnale $x(t, \zeta)$ gaussiano mediante una trasformazione lineare della forma:

$$(6.6) \quad a(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(\tau, \zeta)d\tau$$

essendo $h(\tau)$ una funzione peso. Procedendo come prima e cioè dividendo il dominio d'integrazione nella (6.6) in intervalli disgiunti di ampiezza Δ , l'integrale può essere calcolato mediante la:

$$(6.7) \quad a(\zeta) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \Delta \sum_{i=-N}^N h(i\Delta)x(i\Delta, \zeta)$$

Per fissati N e Δ fissati è immediato riconoscere che la quantità $a(\zeta)$, in quanto combinazione lineare di quantità congiuntamente gaussiane, è una variabile aleatoria gaussiana la cui densità di probabilità del primo ordine dipende dal valor medio e dalla funzione di autocorrelazione.

Dalla (6.6), prendendo il valore medio statistico di ambo i membri, si ha, con ovvio significato dei simboli:

$$(6.8) \quad \mu_a = E\{a(\zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E\{x(\tau, \zeta)\}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)m_x(\tau)d\tau$$

e:

$$(6.9) \quad \begin{aligned} \sigma_a^2 &= E\left\{\left(a(\zeta) - \mu_a\right)^2\right\} = \\ &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)\left(x(\tau_1, \zeta) - m_x(\tau_1)\right)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)\left(x(\tau_2, \zeta) - m_x(\tau_2)\right)d\tau_2\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\left\{\left[x(\tau_1, \zeta) - m_x(\tau_1)\right]\left[x(\tau_2, \zeta) - m_x(\tau_2)\right]\right\} h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_x(\tau_1, \tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

APPENDICE

FUNZIONE CARATTERISTICA DI UN VETTORE ALEATORIO GAUSSIANO

1 – Premessa.

La funzione caratteristica associata ad un vettore aleatorio gaussiano di n dimensioni X si ottiene dal seguente integrale:

$$(1) \quad F_X(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{j\mathbf{u}^T \mathbf{x}} p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

in cui

$$(2) \quad p_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\det(\Sigma)|}} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right]$$

L'integrale (1) diventa:

$$(3) \quad F_X(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\det(\Sigma)|}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[j\mathbf{u}^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right] d\mathbf{x}$$

Introducendo la trasformazione $\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} \rightarrow \mathbf{x}$ si ottiene:

$$(4) \quad F_X(\mathbf{u}) = \frac{e^{j\mathbf{u}^T \boldsymbol{\mu}_X}}{\sqrt{(2\pi)^n |\det(\Sigma)|}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[j\mathbf{u}^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x}\right] d\mathbf{x}$$

Per risolvere l'integrale (4) è conveniente ricorrere all'ortogonalizzazione della matrice di covarianza.

2 – Ortogonalizzazione della matrice di covarianza.

Sia $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ l'insieme degli autovalori (supposti distinti) della matrice di covarianza Σ .

Se $\mathbf{u}^{(i)}$ denota il corrispondente autovettore (supposto normalizzato) si ha:

$$(5) \quad \Sigma \mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{u}^{(i)}$$

Si definisca con T la matrice composta da tutti gli autovettori e cioè

$$(6) \quad T = [\mathbf{u}^{(1)} \quad \mathbf{u}^{(2)} \quad \dots \quad \mathbf{u}^{(n)}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ \vdots \\ u_n^{(2)} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ \vdots \\ u_n^{(n)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Sia ha:

$$(7) \quad \begin{aligned} \Sigma T &= [\Sigma \mathbf{u}^{(1)} \quad \Sigma \mathbf{u}^{(2)} \quad \dots \quad \Sigma \mathbf{u}^{(n)}] = [\lambda_1 \mathbf{u}^{(1)} \quad \lambda_2 \mathbf{u}^{(2)} \quad \dots \quad \lambda_n \mathbf{u}^{(n)}] = \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 u_1^{(1)} \\ \lambda_1 u_2^{(1)} \\ \vdots \\ \lambda_1 u_n^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_2 u_1^{(2)} \\ \lambda_2 u_2^{(2)} \\ \vdots \\ \lambda_2 u_n^{(2)} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \lambda_n u_1^{(n)} \\ \lambda_n u_2^{(n)} \\ \vdots \\ \lambda_n u_n^{(n)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_n^{(1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ \vdots \\ u_n^{(2)} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ \vdots \\ u_n^{(n)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

e cioè:

$$(8) \quad \Sigma T = T \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

dove $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ rappresenta la matrice diagonale

$$(9) \quad \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dalla (8) si deduce, premoltiplicando per T^{-1} :

$$(10) \quad T^{-1} \Sigma T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Prendendo la trasposta della precedente si ha:

$$(11) \quad T^T \Sigma^T (T^{-1})^T = [\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)]^T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = T^{-1} \Sigma T$$

dove si è tenuto conto della (10). Osservando che la matrice di correlazione è simmetrica

($\Sigma = \Sigma^T$), dalla precedente si deduce premoltiplicando per T e postmoltiplicando per T^T :

$$(12) \quad T T^T \Sigma (T^{-1})^T T^T = T T^{-1} \Sigma T T^T$$

da cui:

$$(13) \quad (T T^T) \Sigma = \Sigma (T T^T)$$

e cioè la matrice di covarianza commuta con la matrice $T T^T$. Questo comporta che la matrice $T T^T$ deve essere proporzionale alla matrice unitaria di ordine n . Ma poiché gli autovettori si sono supposti normalizzati e cioè tali che si abbia:

$$(14) \quad \mathbf{u}^{(i)} \mathbf{u}^{(j)T} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

la matrice $T T^T$ coincide con la matrice unitaria e quindi

$$(15) \quad T^{-1} = T^T$$

La matrice T è pertanto una matrice ortogonale ed è caratterizzata dal fatto che il suo determinante vale ± 1 . La (10) in questo caso diventa:

$$(16) \quad T^T \Sigma T = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Dalla precedente, tenendo conto della (15), si ricava:

$$(17) \quad (T^T \Sigma T)^{-1} = T^T \Sigma^{-1} T = [\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)]^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

3 - Trasformazione di variabili

Introducendo la seguente trasformazione di variabili:

$$(18) \quad \mathbf{x} = T \mathbf{y}$$

l'argomento dell'esponenziale che interviene nell'espressione della funzione integranda che compare nella (4), tenendo conto della (17), diventa:

$$(19) \quad j \mathbf{u}^T \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \Sigma^{-1} \mathbf{x} = j \mathbf{u}^T T \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T T^T \Sigma^{-1} T \mathbf{y} = j \mathbf{v}^T \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) \mathbf{y}$$

dove si è posto:

$$(20) \quad \mathbf{v}^T = \mathbf{u}^T T$$

4 - Funzione caratteristica

Con la posizione (18) la (4) si scrive:

$$(21) \quad F_X(\mathbf{u}) = \frac{e^{j \mathbf{u}^T \boldsymbol{\mu}_X}}{\sqrt{(2\pi)^n |\det(\Sigma)|}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[j \mathbf{v}^T \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) \mathbf{y} \right] d\mathbf{y}$$

poiché lo jacobiano della trasformazione (18) è unitario.

Si ottiene infine:

$$\begin{aligned}
 F_X(\mathbf{u}) &= \frac{e^{j\mathbf{u}^T \boldsymbol{\mu}_X}}{\sqrt{(2\pi)^n |\det(\boldsymbol{\Sigma})|}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\sum_{i=1}^n \left(jv_i y_i - \frac{1}{2} \frac{y_i^2}{\lambda_i} \right) \right] dy_1 dy_2 \cdots dy_n = \\
 (22) \quad &= \frac{e^{j\mathbf{u}^T \boldsymbol{\mu}_X}}{\sqrt{(2\pi)^n |\det(\boldsymbol{\Sigma})|}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[jv_i y_i - \frac{1}{2} \frac{y_i^2}{\lambda_i} \right] dy_i
 \end{aligned}$$

È facile riconoscere che si ha:

$$(23) \quad I_i = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[jv_i y_i - \frac{1}{2} \frac{y_i^2}{\lambda_i} \right] dy_i = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{v_i^2}{\lambda_i} \right]$$

Per cui risulta:

$$\begin{aligned}
 F_X(\mathbf{u}) &= \frac{e^{j\mathbf{u}^T \boldsymbol{\mu}_X}}{\sqrt{(2\pi)^n |\det(\boldsymbol{\Sigma})|}} \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda_i} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{v_i^2}{\lambda_i} \right] = \\
 (24) \quad &= e^{j\mathbf{u}^T \boldsymbol{\mu}_X} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{v_i^2}{\lambda_i} \right] = \\
 &= e^{j\mathbf{u}^T \boldsymbol{\mu}_X} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{v}^T [\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)]^{-1} \mathbf{v} \right] = \\
 &= e^{j\mathbf{u}^T \boldsymbol{\mu}_X} \exp \left[\mathbf{u}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{u} \right]
 \end{aligned}$$

Si ha pertanto:

$$(25) \quad F_X(\mathbf{u}) = \exp \left[j\mathbf{u}^T \boldsymbol{\mu}_X + \mathbf{u}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{u} \right]$$