SEGNALI E SISTEMI PASSA-BANDA

1 – Componenti a frequenze positive e negative.

Si consideri un segnale $s(t)$ reale la cui trasformata di Fourier è rappresenta in Fig. 1.

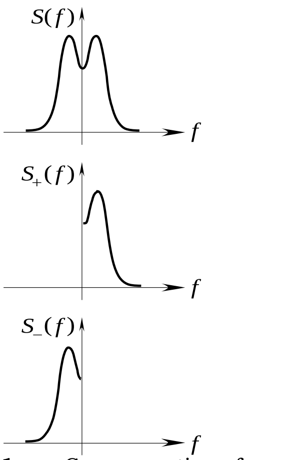

Fig. 1. – Componenti a frequenza positiva e negativa di un segnale.

Nell'analisi dei segnali è talvolta utile introdurre le grandezze

(1.1)
$$S_+(f) = u(f)S(f)$$
$$S_-(f) = u(-f)S(f)$$

che individuano il contenuto di frequenze positive e negative dello spettro di $s(t)$. È ovvio che né $S_+(f)$ né $S_-(f)$ soddisfano le condizioni di simmetria hermitiana; perciò le corrispondenti antitrasformate:

(1.2)
$$s_+(t) = \boldsymbol{F}^{-1}\{S_+(f)\}$$
$$s_-(t) = \boldsymbol{F}^{-1}\{S_-(f)\}$$

denominate ***componenti a frequenze positive*** e ***negative***, costituiscono una coppia di segnali complessi.

Dalla (1.1) si possono dedurre i segnali $s_+(t)$ e $s_-(t)$ applicando il teorema della convoluzione nel dominio del tempo. A tal proposito basta osservare che applicando alle coppia di trasformate $u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{j\pi f}\right)$ e $u(-t) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\delta(f) - \frac{1}{2}\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{j\pi f}\right)$ la proprietà di simmetria si ottiene $\boldsymbol{F}^{-1}\{u(f)\} = \frac{1}{2}\delta(t) + j\frac{1}{2}\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{\pi t}\right)$, e $\boldsymbol{F}^{-1}\{u(-f)\} = \frac{1}{2}\delta(t) - j\frac{1}{2}\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{\pi t}\right)$ per cui è:

(1.3)
$$s_+(t) = \tfrac{1}{2}\left[s(t) + j\hat{s}(t)\right]$$
$$s_-(t) = \tfrac{1}{2}\left[s(t) - j\hat{s}(t)\right]$$

dove si è posto:

(1.4)
$$\hat{s}(t) \equiv \boldsymbol{H}\{s(t)\} = \frac{1}{\pi}\mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

che costituisce la ***trasformata di Hilbert*** di $s(t)$.

Dalle (1.3) si ottiene:

(1.5)
$$s(t) = s_+(t) + s_-(t)$$
$$\hat{s}(t) = -j\left[s_+(t) - s_-(t)\right]$$

2 – Segnali determinati di tipo passa-banda.

Un segnale $s(t)$ è detto di tipo passa-banda quando l'ampiezza della sua trasformata di Fourier è trascurabile all'esterno delle regioni definite dalle $|f| \in [f_1, f_2]$ con $0 < f_1 < f_2$. (v. Fig. 2). La quantità

(2.1)
$$B = f_2 - f_1$$

costituisce l'ampiezza di banda (unilatera) di $s(t)$.

Se $s(t)$ è un segnale reale si può scrivere:

$$s(t)=\int_{-\infty}^{0} S(f)e^{j2\pi ft}df+\int_{0}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft}df=\int_{0}^{\infty} S(-f)e^{-j2\pi ft}df+\int_{0}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft}df=$$

(2.2)
$$=\int_{0}^{\infty}\left[S^{*}(f)e^{-j2\pi ft}+S(f)e^{j2\pi ft}\right]df=2\,\mathrm{Re}\left[\int_{0}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft}df\right]=$$

$$=2\,\mathrm{Re}\left[\int_{0}^{\infty} S_{+}(f)e^{j2\pi ft}df\right]$$

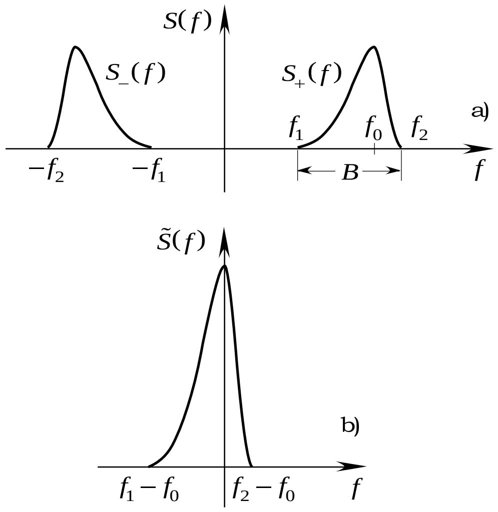

Fig. 2 – Segnale di tipo passa-banda.

dal momento che per $0\le f<\infty$, $S(f)$ coincide con $S_{+}(f)$ (v. Fig. 2,a).

Sia f_0 una frequenza appartenente all'intervallo $[f_1, f_2]$. Introducendo nella precedente la trasformazione $f\rightarrow f+f_0$ si ottiene:

(2.3)
$$s(t)=\mathrm{Re}\left[e^{j2\pi f_0 t}\int_{-f_0}^{\infty} 2S_{+}(f+f_0)e^{j2\pi ft}df\right]$$

che se il segnale $s(t)$ è di tipo passa-banda diventa:

(2.4)
$$s(t)=\mathrm{Re}\left[e^{j2\pi f_0 t}\int_{f_1-f_0}^{f_2-f_0} 2S_{+}(f+f_0)e^{j2\pi ft}df\right]$$

Se inoltre la frequenza di riferimento è scelta pari alla media aritmetica delle frequenze f_1 e f_2: $f_0=\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ la (2.4) assume la forma:

(2.5)
$$s(t)=\mathrm{Re}\left[e^{j2\pi f_0 t}\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} 2S_{+}(f+f_0)e^{j2\pi ft}df\right]$$

Ponendo:

(2.6)
$$\tilde{s}(t)=\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} 2S_{+}(f+f_0)e^{j2\pi ft}df=\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \tilde{S}(f)e^{j2\pi ft}df$$

con (v. Fig. 2,b)

(2.7)
$$\tilde{S}(f)=2S_{+}(f+f_0)$$

la (2.5) diventa:

(2.8)
$$s(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right]$$

Si deduce dalla (2.7) che $\tilde{s}(t)$ può essere espresso in funzione della componente a frequenze positive $s_{+}(t)$ dalla:

(2.9)
$$\tilde{s}(t)=2e^{-j2\pi f_0 t}s_{+}(t)$$

È opportuno osservare che poiché $\tilde{S}(f)$ non sempre soddisfa la condizione di simmetria hermitiana, il segnale $\tilde{s}(t)$ è complesso a meno che non risulti $S_{+}(f_0+f)=S_{+}^{*}(f_0-f)$ e cioè che la componente a frequenze positive del segnale $s(t)$ presenti simmetria hermitiana rispetto alla frequenza di riferimento f_0. Ponendo allora:

(2.10)
$$\tilde{s}(t)=s_f(t)+js_q(t)$$

la (2.8) diventa:

(2.11)
$$s(t)=s_f(t)\cos 2\pi f_0 t-s_q(t)\sin 2\pi f_0 t$$

I segnali $s_f(t)$ e $s_q(t)$ prendono il nome di ***componenti in fase*** ed ***in quadratura*** e $\tilde{s}(t)$ costituisce il cosiddetto ***inviluppo complesso*** del segnale $s(t)$.

La Fig.3 schematizza il modo con cui da una segnale si può ottenere l'inviluppo complesso e viceversa purché l'ampiezza di banda del filtro passa-basso sia pari a quella del segnale $s(t)$.

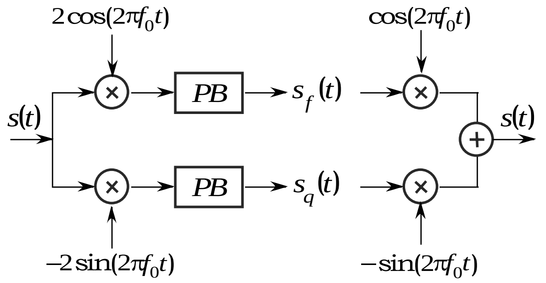

Fig.3 – Generazione dell'inviluppo complesso e ricostruzione del segnale.

Si precisi che le componenti in fase e in quadratura come pure l'inviluppo complesso di $s(t)$ sono dei segnali di tipo passa-basso dal momento che lo loro trasformate di Fourier sono confinate nell'intervallo $\left[-\frac{B}{2},\frac{B}{2}\right]$.

Scrivendo l'inviluppo complesso nella forma:

(2.12)
$$\tilde{s}(t) = \rho(t)e^{j\vartheta(t)}$$

dove:

(2.13)
$$\rho(t) = \sqrt{s_f^2(t) + s_q^2(t)}$$
$$\vartheta(t) = \arctan\frac{s_q(t)}{s_f(t)}$$

si deduce dalla (2.8):

(2.14)
$$s(t) = \rho(t)\cos[2\pi f_0 t + \vartheta(t)]$$

Le grandezze $\rho(t)$ e $\vartheta(t)$ rappresentano l'***inviluppo istantaneo*** e la ***deviazione istantanea di fase*** di $s(t)$. Anche l'inviluppo istantaneo $\rho(t)$ e la deviazione istantanea di fase $\vartheta(t)$, sono quindi dei segnali di tipo passa-basso.

3 – Segnali aleatori di tipo passa-banda.

Un segnale aleatorio $s(t,\zeta)$ a valori reali, supposto stazionario almeno in senso lato, è di tipo passa banda se la sua densità spettrale è trascurabile all'esterno delle regioni definite dalle $|f| \in [f_1, f_2]$ con $0 < f_1 < f_2$. Come nel caso dei segnali determinati $B = f_2 - f_1$ costituisce la banda (unilatera) di $s(t,\zeta)$.

La generica manifestazione di un segnale di tipo passa-banda può essere allora rappresentata, con probabilità molto prossima ad 1, come segue:

(3.1)
$$s(t,\zeta) = s_f(t,\zeta)\cos 2\pi f_0 t - s_q(t,\zeta)\sin 2\pi f_0 t = \mathrm{Re}\left[\tilde{s}(t,\zeta)e^{j2\pi f_0 t}\right]$$

dove le componenti in fase ed in quadratura, per la (2.10) e (2.9) possono essere espresse in termini della componente a frequenze positive di $s(t,\zeta)$:

(3.2)
$$s_f(t,\zeta) = \mathrm{Re}\left[\tilde{s}(t,\zeta)\right] = 2\,\mathrm{Re}\left[s_+(t,\zeta)e^{-j2\pi f_0 t}\right]$$
$$s_q(t,\zeta) = \mathrm{Im}\left[\tilde{s}(t,\zeta)\right] = 2\,\mathrm{Im}\left[s_+(t,\zeta)e^{-j2\pi f_0 t}\right]$$

Tenendo conto delle (1.3) si ha:

(3.3)
$$s_f(t,\zeta) = s(t,\zeta)\cos 2\pi f_0 t + \hat{s}(t,\zeta)\sin 2\pi f_0 t$$
$$s_q(t,\zeta) = -s(t,\zeta)\sin 2\pi f_0 t + \hat{s}(t,\zeta)\cos 2\pi f_0 t$$

Allo scopo di caratterizzare le componenti in fase ed in quadratura o l'inviluppo complesso del segnale $s(t,\zeta)$ basta osservare che se il valor medio del segnale $s(t,\zeta)$ è nullo, è anche nullo il valore medio della sua trasformata di Hilbert. Da ciò si deduce che i segnali $s_f(t,\zeta)$ e $s_q(t,\zeta)$ hanno valor medio nullo.

Per caratterizzare statisticamente al secondo ordine, in senso lato, le componenti in fase ed in quadratura è necessario dedurre la matrice di correlazione della coppia di segnali $s(t,\zeta)$ e $\hat{s}(t,\zeta)$. A tal proposito ricordando che la trasformata di Hilbert $\hat{s}(t)$ di un segnale può essere concepita come il segnale in uscita dal filtro $H(f)=-j\,\mathrm{sgn}(f)$ quando al suo ingresso è applicato $s(t)$ (v. Fig. 4), si deduce:

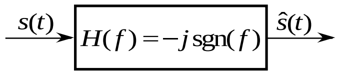

Fig. 4 – Generazione del segnale $\hat{s}(t)$

$$\begin{aligned} W_{\hat{s}}(f) &= \left|-j\,\mathrm{sgn}(f)\right|^2 W_s(f) = W_s(f) \\ W_{\hat{s}s}(f) &= -j\,\mathrm{sgn}(f) W_s(f) \\ W_{s\hat{s}}(f) &= \left[-j\,\mathrm{sgn}(f)\right]^* W_s(f) = j\,\mathrm{sgn}(f) W_s(f) = -W_{\hat{s}s}(f) \end{aligned} \tag{3.4}$$

da cui:

$$\begin{aligned} R_{\hat{s}}(\tau) &= R_s(\tau) \\ R_{s\hat{s}}(\tau) &= -R_{\hat{s}s}(\tau) = -\hat{R}_s(\tau) \end{aligned} \tag{3.5}$$

dove $\hat{R}_s(\tau)$ è la trasformata di Hilbert di $R_s(\tau)$.

Ciò premesso, la funzione di correlazione associata alla componente a frequenza positiva di $s(t,\zeta)$ è:

$$\begin{aligned} R_{s_+}(\tau) &= E\left\{s_+^*(t,\zeta)s_+(t+\tau,\zeta)\right\} = \\ &= \tfrac{1}{4}E\left\{\left[s(t,\zeta)-j\hat{s}(t,\zeta)\right]\left[s(t+\tau,\zeta)+j\hat{s}(t+\tau,\zeta)\right]\right\} = \\ &= \tfrac{1}{4}\left(R_s(\tau)+R_{\hat{s}}(\tau)\right)+j\left(R_{s\hat{s}}(\tau)-R_{\hat{s}s}(\tau)\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

e la funzione di pseudo correlazione:

$$\begin{aligned} \overline{R}_{s_+}(\tau) &= E\left\{s_+(t,\zeta)s_+(t+\tau,\zeta)\right\} = \\ &= \tfrac{1}{4}E\left\{\left[s(t,\zeta)+j\hat{s}(t,\zeta)\right]\left[s(t+\tau,\zeta)+j\hat{s}(t+\tau,\zeta)\right]\right\} = \\ &= \tfrac{1}{4}\left(R_s(\tau)-R_{\hat{s}}(\tau)\right)+j\left(R_{s\hat{s}}(\tau)+R_{\hat{s}s}(\tau)\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Le precedenti, tenendo conto delle (3.5), diventano:

$$\begin{aligned} R_{s_+}(\tau) &= \tfrac{1}{2}\left[R_s(\tau)+j\hat{R}_s(\tau)\right] \\ \overline{R}_{s_+}(\tau) &= 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Tenendo conto delle (3.2), le funzioni di correlazione delle componenti in fase ed in quadratura valgono:

$$\begin{aligned} R_f(\tau) &= E\left\{s_f(t,\zeta)s_f(t+\tau,\zeta)\right\} = 4E\left\{\mathrm{Re}\left[s_+(t,\zeta)e^{-j2\pi f_0 t}\right]\mathrm{Re}\left[s_+(t+\tau,\zeta)e^{-j2\pi f_0(t+\tau)}\right]\right\} \\ R_q(\tau) &= E\left\{s_q(t,\zeta)s_q(t+\tau,\zeta)\right\} = 4E\left\{\mathrm{Im}\left[s_+(t,\zeta)e^{-j2\pi f_0 t}\right]\mathrm{Im}\left[s_+(t+\tau,\zeta)e^{-j2\pi f_0(t+\tau)}\right]\right\} \\ R_{fq}(\tau) &= E\left\{s_f(t,\zeta)s_q(t+\tau,\zeta)\right\} = 4E\left\{\mathrm{Re}\left[s_+(t,\zeta)e^{-j2\pi f_0 t}\right]\mathrm{Im}\left[s_+(t+\tau,\zeta)e^{-j2\pi f_0(t+\tau)}\right]\right\} \\ R_{qf}(\tau) &= E\left\{s_q(t,\zeta)s_f(t+\tau,\zeta)\right\} = 4E\left\{\mathrm{Im}\left[s_+(t,\zeta)e^{-j2\pi f_0 t}\right]\mathrm{Re}\left[s_+(t+\tau,\zeta)e^{-j2\pi f_0(t+\tau)}\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.9}$$

per calcolare le quali è utile far riferimento alle seguenti identità tra numeri complessi:

(3.10)
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}[a]\mathrm{Re}[b] &= \frac{a+a^*}{2}\frac{b+b^*}{2} = \frac{a^*b+ab^*}{4}+\frac{ab+a^*b^*}{4} = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{Re}\left[a^*b\right]+\mathrm{Re}[ab]\right)\\
\mathrm{Im}[a]\mathrm{Im}[b] &= \frac{a-a^*}{2j}\frac{b-b^*}{2j} = \frac{a^*b+ab^*}{4}-\frac{ab+a^*b^*}{4} = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{Re}\left[a^*b\right]-\mathrm{Re}[ab]\right)\\
\mathrm{Re}[a]\mathrm{Im}[b] &= \frac{a+a^*}{2}\frac{b-b^*}{2j} = \frac{a^*b-ab^*}{4j}+\frac{ab-a^*b^*}{4j} = \tfrac{1}{2}\left(\mathrm{Im}\left[a^*b\right]+\mathrm{Im}[ab]\right)\\
\mathrm{Im}[a]\mathrm{Re}[b] &= \frac{a-a^*}{2j}\frac{b+b^*}{2} = -\frac{a^*b-ab^*}{4j}+\frac{ab-a^*b^*}{4j} = \tfrac{1}{2}\left(-\mathrm{Im}\left[a^*b\right]+\mathrm{Im}[ab]\right)
\end{aligned}
$$

Tenendo conto delle (3.8) e (3.10) le (3.9) divengono:

(3.11)
$$
\begin{aligned}
R_f(\tau) &= 2\,\mathrm{Re}\left[R_{s_+}(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}\right]\\
R_q(\tau) &= 2\,\mathrm{Re}\left[R_{s_+}(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}\right]\\
R_{fq}(\tau) &= 2\,\mathrm{Im}\left[R_{s_+}(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}\right]\\
R_{qf}(\tau) &= -2\,\mathrm{Im}\left[R_{s_+}(\tau)e^{-j2\pi f_0\tau}\right]
\end{aligned}
$$

od anche:

(3.12)
$$
\begin{aligned}
R_f(\tau) &= R_q(\tau) = R_s(\tau)\cos 2\pi f_0\tau + \hat{R}_s(\tau)\sin 2\pi f_0\tau\\
R_{fq}(\tau) &= -R_{qf}(\tau) = -R_s(\tau)\sin 2\pi f_0\tau + \hat{R}_s(\tau)\cos 2\pi f_0\tau
\end{aligned}
$$

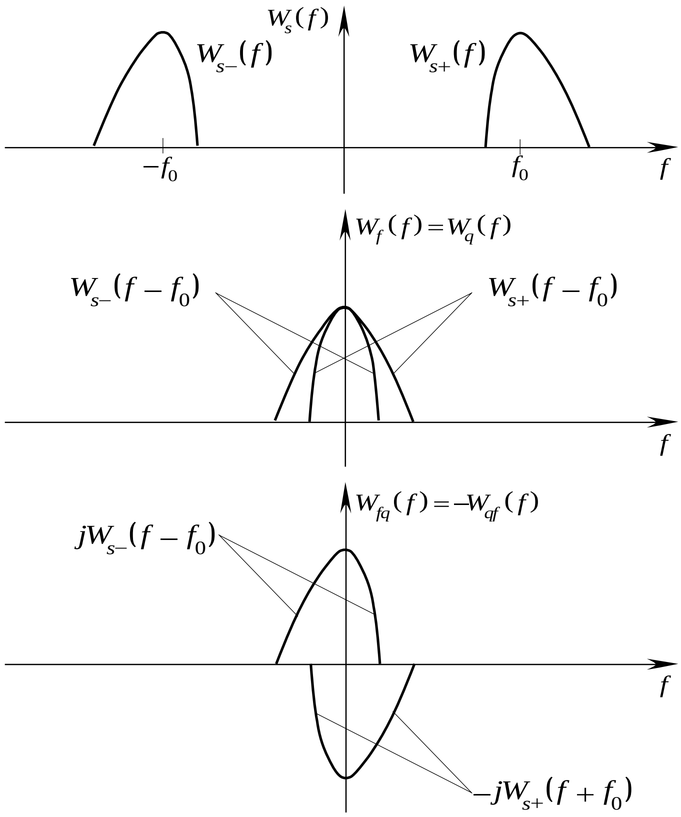

Fig. 5 – Densità spettrali delle componenti in fase ed in quadratura di un segnale aleatorio.

È opportuno osservare che dalla prima delle precedenti si deduce:

(3.13)
$$R_f(0) = R_q(0) = R_s(0)$$

e cioè che il valore quadratico della componente in fase è uguale a quello della componente in quadratura di un segnale e tale valore quadratico medio coincide con quello di $s(t,\zeta)$.

Prendendo le trasformate di Fourier di entrambi i lati della prima delle (3.12) si ha:

(3.14) $$W_f(f)=W_q(f)=\tfrac{1}{2}\left[W_s(f-f_0)+W_s(f+f_0)\right]+\frac{1}{2j}\left[\hat{W}_s(f-f_0)-\hat{W}_s(f+f_0)\right]$$

dove è $\hat{W}_s(f)=-j\,\mathrm{sgn}(f)W_s(f)$. È dunque:

(3.15) $$W_f(f)=W_q(f)=\frac{1}{2}W_s(f-f_0)\left[1-\mathrm{sgn}(f-f_0)\right]+\frac{1}{2}W_s(f+f_0)\left[1+\mathrm{sgn}(f+f_0)\right]$$

che, essendo $u(-f)=\tfrac{1}{2}\left[1-\mathrm{sgn}(f)\right]$ e $u(f)=\tfrac{1}{2}\left[1+\mathrm{sgn}(f)\right]$, diventano:

(3.16) $$W_f(f)=W_q(f)=W_s(f-f_0)u(-f+f_0)+W_s(f+f_0)u(f+f_0)$$

od anche:

(3.17) $$W_f(f)=W_q(f)=W_{s+}(f+f_0)+W_{s-}(f-f_0)$$

dove $W_{s+}(f)$ e $W_{s-}(f)$ sono le componenti a frequenze negative e positive della densità spettrale del segnale $s(t,\zeta)$ (v. Fig. 5).

In modo analogo, trasformando secondo Fourier la seconda delle (3.12), si ha:

(3.18) $$\begin{aligned}W_{fq}(f)=-W_{qf}(f)&=-\frac{1}{2j}\left[W_s(f-f_0)-W_s(f+f_0)\right]+\frac{1}{2}\left[\hat{W}_s(f-f_0)+\hat{W}_s(f+f_0)\right]=\\&=\frac{j}{2}\left[W_s(f-f_0)-W_s(f+f_0)\right]-\frac{j}{2}\left[\mathrm{sgn}(f-f_0)W_s(f-f_0)-\mathrm{sgn}(f+f_0)W_s(f+f_0)\right]=\\&=\frac{j}{2}W_s(f-f_0)\left[1-\mathrm{sgn}(f-f_0)\right]-\frac{j}{2}W_s(f+f_0)\left[1+j\,\mathrm{sgn}(f+f_0)\right]=\\&=j\left[W_s(f-f_0)u(-f+f_0)-W_s(f+f_0)u(f+f_0)\right]\end{aligned}$$

e cioè (v. Fig. I.5)

(3.19) $$W_{fq}(f)=-W_{qf}(f)=j\left[W_{s-}(f-f_0)-W_{s+}(f+f_0)\right]$$

È da tener presente che se la componente a frequenza positiva (o negativa) della densità spettrale gode della simmetria hermitiana rispetto alla frequenza di riferimento f_0 e cioè se vale la condizione $W_{s_+}(f-f_0)=W_{s_+}(f_0-f)=W_{s_-}(f_0+f)$ la densità spettrale incrociata, e, di conseguenza, la corrispondente correlazione incrociata è nulla. Le componenti in fase ed in quadratura sono in tal caso incorrelate.

4- Rumore gaussiano bianco di tipo passa-banda.

Le considerazioni svolte nel precedente paragrafo possono essere applicate al caso di rumore gaussiano, stazionario e bianco di tipo passa-banda. È ovvio che poiché, come si evince dalla (1.4), la trasformata di Hilbert è una trasformazione lineare del segnale $n(t,\zeta)$, anche $\hat{n}(t,\zeta)$ è gaussiano. Per lo stesso motivo le componenti in fase ed in quadratura sono segnali gaussiani. Di conseguenza, se il rumore si suppone a valor medio nullo, le loro caratteristiche statistiche sono individuate solo dalle funzioni di correlazioni o dalle loro densità spettrali date dalle (3.17) e (3.19).

Facendo riferimento alla Fig. 6 e alle (3.17) e (3.19) risulta pertanto:

(4.1) $$W_f(f)=W_q(f)=N_0\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

e

(4.2) $$W_{fq}(f)=W_{qf}(f)=0$$

essendo $\frac{N_0}{2}$ rappresenta la densità spettrale del rumore.

Antitrasformando le (4.1) e (4.2) si ottiene infine:

(4.3)
$$R_f(\tau) = R_q(\tau) = N_0 B \operatorname{sinc}(B\tau)$$
$$R_{fq}(\tau) = R_{qf}(\tau) = 0$$

Le componenti in fase ed in quadratura sono pertanto due segnali gaussiani incorrelati (e quindi statisticamente indipendenti) e sono caratterizzati dalla stessa statistica.

Tenendo conto delle (4.3) le funzioni di autocorrelazione dell'inviluppo complesso valgono:

(4.4)
$$R_{\tilde{s}}(\tau) = E\left\{\tilde{s}^*(t,\zeta)\tilde{s}(t+\tau,\zeta)\right\} = \left[R_f(\tau) + R_q(\tau)\right] = 2N_0 B \operatorname{sinc}(B\tau)$$
$$\bar{R}_{\tilde{s}}(\tau) = E\left\{\tilde{s}(t,\zeta)\tilde{s}(t,\zeta)\right\} = 0$$

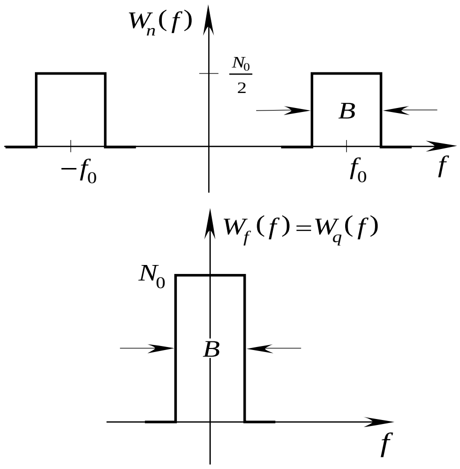

Fig. 6 – Caratteristiche spettrale di un rumore bianco di tipo passa-banda.

da cui trasformando secondo Fourier:

(4.5)
$$W_{\tilde{s}}(f) = 2N_0 \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$
$$\bar{W}_{\tilde{s}}(\tau) = 0$$

È opportuno precisare che con riferimento alla Fig. I.3, il sistema di rivelazione elimina tutte le componenti a frequenza esterna alla banda dei filtri passa-basso. Di conseguenza la larghezza di banda del rumore può assumersi sufficientemente elevata rispetto alla frequenza centrale f_0; in altri termini, si può porre $W_f(f) = W_q(f) = N_0$. Le precedenti quindi possono essere approssimate dalle:

(4.6)
$$R_f(\tau) = R_q(\tau) = N_0 \delta(\tau)$$
$$R_{fq}(\tau) = R_{qf}(\tau) = 0$$

Le funzioni di correlazione sono:

(4.7)
$$R_{\tilde{s}}(\tau) = 2N_0 \delta(\tau)$$
$$\bar{R}_{\tilde{s}}(\tau) = 0$$

e le corrispondenti densità spettrali:

(4.8)
$$W_{\tilde{s}}(f) = 2N_0$$
$$\bar{W}_{\tilde{s}}(f) = 0$$

Il segnale $s(t)$ è pertanto un segnale gaussiano a valori complessi e proprio.

5 – Sistemi lineari e tempo invarianti di tipo passa-banda.

Un sistema lineare e tempo invariante è di tipo passa-banda se la sua risposta in frequenza è concentrata attorno alle frequenze $\pm f_0$. Questo comporta che la sua risposta impulsiva $h(t)$ può essere espressa nella forma [1]:

(5.1)
$$h(t) = 2\operatorname{Re}\left[\tilde{h}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right] = \tilde{h}(t)e^{j2\pi f_0 t} + \tilde{h}^*(t)e^{-j2\pi f_0 t}$$

e la risposta in frequenza vale:

(5.2)
$$H(f) = \tilde{H}(f - f_0) + \tilde{H}^*(-f - f_0)$$

---

[1] Da notare il fattore 2 che si è introdotto nella (5.1)

dove $\tilde{H}(f)$ rappresenta la trasformata di Fourier di $\tilde{h}(t)$.

Se un segnale passa-banda $s_e(t)$ è applicato all'entrata del filtro passa-banda $h(t)$, il segnale in uscita $s_u(t) = \mathrm{Re}\left[\tilde{s}_u(t)e^{j2\pi f_0 t}\right]$ è dato dalla:

(5.3)
$$s_u(t) = s_e(t) * h(t)$$

che, nel dominio della frequenza, diviene:

(5.4)
$$S_u(f) = S_e(f)H(f)$$

Si ha dunque:

(5.5)
$$\begin{aligned} S_u(f) &= \tfrac{1}{2}\left[\tilde{S}_u(f-f_0) + \tilde{S}_u^*(-f-f_0)\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tilde{S}_e(f-f_0) + \tilde{S}_e^*(-f-f_0)\right]\left[\tilde{H}(f-f_0) + \tilde{H}^*(-f-f_0)\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tilde{S}_e(f-f_0)\tilde{H}(f-f_0)\right] + \tfrac{1}{2}\left[\tilde{S}_e^*(-f-f_0)\tilde{H}^*(-f-f_0)\right] + \\ &+ \tfrac{1}{2}\left[\tilde{S}_e(f-f_0)\tilde{H}^*(-f-f_0)\right] + \tfrac{1}{2}\left[\tilde{S}_e^*(-f-f_0)\tilde{H}(f-f_0)\right] \end{aligned}$$

Se il segnale in entrata e la risposta impulsiva del filtro sono del tipo a banda stretta, e cioè se l'ampiezza di banda è minore delal frequenza di riferimento f_0, è lecito porre:

(5.6)
$$\begin{aligned} &\tilde{S}_e(f-f_0)\tilde{H}(-f-f_0) = \tilde{S}_e(f-f_0)\tilde{H}[-(f+f_0)] \cong 0 \\ &\tilde{S}_e(-f-f_0)\tilde{H}(f-f_0) = \tilde{S}_e[-(f+f_0)]\tilde{H}(f-f_0) \cong 0 \end{aligned}$$

per cui la (5.5) si riduce alla:

(5.7)
$$\begin{aligned} S_u(f) &= \tfrac{1}{2}\left[\tilde{S}_e(f-f_0)\tilde{H}(f-f_0)\right] + \tfrac{1}{2}\left[\tilde{S}_e^*(-f-f_0)\tilde{H}^*(-f-f_0)\right] = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tilde{S}_u(f-f_0) + \tilde{S}_u^*(-f-f_0)\right] \end{aligned}$$

avendo posto

(5.8)
$$\tilde{S}_u(f) = \tilde{S}_e(f)\tilde{H}(f)$$

Il segnale $\tilde{S}_u(f)$ rappresenta l'inviluppo complesso del segnale in uscita dal filtro. Nel dominio del tempo, la precedente corrisponde alla:

(5.9)
$$\tilde{s}_u(t) = \tilde{s}_e(t) * \tilde{h}(t)$$