

LA RIVELAZIONE NON COERENTE

1 – Il problema della rivelazione.

Il segnale che si presenta all'ingresso del ricevitore è costituito da una replica del segnale inviato dal trasmettitore eventualmente distorta per effetto del canale di trasmissione e corrotta da disturbi ed interferenze. Nei sistemi di modulazione M -ari, com'è noto, l'informazione trasmessa è associata ad un insieme di M simboli $\{a_m\}_{m=1}^M$. Nelle modulazioni prive di memoria, cui si fa riferimento, il segnale trasmesso, nel generico intervallo di simbolo di durata T , dipende dal corrispondente simbolo a_m ; esso è pertanto costituito da una forma di segnalazione $s_m(t)$, appartenente ad un insieme composto da M elementi, scelta in corrispondenza uno ad uno con il simbolo da trasmettere. Inoltre, supponendo di poter trascurare ogni influenza fra i simboli trasmessi, la rivelazione può essere effettuata **simbolo per simbolo**. Si può far allora riferimento all'intervallo $[0, T)$ corrispondente alla rivelazione del simbolo di posto 0 nella sequenza trasmessa. Ciò comporta che il segnale ricevuto può di conseguenza essere posto nella forma:

$$(1.1) \quad r(t) = \alpha s_m(t - t_0) + n(t) \quad (0 \leq t < T)$$

ammesso che il trasmettitore abbia inviato la segnalazione $s_m(t)$. Nella (1.1) si è supposto che il segnale in arrivo sia attenuato (si suppone $\alpha < 1$), ritardato di una quantità t_0 e corrotto da un rumore additivo $n(t)$ che, in quel che segue, si suppone gaussiano, a media nulla e stazionario (in senso lato almeno fino al secondo ordine).

Tenendo presente che il segnale trasmesso è di tipo passa-banda il cui spettro si suppone centrato attorno alle frequenze $\pm f_0$, essendo f_0 la frequenza della portante, il segnale $r(t)$ può essere riscritto introducendo la rappresentazione complessa usando f_0 come frequenza di riferimento. In altri termini, denotando con $\tilde{r}(t)$, $\tilde{s}_m(t)$ e $\tilde{n}(t)$ gli involucri complessi dei segnali $r(t)$, $s_m(t)$ e del rumore $n(t)$ si ha:

$$(1.2) \quad r(t) = \operatorname{Re} \left[\tilde{r}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right] \quad s_m(t) = \operatorname{Re} \left[\tilde{s}_m(t) e^{j2\pi f_0 t} \right] \quad n(t) = \operatorname{Re} \left[\tilde{n}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right]$$

e quindi la (1.1) si può scrivere come segue:

$$(1.3) \quad \operatorname{Re} \left[\tilde{r}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right] = \operatorname{Re} \left[\alpha \tilde{s}_m(t - t_0) e^{-j2\pi f_0 t_0} e^{j2\pi f_0 t} \right] + \operatorname{Re} \left[\tilde{n}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right] \quad 0 \leq t < T$$

e cioè:

$$(1.4) \quad \tilde{r}(t) = \alpha \tilde{s}_m(t - t_0) e^{-j\varphi_0} + \tilde{n}(t) \quad 0 \leq t < T$$

dove si è posto $\varphi_0 = 2\pi f_0 t_0$.

Perché il segnale possa essere correttamente rivelato occorre conoscere e il ritardo t_0 e la fase φ_0 . In quel che segue si suppone che il ricevitore sia sincronizzato al trasmettitore per cui il ritardo t_0 si suppone noto. Tuttavia lo stesso non può dirsi per quanto concerne la fase perché, a causa degli elevati valori della frequenza della portante, un errore nella stima del ritardo, anche se di modesta entità, produce un errore elevato nella fase φ_0 . Inoltre la fase φ_0 può variare anche per effetto di un'instabilità dell'oscillatore usato in tra-

missione. Per questi motivi non è sempre possibile ritenere noto il valore della fase φ_0 . Quando ciò si verifica, si parla di **rivelazione (o demodulazione) non coerente**; in contrasto con la rivelazione (o demodulazione) coerente che si verifica quando tali parametri sono esattamente noti al ricevitore.

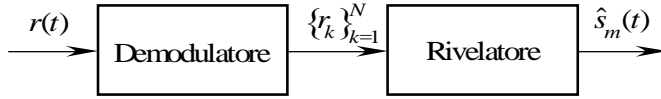


Fig. 1 – Schema di principio di un ricevitore.

Da un punto di vista concettuale è utile considerare il ricevitore come composto da due elementi in cascata (v. Fig. 1):

- a) il **demodulatore** che fornisce in uscita un insieme numerabile di variabili aleatorie $\{\tilde{r}_k\}_{k=1}^N$ a partire dalla conoscenza del segnale $r(t)$ con $t \in [0, T]$;
- b) il **rivelatore** che fornisce una stima del dato trasmesso sulla base delle osservazioni $\{\tilde{r}_k\}_{k=1}^N$.

2 – Stima del segnale trasmesso.

L'involuppo complesso del segnale in arrivo al ricevitore si può scrivere come segue ⁽¹⁾:

$$(2.1) \quad \tilde{r}(t) = \tilde{s}_m(t)e^{-j\varphi_0} + \tilde{n}(t) \quad 0 \leq t < T$$

in cui la fase φ_0 si considera una variabile aleatoria, con densità di probabilità $p_{\varphi_0}(\varphi_0)$, indipendente dalla segnalazione trasmessa e dal rumore additivo supposto gaussiano.

Sia $S_N = \{\tilde{u}_i(t)\}_{i=1}^N$ (con $N \leq M$) un insieme finito di funzioni complesse linearmente indipendenti, confinate in $[0, T]$, che costituisce una base completa per le segnalazioni $\{\tilde{s}_m(t)\}_{m=1}^M$. Le funzioni $\{\tilde{u}_i(t)\}_{i=1}^N$ inoltre si suppongono ortonormali e cioè tali che si abbia:

$$(2.2) \quad \int_0^T \tilde{u}_r(t)\tilde{u}_s^*(t)dt = \begin{cases} 1 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases}$$

Ogni funzione $\tilde{s}_m(t)$ può allora essere espressa come combinazione lineare delle funzioni dell'insieme S_N . La proiezione di $\tilde{r}(t)$ ortogonale al sottospazio S_N allora vale:

$$(2.3) \quad \tilde{r}_N(t) = \sum_{k=1}^N \tilde{r}_k \tilde{u}_k(t) \quad 0 \leq t < T$$

dove i coefficienti \tilde{r}_k sono dati dalle:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \tilde{r}_k &= \int_0^T \tilde{r}(t)\tilde{u}_k^*(t)dt = e^{-j\varphi_0} \int_0^T \tilde{s}_m(t)\tilde{u}_k^*(t)dt + \int_0^T \tilde{n}(t)\tilde{u}_k^*(t)dt = \\ &= e^{-j\varphi_0} \tilde{s}_{m,k} + \tilde{n}_k \end{aligned}$$

in cui si è posto:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \tilde{s}_{m,k} &= \int_0^T \tilde{s}_m(t)\tilde{u}_k^*(t)dt \\ \tilde{n}_k &= \int_0^T \tilde{n}(t)\tilde{u}_k^*(t)dt \end{aligned} \quad 1 \leq k \leq N$$

È da tener presente che i coefficienti $\{\tilde{r}_k\}_{k=1}^N$ dipendono dal valore della fase φ_0 .

Le componenti \tilde{n}_k sono delle variabili aleatorie gaussiane a valori complessi, in quanto

⁽¹⁾ Si è considerato il ricevitore sincronizzato al trasmettitore per cui è $t_0 = 0$ e si è posto inoltre per semplicità $\alpha = 1$.

ottenute con operazioni lineari da segnali gaussiani. Esse costituiscono un vettore aleatorio a valori complessi $\tilde{\mathbf{n}}$ di N dimensioni la cui statistica dipende soltanto dal vettore dei valori medi e dalle correlazioni fra le variabili aleatorie \tilde{n}_k . A tal fine, se il rumore all'ingresso si suppone a media nulla e bianco con densità spettrale pari a $\frac{N_0}{2}$, ricordando

le proprietà dell'involuppo complesso di un rumore bianco, si ha:

$$(2.6) \quad E\{\tilde{n}_k\} = 0$$

Inoltre è:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} E\{\tilde{n}_r \tilde{n}_s^*\} &= \int_0^T \int_0^T E\{\tilde{n}(t_1) \tilde{n}^*(t_2)\} \tilde{u}_r^*(t_1) \tilde{u}_s(t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= 2N_0 \int_0^T \int_0^T \delta(t_2 - t_1) \tilde{u}_r^*(t_1) \tilde{u}_s(t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= 2N_0 \int_0^T \tilde{u}_r^*(t) \tilde{u}_s(t) dt = \begin{cases} 2N_0 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases} \end{aligned}$$

e:

$$(2.8) \quad E\{\tilde{n}_r \tilde{n}_s\} = \int_0^T \int_0^T E\{\tilde{n}(t_1) \tilde{n}(t_2)\} \tilde{u}_r^*(t_1) \tilde{u}_s^*(t_2) dt_1 dt_2 = 0$$

per cui, ricordando la proprietà sui numeri complessi già utilizzata al Cap. 2, le correlazioni associate alle parti reali e alle parti immaginarie delle \tilde{n}_k sono:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} E\{\text{Re}[\tilde{n}_r] \text{Re}[\tilde{n}_s]\} &= \frac{1}{2} \left(\text{Re}[\tilde{n}_r \tilde{n}_s^*] + \text{Re}[\tilde{n}_r \tilde{n}_s] \right) = \begin{cases} N_0 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases} \\ E\{\text{Im}[\tilde{n}_r] \text{Im}[\tilde{n}_s]\} &= \frac{1}{2} \left(\text{Re}[\tilde{n}_r \tilde{n}_s^*] - \text{Re}[\tilde{n}_r \tilde{n}_s] \right) = \begin{cases} N_0 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases} \\ E\{\text{Re}[\tilde{n}_r] \text{Im}[\tilde{n}_s]\} &= \frac{1}{2} \left(\text{Im}[\tilde{n}_r \tilde{n}_s^*] + \text{Im}[\tilde{n}_r \tilde{n}_s] \right) = 0 \\ E\{\text{Im}[\tilde{n}_r] \text{Re}[\tilde{n}_s]\} &= \frac{1}{2} \left(-\text{Im}[\tilde{n}_r \tilde{n}_s^*] + \text{Im}[\tilde{n}_r \tilde{n}_s] \right) = 0 \end{aligned}$$

Il vettore delle parti reali $\tilde{\mathbf{n}}_f$ e quello delle parti immaginarie $\tilde{\mathbf{n}}_q$ costituiscono due vettori a valori reali ad N dimensioni congiuntamente incorrelati; inoltre le componenti di $\tilde{\mathbf{n}}_f$, come pure quelle di $\tilde{\mathbf{n}}_q$, sono incorrelate ed hanno la stessa varianza N_0 .

La statistica del vettore complesso $\tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{n}}_f + j\tilde{\mathbf{n}}_q$ è definita dalla:

$$(2.10) \quad p_{\tilde{\mathbf{n}}}(\mathbf{n}) = p_{\tilde{\mathbf{n}}_f, \tilde{\mathbf{n}}_q}(\tilde{\mathbf{n}}_f, \tilde{\mathbf{n}}_q)$$

e cioè dalla statistica congiunta del vettore delle parti reali e dei coefficienti delle parti immaginarie di $\tilde{\mathbf{n}}$. Ricordando i risultati sopra ottenuti, si ha:

$$(2.11) \quad p_{\tilde{\mathbf{n}}}(\tilde{\mathbf{n}}) = \frac{1}{(2\pi N_0)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2N_0} \sum_{i=1}^N (\tilde{n}_{f,i}^2 + \tilde{n}_{q,i}^2) \right\} = \frac{1}{(2\pi N_0)^N} \exp \left\{ -\frac{|\tilde{\mathbf{n}}|^2}{2N_0} \right\}$$

Sulla base del segnale ricevuto, il ricevitore deve prendere una decisione sulla segnalazione a_m inviata dal trasmettitore. Nella trasmissione numerica il ricevitore decide a favore di quella segnalazione che conduce ad una decisione con il minimo della probabilità di errore. È facile rendersi conto che tale criterio equivale alla stima:

$$(2.12) \quad \hat{a}_m = \arg \max_{a_m} \{ \Pr\{a_m | \tilde{r}(t)\} \}$$

Che questo criterio (noto come criterio della massima probabilità a posteriori MAP) corrisponda alla scelta del simbolo che conduce al minimo della probabilità di errore, noto $\tilde{r}(t)$, è facile verificare. Infatti poiché $\Pr\{a_m | \tilde{r}(t)\}$ è la probabilità che si sia trasmesso $\tilde{s}_m(t)$

noto $\tilde{r}(t)$; allora $1 - \Pr\{a_m | \tilde{r}(t)\}$ denota la probabilità che *non* si sia trasmesso $\tilde{s}_m(t)$ noto $\tilde{r}(t)$. Se il ricevitore stabilisce che il segnale trasmesso è $\tilde{s}_m(t)$ commette un errore con probabilità $1 - \Pr\{a_m | \tilde{r}(t)\}$. La condizione (2.12) corrisponde quindi alla scelta del simbolo in corrispondenza del quale la probabilità di errore è minima, o che è lo stesso, la probabilità della corretta decisione è massima.

Poiché la componente del segnale ricevuto $\tilde{r}(t)$ ortogonale al sottospazio S_N non porta alcun contributo alla decisione, quest'ultima può essere presa sulla base del vettore delle variabili di decisione $\tilde{\mathbf{r}} = [\tilde{r}_1 \ \tilde{r}_2 \ \dots \ \tilde{r}_N]^T$, la funzione $\Pr\{a_m | \tilde{r}(t)\}$ è equivalente alla $\Pr\{a_m | \tilde{\mathbf{r}}\}$. Applicando la regola di Bayes, si può scrivere:

$$(2.13) \quad \Pr\{a_m | \tilde{\mathbf{r}}\} = \frac{p_{\tilde{\mathbf{r}}|a_m}(\tilde{\mathbf{r}} | a_m) \Pr\{a_m\}}{p_{\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{\mathbf{r}})}$$

in cui:

- 1) $\Pr\{a_m\}$ è la probabilità associata al simbolo a_m o, che è lo stesso, alla segnalazione $\tilde{s}_m(t)$;
- 2) $p_{\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{\mathbf{r}})$ è la densità di probabilità associata al vettore $\tilde{\mathbf{r}}$;
- 3) $p_{\tilde{\mathbf{r}}|a_m}(\tilde{\mathbf{r}} | a_m)$ è la densità di probabilità del vettore $\tilde{\mathbf{r}}$ noto che il simbolo trasmesso è a_m .

Se le forme di segnalazione sono equiprobabili, la (2.12) si riduce alla:

$$(2.14) \quad \hat{a}_m = \arg \max_{a_m} \left\{ p_{\tilde{\mathbf{r}}|a_m}(\tilde{\mathbf{r}} | a_m) \right\}$$

poiché, essendo $p_{\tilde{\mathbf{r}}}(\tilde{\mathbf{r}})$ positiva ed indipendente da a_m , non interviene nella determinazione del massimo.

Tenendo conto delle (2.4) è evidente che il vettore $\tilde{\mathbf{r}}$, corrispondente al segnale ricevuto, dipende dalla fase φ_0 , la stima del simbolo trasmesso è ottenuta dalla:

$$(2.15) \quad \hat{a}_m = \arg \max_{a_m} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_{\tilde{\mathbf{r}}|a_m}(\tilde{\mathbf{r}} | \tilde{s}_m(t)) d\varphi_0 \right\}$$

dove si è supposto che la fase φ_0 sia uniformemente distribuita in $[-\pi, \pi)$.

Dalla statistica del vettore delle componenti del rumore, si deduce facilmente:

$$(2.16) \quad p_{\tilde{\mathbf{r}}|a_m}(\tilde{\mathbf{r}} | \tilde{s}_m(t)) = \frac{1}{(2\pi N_0)^N} \exp \left\{ -\frac{|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{s}_m e^{-j\varphi_0}|^2}{2N_0} \right\}$$

Poiché è

$$(2.17) \quad \begin{aligned} |\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{s}_m e^{-j\varphi_0}|^2 &= (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{s}_m e^{-j\varphi_0})^H (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{s}_m e^{-j\varphi_0}) = \\ &= (\tilde{\mathbf{r}}^H - \tilde{s}_m^H e^{j\varphi_0}) (\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{s}_m e^{-j\varphi_0}) = \\ &= \tilde{\mathbf{r}}^H \tilde{\mathbf{r}} - e^{j\varphi_0} \tilde{s}_m^H \tilde{\mathbf{r}} - e^{-j\varphi_0} \tilde{\mathbf{r}}^H \tilde{s}_m + \tilde{s}_m^H \tilde{s}_m = \\ &= |\tilde{\mathbf{r}}|^2 - 2 \operatorname{Re} \left[e^{j\varphi_0} \tilde{s}_m^H \tilde{\mathbf{r}} \right] + |\tilde{s}_m|^2 \end{aligned}$$

la (2.16) si riduce alla:

$$(2.18) \quad p_{\tilde{\mathbf{r}}|a_m}(\tilde{\mathbf{r}} | \tilde{s}_m(t)) = \frac{1}{(2\pi N_0)^N} \exp \left\{ -\frac{|\tilde{\mathbf{r}}|^2 + |\tilde{s}_m|^2}{2N_0} \right\} \exp \left\{ \frac{1}{N_0} \operatorname{Re} \left[e^{j\varphi_0} \tilde{s}_m^H \tilde{\mathbf{r}} \right] \right\}$$

La stima della segnalazione trasmessa può essere semplificata considerando solo i termini dipendenti dal vettore \tilde{s}_m . Si ha così:

$$(2.19) \quad \hat{a}_m = \arg \max_{a_m} \left\{ e^{-\frac{|\tilde{s}_m|^2}{2N_0}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \frac{1}{N_0} \operatorname{Re} \left[e^{j\varphi_0} \tilde{s}_m^H \tilde{\mathbf{r}} \right] \right\} d\varphi_0 \right\}$$

Essendo:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} |\tilde{s}_m|^2 &= E_m = \int_0^T |\tilde{s}_m(t)|^2 dt \\ \tilde{s}_m^H \tilde{\mathbf{r}} &= \int_0^T \tilde{r}(t) \tilde{s}_m^*(t) dt \end{aligned}$$

e ponendo:

$$(2.21) \quad \int_0^T \tilde{r}(t) \tilde{s}_m^*(t) dt = \rho_m e^{j\vartheta_m}$$

la (2.19) si può scrivere come segue:

$$(2.22) \quad \hat{a}_m = \arg \max_{a_m} \left\{ e^{-\frac{E_m}{2N_0}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ \frac{\rho_m}{N_0} \cos(\vartheta_m + \varphi_0) \right\} d\varphi_0 \right\}$$

Risulta:

$$(2.23) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{\rho_m}{N_0} \cos(\vartheta_m + \varphi_0)} d\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta_m - \pi}^{\vartheta_m + \pi} e^{\frac{\rho_m}{N_0} \cos \alpha} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{\rho_m}{N_0} \cos \alpha} d\alpha = I_0 \left(\frac{\rho_m}{N_0} \right)$$

dove si è tenuto conto che l'integrando è una funzione periodica di periodo 2π e si è introdotta la funzione di Bessel modificata di prima specie e di ordine zero definita dalla:

$$(2.24) \quad I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos \alpha} d\alpha$$

La stima ottima diviene allora:

$$(2.25) \quad \hat{a}_m = \arg \max_{a_m} \left\{ e^{-\frac{E_m}{2N_0}} I_0 \left(\frac{\rho_m}{N_0} \right) \right\}$$

Nel caso di segnalazione binaria, dette $\tilde{s}_0(t)$ e $\tilde{s}_1(t)$ gli inviluppi complessi delle forme di segnalazione corrispondenti ai simboli a_0 e a_1 rispettivamente, la stima del segnale trasmesso avviene secondo la regola:

$$(2.26) \quad \begin{aligned} e^{-\frac{E_1}{2N_0}} I_0 \left(\frac{\rho_1}{N_0} \right) > e^{-\frac{E_0}{2N_0}} I_0 \left(\frac{\rho_0}{N_0} \right) &\Rightarrow \hat{a} = a_1 \\ e^{-\frac{E_1}{2N_0}} I_0 \left(\frac{\rho_1}{N_0} \right) < e^{-\frac{E_0}{2N_0}} I_0 \left(\frac{\rho_0}{N_0} \right) &\Rightarrow \hat{a} = a_0 \end{aligned}$$

3 – Modulazione OOK.

3.1 – Struttura del ricevitore.

Nel caso di modulazione OOK gli inviluppi complessi dei segnali trasmessi sono:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} a = a_0 &\Rightarrow \tilde{s}_0(t) = 0 \\ a = a_1 &\Rightarrow \tilde{s}_1(t) = V_0 \operatorname{rect} \left(\frac{t - T/2}{T} \right) \end{aligned}$$

Si ha $E_0 = 0$, $E_1 = V_0^2 T$ per cui la (2.26), tenendo conto che è $I_0(0) = 1$, diventa:

$$(3.2) \quad I_0\left(\frac{\rho_1}{N_0}\right) > e^{\frac{V_0^2 T}{2N_0}} \Rightarrow \hat{a} = a_1$$

$$I_0\left(\frac{\rho_1}{N_0}\right) < e^{\frac{V_0^2 T}{2N_0}} \Rightarrow \hat{a} = a_0$$

dove ρ_1 è il modulo di:

$$(3.3) \quad \tilde{\rho}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}(t) \tilde{s}_1^*(t) dt = V_0 \int_0^T \tilde{r}(t) dt = V_0 \int_0^T r_f(t) dt + jV_0 \int_0^T r_q(t) dt$$

avendo posto $\tilde{r}(t) = \tilde{r}_f(t) + j\tilde{r}_q(t)$. Poiché la funzione $I_0(\cdot)$ è monotona crescente del suo argomento, la (3.2), si trasforma nella:

$$(3.4) \quad w > \lambda \Rightarrow \hat{a} = a_1$$

$$w < \lambda \Rightarrow \hat{a} = a_0$$

dove $w = \frac{\rho_1}{V_0}$ e λ è un'opportuna costante.

La struttura del ricevitore si presenta allora come è indicato in Fig. 2. in quanto le grandezze w_f e w_q presenti all'uscita dei due integratori, supponendo $f_0 T \gg 1$:

$$(3.5) \quad w_f = 2 \int_0^T \cos(2\pi f_0 t) [\tilde{r}_f(t) \cos(2\pi f_0 t) - \tilde{r}_q(t) \sin(2\pi f_0 t)] dt = \int_0^T \tilde{r}_f(t) dt$$

$$w_q = -2 \int_0^T \sin(2\pi f_0 t) [\tilde{r}_f(t) \cos(2\pi f_0 t) - \tilde{r}_q(t) \sin(2\pi f_0 t)] dt = \int_0^T \tilde{r}_q(t) dt$$

coincidono con la parte reale e la parte immaginaria della variabile di decisione $\frac{\tilde{\rho}_1}{V_0}$

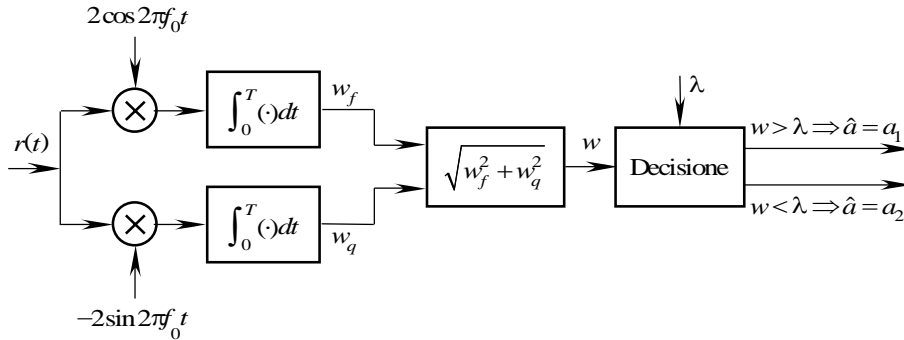


Fig. 2 - Struttura del ricevitore per rivelazione non coerente di segnalazione OOK.

Poiché è $\tilde{r}(t) = \tilde{s}_m(t)e^{-j\phi_0} + \tilde{n}(t)$, la statistica delle variabili aleatorie w_f e w_q , nota che sia la fase ϕ_0 , dipende dalla statistica della parte reale e immaginaria di $\tilde{N} = \int_0^T \tilde{n}(t) dt$. A tal proposito, posto $\tilde{N} = N_f + jN_q$, in presenza di rumore bianco con densità spettrale pari a $\frac{N_0}{2}$, si ha:

$$(3.6) \quad E\{N_f N_q\} = \int_0^T \int_0^T E\{n_f(t_1) n_q(t_2)\} dt_1 dt_2 = 0$$

$$E\{N_f^2\} = \int_0^T \int_0^T E\{n_f(t_1) n_f(t_2)\} dt_1 dt_2 = N_0 \int_0^T dt = N_0 T$$

$$E\{N_q^2\} = \int_0^T \int_0^T E\{n_q(t_1) n_q(t_2)\} dt_1 dt_2 = N_0 \int_0^T dt = N_0 T$$

essendo $E\{n_f(t_1) n_f(t_2)\} = E\{n_q(t_1) n_q(t_2)\} = N_0 \delta(t_2 - t_1)$ e $E\{n_f(t_1) n_q(t_2)\} = 0$. Le variabili aleatorie N_f e N_q costituiscono pertanto un vettore di variabili aleatorie gaussiane, a media nulla e statisticamente indipendenti e caratterizzate dalla stessa varianza.

3.2 – Probabilità di errore.

Se è trasmesso il simbolo $a = a_0$, il segnale complesso in arrivo al ricevitore è:

$$(3.7) \quad \tilde{r}(t) = \tilde{n}(t)$$

per cui le uscite dai correlatori di Fig. 2 sono:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} w_f &= \int_0^T n_f(t) dt \\ w_q &= \int_0^T n_q(t) dt \end{aligned}$$

Esse sono variabili aleatorie gaussiane a valor medio nullo, indipendenti, e caratterizzate da una medesima varianza $\sigma^2 = N_0T$. Facendo riferimento all'Appendice A, la densità di probabilità del primo ordine del modulo $w = \sqrt{w_f^2 + w_q^2}$ obbedisce alla distribuzione di Rayleigh e si ha:

$$(3.9) \quad p_{w|a_0}(w | a_0) = \begin{cases} \frac{w}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{w^2}{2\sigma^2}\right\} & w \geq 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases}$$

Se è trasmesso il simbolo $a = a_1$, il segnale complesso in arrivo al ricevitore è:

$$(3.10) \quad \tilde{r}(t) = V_0 \operatorname{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) e^{-j\varphi_0} + \tilde{n}(t)$$

per cui è per le (3.5):

$$(3.11) \quad \begin{aligned} w_f &= \int_0^T [V_0 \cos \varphi_0 + n_f(t)] dt = V_0T \cos \varphi_0 + \int_0^T n_f(t) dt \\ w_q &= \int_0^T [-V_0 \sin \varphi_0 + n_q(t)] dt = -V_0T \sin \varphi_0 + \int_0^T n_q(t) dt \end{aligned}$$

Le variabili aleatorie w_f e w_q sono gaussiane, indipendenti con valori medi pari a $V_0T \cos \varphi_0$ e $-V_0T \sin \varphi_0$ rispettivamente ed aventi la stessa varianza $\sigma^2 = N_0T$. Con riferimento all'Appendice A, la densità di probabilità del primo ordine del modulo $w = \sqrt{w_f^2 + w_q^2}$ obbedisce alla distribuzione di Rice e si ha:

$$(3.12) \quad p_{w|a_1}(w | a_1) = \begin{cases} \frac{w}{\sigma^2} e^{-\frac{w^2 + V_0^2 T^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{V_0 T}{\sigma^2} w\right) & w \geq 0 \\ 0 & w < 0 \end{cases}$$

La probabilità di errore, sulla base del criterio di decisione espresso dalla (3.4), nell'ipotesi che i dati siano equiprobabili vale:

$$(3.13) \quad P_e = \frac{1}{2} \Pr\{w > \lambda | a_0\} + \frac{1}{2} \Pr\{w < \lambda | a_1\} = \frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\infty} p_{w|a_0}(w | a_0) dw + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\lambda} p_{w|a_1}(w | a_1) dw$$

che, ricordando le (3.9) e (3.12), diviene:

$$(3.14) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\lambda} \frac{w}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{w^2 + V_0^2 T^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(\frac{V_0 T}{\sigma^2} w\right) dw$$

Al fine di semplificare l'espressione della probabilità di errore basta osservare che, sotto l'ipotesi $a = a_1$, la quantità w vale:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} w &= \left\{ (V_0T \cos \varphi_0 + N_f)^2 + (-V_0T \sin \varphi_0 + N_q)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= V_0T \left\{ 1 + \frac{N_f^2 + N_q^2}{V_0^2 T^2} + 2 \left(\frac{N_f}{V_0T} \cos \varphi_0 - \frac{N_q}{V_0T} \sin \varphi_0 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Introducendo l'ulteriore ipotesi che sia:

$$(3.16) \quad \gamma = \frac{V_0^2 T}{N_0}$$

sufficientemente elevato, è facile dedurre che la probabilità che si verifichino gli eventi

$$\left| \frac{N_f}{V_0 T} \right| \ll 1 \quad \left| \frac{N_q}{V_0 T} \right| \ll 1$$

è molto elevata cosicché, con probabilità molto prossima all'unità, la (3.15) si può semplificare come segue:

$$(3.17) \quad w \cong V_0 T \left\{ 1 + 2 \left(\frac{N_f}{V_0 T} \cos \varphi_0 - \frac{N_q}{V_0 T} \sin \varphi_0 \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \cong V_0 T \left\{ 1 + \left(\frac{N_f}{V_0 T} \cos \varphi_0 - \frac{N_q}{V_0 T} \sin \varphi_0 \right) \right\} = \\ = V_0 T + N_f \cos \varphi_0 - N_q \sin \varphi_0$$

La quantità w pertanto si riduce ad una variabile aleatoria gaussiana, in quanto ottenuta dalla combinazione lineare di variabili aleatorie gaussiane. Il suo valor medio vale $V_0 T$ e la sua varianza è:

$$(3.18) \quad E \{ N_f \cos \varphi_0 - N_q \sin \varphi_0 \} = E \{ N_f^2 \} \cos \varphi_0 + E \{ N_q^2 \} \sin \varphi_0 = N_0 T = \sigma^2$$

In tale ipotesi risulta quindi:

$$(3.19) \quad p_{w|a_1}(w | a_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(w - V_0 T)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

È pertanto:

$$(3.20) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(w - V_0 T)^2}{2\sigma^2} \right\} dw$$

Essa è una funzione del valore della soglia λ . Il valore ottimo λ_0 può allora essere determinato imponendo la condizione $\left. \frac{\partial P_e}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = 0$. È facile verificare che tale valore è la soluzione dell'equazione trascendente:

$$(3.21) \quad 2 \frac{\lambda_0}{V_0 T} = 1 + \frac{\log \left[\sqrt{2\pi} \frac{\lambda_0}{\sigma} \right]}{\frac{V_0^2 T^2}{2\sigma^2}} = 1 + \frac{\log \left[\sqrt{2\pi} \frac{\lambda_0}{\sigma} \right]}{\frac{V_0^2 T}{2N_0}}$$

che, per elevati valori del rapporto $\frac{V_0^2 T}{N_0}$, diventa:

$$(3.22) \quad \lambda_0 = \frac{V_0 T}{2}$$

In tali condizioni la probabilità di errore vale:

$$(3.23) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{V_0^2 T^2}{4\sigma^2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{V_0 T}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(w - V_0 T)^2}{2\sigma^2}} dw$$

D'altra parte, avendosi:

$$(3.24) \quad J = \int_0^{\frac{V_0 T}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(w - V_0 T)^2}{2\sigma^2}} dw = \int_{-\frac{V_0 T}{2\sigma}}^{-\frac{V_0 T}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{\frac{V_0 T}{2\sigma}}^{\frac{V_0 T}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = Q\left(\frac{V_0 T}{2\sigma}\right) - Q\left(\frac{V_0 T}{\sigma}\right)$$

si ha:

$$(3.25) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{V_0^2 T^2}{4\sigma^2}} + \frac{1}{2} \left[Q\left(\frac{V_0 T}{2\sigma}\right) - Q\left(\frac{V_0 T}{\sigma}\right) \right]$$

Tenendo conto della quantità γ definita dalla (3.16) è:

$$(3.26) \quad P_e = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{\gamma}{4}} + Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\gamma}\right) - Q(\sqrt{\gamma}) \right]$$

4 – Modulazione FSK.

4.1 – Struttura del ricevitore.

Nel caso di modulazione FSK gli involucri complessi dei segnali trasmessi sono:

$$(4.1) \quad \tilde{s}_m(t) = V_0 e^{ja_m \Delta_f t} \text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

essendo

$$(4.2) \quad a_m = [2m - (M + 1)] \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

e dove è $T\Delta_f = k$ (intero) per garantire l'ortogonalità delle forme di segnalazione.

La (2.25) fornisce:

$$(4.3) \quad \hat{a}_m = \arg \max_{a_m} \left\{ I_0 \left(\frac{\rho_m}{N_0} \right) \right\}$$

essendo $E_m = V_0^2 T$ indipendente da m e dove ρ_m è il modulo della quantità complessa:

$$(4.4) \quad \tilde{\rho}_m = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{r}(t) s_m^*(t) dt = V_0 \int_0^T \tilde{r}(t) e^{-j2\pi a_m \Delta_f t} dt$$

Ricordando che la $I_0(\cdot)$ è una funzione monotona crescente dl suo argomento, la (4.3)

può essere riformulata come segue:

$$(4.5) \quad \hat{a}_m = \arg \max_{a_m} \{ w_m \}$$

essendo $w_m = \frac{\rho_m}{N_0}$.

La struttura del ricevitore si presenta come mostrato in Fig. 3 in quanto le quantità $w_{f,m}$ e $w_{q,m}$ all'uscita del generico integratore, nell'ipotesi che sia $f_0 T \gg 1$:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} w_{f,m} &= 2 \int_0^T \cos[2\pi(f_0 + a_m \Delta_f)t] [r_f(t) \cos 2\pi f_0 t - r_q(t) \sin 2\pi f_0 t] dt = \\ &= \int_0^T r_f(t) \cos(2\pi a_m t \Delta_f) + \int_0^T r_q(t) \sin(2\pi a_m t \Delta_f) \\ w_{q,m} &= -2 \int_0^T \sin[2\pi(f_0 + a_m \Delta_f)t] [r_f(t) \cos 2\pi f_0 t - r_q(t) \sin 2\pi f_0 t] dt = \\ &= -\int_0^T r_f(t) \sin(2\pi a_m t \Delta_f) + \int_0^T r_q(t) \cos(2\pi a_m t \Delta_f) \end{aligned}$$

coincidono con le parti reali e immaginarie di $\tilde{w}_m = \frac{\tilde{\rho}_m}{N_0}$.

Con $\tilde{r}(t) = \tilde{s}_m(t) e^{-j\phi_0} + \tilde{n}(t)$ è $\tilde{w}_m = \int_0^T \tilde{s}_m(t) e^{-j\phi_0} e^{-j2\pi a_m \Delta_f t} dt + \int_0^T \tilde{n}(t) e^{-j2\pi a_m \Delta_f t} dt$ per cui, una volta assegnata la segnalazione $\tilde{s}_m(t)$, la statistica della parte reale e immaginaria di w_m dipende dalla statistica della parte reale e immaginaria di $\tilde{N}_m = \int_0^T \tilde{n}(t) e^{-j2\pi a_m \Delta_f t} dt$. A tal proposito posto $\tilde{N}_m = N_{f,m} + jN_{q,m}$ e ricordando la proprietà fra numeri complessi già utilizzata nel Cap. 2, si ha:

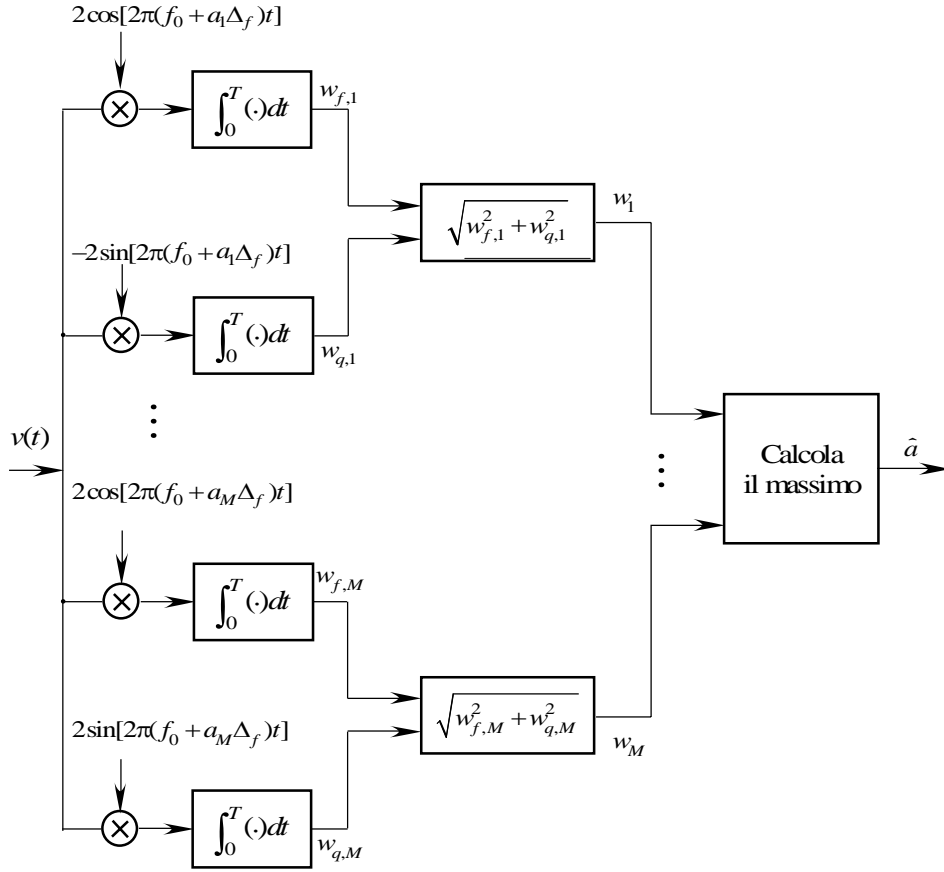


Fig. 3 – Struttura del ricevitore per rivelazione non coerente di segnalazione FSK.

(4.7)

$$\begin{aligned}
 E\{N_{f,m}^2\} &= \frac{1}{2} \left(\text{Re} \left[\int_0^T \int_0^T E\{\tilde{n}^*(t_1)\tilde{n}(t_2)\} e^{j2\pi a_m(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \right] + \text{Re} \left[\int_0^T \int_0^T E\{\tilde{n}(t_1)\tilde{n}(t_2)\} e^{-j2\pi a_m(t_2+t_1)} dt_1 dt_2 \right] \right) \\
 E\{N_{q,m}^2\} &= \frac{1}{2} \left(\text{Re} \left[\int_0^T \int_0^T E\{\tilde{n}^*(t_1)\tilde{n}(t_2)\} e^{j2\pi a_m(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \right] - \text{Re} \left[\int_0^T \int_0^T E\{\tilde{n}(t_1)\tilde{n}(t_2)\} e^{-j2\pi a_m(t_2+t_1)} dt_1 dt_2 \right] \right) \\
 E\{N_{f,m}N_{q,m}\} &= \frac{1}{2} \left(\text{Im} \left[\int_0^T \int_0^T E\{\tilde{n}^*(t_1)\tilde{n}(t_2)\} e^{j2\pi a_m(t_2-t_1)} dt_1 dt_2 \right] + \text{Im} \left[\int_0^T \int_0^T E\{\tilde{n}(t_1)\tilde{n}(t_2)\} e^{-j2\pi a_m(t_2+t_1)} dt_1 dt_2 \right] \right)
 \end{aligned}$$

da cui, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 E\{N_{f,m}^2\} &= N_0 \int_0^T dt = N_0 T \\
 E\{N_{q,m}^2\} &= N_0 \int_0^T dt = N_0 T \\
 E\{N_{f,m}N_{q,m}\} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

Le quantità $N_{f,m}$ e $N_{q,m}$ sono pertanto due variabili aleatorie gaussiane, indipendenti a valor medio nullo e caratterizzate dalla stessa varianza $\sigma^2 = N_0 T$.

4.2 – Probabilità di errore.

Allo scopo di determinare l'espressione della probabilità di errore per simbolo basta supporre che il trasmettitore invii la segnalazione $\tilde{s}_1(t)$. Poiché per la simmetria del sistema tale probabilità condizionata è la stessa qualsiasi sia la segnalazione inviata, la probabilità di errore, se le segnalazioni sono equiprobabili, si identifica con la probabilità di errore condizionata $P(e|a_1)$.

Essendo con $a = a_1$, $\tilde{r}(t) = V_0 e^{j2\pi a_1 \Delta_f t} e^{-j\varphi_0} + \tilde{n}(t)$ si ha:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \tilde{w}_1 &= \frac{\tilde{\rho}_1}{N_0} = \int_0^T \left[V_0 e^{j(2\pi a_1 \Delta_f t - \varphi_0)} + \tilde{n}(t) \right] e^{-j2\pi a_1 \Delta_f t} dt = V_0 T e^{-j\varphi_0} + \int_0^T \tilde{n}(t) e^{-j2\pi a_1 \Delta_f t} dt \\ \tilde{w}_m &= \frac{\tilde{\rho}_m}{N_0} = V_0 \int_0^T \left[V_0 e^{j(2\pi a_1 \Delta_f t - \varphi_0)} + \tilde{n}(t) \right] e^{-j2\pi a_m \Delta_f t} dt = V_0 \int_0^T \tilde{n}(t) e^{-j2\pi a_1 \Delta_f t} dt \quad (m \neq 1) \end{aligned}$$

le cui parti reali e i coefficienti delle parti immaginarie si possono porre nella forma:

$$(4.10) \quad \begin{cases} w_{f,1} = V_0 T \cos \varphi_0 + N_{f,1} \\ w_{q,1} = -V_0 T \sin \varphi_0 + N_{q,1} \\ w_{f,m} = N_{f,m} \\ w_{q,m} = N_{q,m} \end{cases} \quad (m \neq 1)$$

Dalle (4.10) si deduce facilmente che le quantità $w_{f,m}$ e $w_{q,m}$ sono delle variabili aleatorie gaussiane statisticamente indipendenti e hanno la stessa varianza data da $\sigma^2 = N_0 T$. È da osservare che per $m \neq 1$ presentano valor medio nullo, mentre per $m=1$ si ha $E\{w_{f,1}\} = V_0 T \cos \varphi_0$ e $E\{w_{q,1}\} = -V_0 T \sin \varphi_0$. Quanto detto comporta che la densità di probabilità del modulo w_1 obbedisce ad una distribuzione di Rice, mentre quelle dei moduli w_m , con $m \neq 1$, obbediscono a distribuzioni di Rayleigh. È pertanto:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} p_{w_1}(x) &= \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2 + V_0^2 T^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{V_0 T w_1}{\sigma^2}\right) & w_1 \geq 0 \\ 0 & w_1 < 0 \end{cases} \\ p_{w_m}(x) &= \begin{cases} \frac{w_m}{\sigma^2} e^{-\frac{w_m^2}{2\sigma^2}} & w_m \geq 0 \\ 0 & w_m < 0 \end{cases} \quad (m \neq 1) \end{aligned}$$

La probabilità di una corretta decisione è la probabilità che si verificano gli eventi $w_1 > w_2 > \dots > w_M$ e quindi è

$$(4.12) \quad P_c = \Pr\{w_2 < w_1, w_3 < w_1, \dots, w_M < w_1 | a_1\}$$

che si può riscrivere come segue:

$$(4.13) \quad P_c = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{w_2 < w_1, w_3 < w_1, \dots, w_M < w_1 | w_1, a_1\} p_{w_1|a_1}(w_1 | a_1) dw_1$$

e cioè condizionandola al valore della quantità w_1 . Dal momento che le quantità w_m ($m \neq 1$), essendo gaussiane e incorrelate, sono statisticamente indipendenti, la precedente si semplifica nella:

$$(4.14) \quad P_c = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\Pr\{w_2 < w_1 | w_1, a_1\} \right]^{M-1} p_{w_1|a_1}(w_1 | a_1) dw_1$$

Tenendo conto delle prime delle (4.11) si ha:

$$(4.15) \quad \Pr\{w_2 < w_1 | w_1, a_1\} = \int_0^{w_1} p_{w_1|a_1}(x | a_1) dx = \int_0^{w_1} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} dx = 1 - e^{-\frac{w_1^2}{2\sigma^2}}$$

e quindi

$$(4.16) \quad P_c = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right]^{M-1} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2 + V_0^2 T^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left\{\frac{V_0 T}{\sigma^2} x\right\} dx$$

Sviluppando l'espressione $\left[1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]^{M-1}$ con la formula di Newton, si ottiene:

$$(4.17) \quad \left[1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right]^{M-1} = \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \binom{M-1}{k} e^{-k \frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

e quindi:

$$(4.18) \quad P_c = \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \binom{M-1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{(k+1)x^2 + V_0^2 T^2}{2\sigma^2}} I_0 \left\{ \frac{V_0 T}{\sigma^2} x \right\} dx$$

È facile verificare che dalla precedente, sommando e sottraendo al termine $-\frac{(k+1)x^2 + V_0^2 T^2}{2\sigma^2}$ la quantità $\frac{V_0^2 T^2}{2\sigma^2(k+1)}$ si ottiene:

$$(4.19) \quad P_c = \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \binom{M-1}{k} \frac{1}{k+1} e^{-\frac{k}{k+1} \frac{V_0^2 T^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\frac{\sigma^2}{k+1}} \exp \left\{ -\frac{x^2 + \frac{V_0^2 T^2}{(k+1)^2}}{\frac{2\sigma^2}{k+1}} \right\} I_0 \left\{ \frac{\frac{V_0 T}{k+1}}{\frac{\sigma^2}{k+1}} x \right\} dx$$

dove, come si può riconoscere essendo la funzione integranda una distribuzione di Rice con parametri $\bar{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{k+1}$ e $\bar{m} = \frac{V_0^2 T^2}{k+1}$, l'integrale vale 1. Si ha in definitiva:

$$(4.20) \quad P_c = \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \binom{M-1}{k} \frac{1}{k+1} e^{-\frac{k}{k+1} \frac{V_0^2 T^2}{2\sigma^2}}$$

e quindi la probabilità di errore per simbolo è

$$(4.21) \quad P_e = 1 - \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \binom{M-1}{k} \frac{1}{k+1} e^{-\frac{k}{k+1} \frac{V_0^2 T^2}{2\sigma^2}}$$

Ricordando l'espressione della varianza σ^2 si deduce infine:

$$(4.22) \quad P_e = 1 - \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \binom{M-1}{k} \frac{1}{k+1} e^{-\frac{k}{k+1} \frac{V_0 T}{2N_0}}$$

Introducendo l'energia media della segnalazione $E = \frac{V_0^2 T}{2}$, la precedente diviene:

$$(4.23) \quad P_e = 1 - \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \binom{M-1}{k} \frac{1}{k+1} e^{-\frac{k}{k+1} \frac{E}{N_0}}$$

Nel caso di modulazione FSK binaria ($M = 2$), dalla precedente si ha:

$$(4.24) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{E}{2N_0}}$$

che in termini del rapporto segnale/rumore $\gamma = \frac{V_0^2 T}{N_0}$ si scrive:

$$(4.25) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma}{2}}$$

APPENDICE

DISTRIBUZIONI DI RAYLEIGH E DI RICE

1 - Distribuzione di Rayleigh.

Sia

$$(1) \quad Z = X + jY$$

una variabile aleatoria complessa dove X e Y denotano due variabile aleatorie reali che si suppongono entrambe gaussiane, a media nulla, aventi la stessa varianza σ^2 e statisticamente indipendenti. Ciò comporta che la loro densità di probabilità incrociata è espressa dalla:

$$(2) \quad p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Posto

$$(3) \quad Z = Re^{j\varphi}$$

per dedurre la statistica della variabile aleatoria R , basta considerare la trasformazione da coordinate polari a coordinate cartesiane:

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad \varphi \in [-\pi, \pi]$$

ed eguagliare la probabilità con cui si verifica un evento elementare sia che esso sia rap-

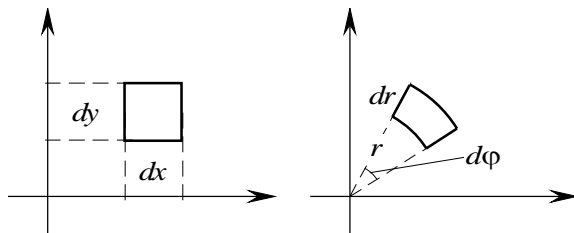


Fig. 1 - Coordinate rettangolari e polari.

presentato nel sistema di coordinate cartesiane (X,Y) che in quello polare (R,Φ) .

Cioè

$$(5) \quad p_{X,Y}(x, y) dx dy = p_{R,\Phi}(r, \varphi) dr d\varphi$$

D'altra parte, facendo riferimento alla

Fig. 1, è:

$$(6) \quad dx dy = dr (r d\varphi)$$

per cui, tenendo conto delle (3) e della (4), si deduce la seguente densità di probabilità congiunta:

$$(7) \quad p_{R,\Phi}(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad \begin{aligned} r &\in [0, \infty) \\ \varphi &\in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

Integrando la (7) rispetto a φ si ottiene la densità di probabilità del primo ordine della variabile aleatoria R :

$$(8) \quad p_R(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\pi}^{\pi} r \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} d\varphi$$

e risulta:

$$(9) \quad p_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} & r \geq 0 \\ 0 & r \leq 0 \end{cases}$$

nota come **distribuzione di Rayleigh**.

In Fig. 2 è riportato l'andamento della distribuzione di Rayleigh.

In modo analogo, integrando la (7) rispetto a r si ottiene la densità di probabilità del primo ordine della variabile aleatoria Φ :

$$(10) \quad p_{\Phi}(\varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{\infty} r \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} dr$$

e risulta, come è facile verificare:

$$(11) \quad p_{\Phi}(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi \leq \varphi < \pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Fig. 2 - Distribuzione di Rayleigh

e cioè la variabile aleatoria Φ è uniformemente distribuita in $[-\pi, \pi)$.

Poiché, tenendo conto delle (7), (9) e (10) risulta:

$$(12) \quad p_{R,\Phi}(r, \varphi) = p_R(r) p_{\Phi}(\varphi)$$

si conclude che le variabili aleatorie Φ e R sono statisticamente indipendenti.

2 - Distribuzione di Rice.

Si consideri la variabile aleatoria complessa

$$(13) \quad Z = R e^{j\Phi} = X + jY$$

in cui X e Y denotano due variabile aleatorie reali che si suppongono entrambe gaussiane, aventi la stessa varianza σ^2 , statisticamente indipendenti ma aventi valori medi dati da m_x e m_y rispettivamente. La loro densità di probabilità incrociata è espressa dalla:

$$(14) \quad p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-m_x)^2+(y-m_y)^2}{2\sigma^2}}$$

Per dedurre la statistica della variabile aleatoria R , si può, anche in questo caso, fare riferimento alla trasformazione:

$$(A.12) \quad \begin{aligned} x - m_x &= r \cos \varphi \\ y - m_y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad \varphi \in [-\pi, \pi)$$

ed eguagliare la probabilità con cui si verifica un evento elementare sia che esso sia rappresentato nel sistema di coordinate cartesiane (X, Y) che in quello polare (R, Φ) .

Con la stessa procedura sviluppata nel caso della distribuzione di Rayleigh, si può verificare che la densità di probabilità incrociata delle variabili aleatorie R e Φ è data dalla

$$(15) \quad p_{R,\Phi}(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-m_x)^2+(y-m_y)^2}{2\sigma^2}}$$

che, ponendo

$$(16) \quad m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} m_x &= m \cos \psi \\ m_y &= m \sin \psi \end{aligned}$$

diventa:

$$(17) \quad p_{R,\Phi}(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{r^2 + m^2 - 2mr(\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi)}{2\sigma^2} \right\} =$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{r^2 + m^2 - 2mr \cos(\varphi - \psi)}{2\sigma^2} \right\}$$

La densità di probabilità della variabile aleatoria R si ottiene allora per integrazione della (17) rispetto a φ ; si ha:

$$(18) \quad p_R(r) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{R,\Phi}(r, \varphi) d\varphi = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2+m^2}{2\sigma^2}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{mr}{\sigma^2} \cos(\varphi-\psi)} d\varphi$$

Per calcolare l'integrale che compare nella (A.16) basta porre $\varphi - \psi = \theta$. Risulta:

$$(19) \quad I = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{mr}{\sigma^2} \cos(\varphi-\psi)} d\varphi = \int_{-\pi-\psi}^{\pi-\psi} e^{\frac{mr}{\sigma^2} \cos \theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{mr}{\sigma^2} \cos \theta} d\theta$$

dove si è tenuto conto del fatto che, essendo l'integrando una funzione di θ periodica di periodo 2π , l'integrale può essere esteso ad un qualsiasi intervallo purché di lunghezza 2π .

Ricordando infine che

$$(20) \quad I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos \theta} d\theta$$

rappresenta la funzione di Bessel modificata di prima specie e di ordine 0, la

(18) diventa:

$$(21) \quad p_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2+m^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{mr}{\sigma^2}\right) & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

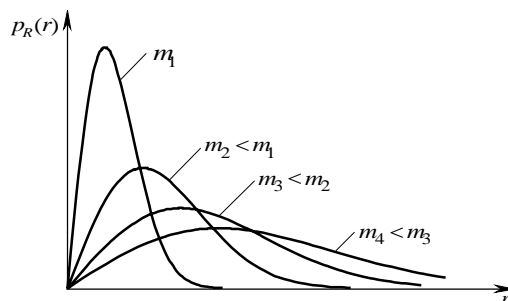


Fig. 3 - Distribuzione di Rice per diversi valori di m .

che costituisce la **distribuzione di Rice**.

La distribuzione di Rice è riportata in Fig. 3 per diversi valori del parametro m dove è $m < m_2 < \dots$.