

LA MODULAZIONE PSK DIFFERENZIALE

1. Generalità.

Se le variazioni della fase φ_0 della portante sono molto rapide, come nel caso di collegamenti wireless, può non essere economicamente conveniente l'impiego di dispositivi di ricostruzione della portante. Tuttavia se le variazioni della fase possono ritenersi trascurabili almeno in un intervallo di tempo di durata non inferiore al doppio del periodo di segnalazione, come nel caso della telefonia cellulare, si può pensare di utilizzare un tipo modulazione differenziale in cui cioè l'informazione è associata alla variazione della fase del segnale modulato. Un tale tipo di segnalazione è denotato con la sigla **DPSK (Differential Phase Shift Keying)**.

2. Struttura del trasmettitore.

Facendo riferimento ad una modulazione PSK M -aria sia

$$(2.1) \quad v(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t + \vartheta_n) \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2} - nT}{T}\right)$$

il segnale trasmesso nel generico intervallo di simbolo $[nT, (n+1)T)$ cui corrisponde il seguente involuppo complesso:

$$(2.2) \quad \tilde{v}(t) = V_0 e^{j\vartheta_n} \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2} - nT}{T}\right) = V_0 c_n \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2} - nT}{T}\right)$$

dove la fase ϑ_n è scelta nell'insieme $\left\{\frac{2\pi m}{M}\right\}_{m=1}^M$ in dipendenza del valore a_n del simbolo M -ario proveniente dalla sorgente di informazione.

Nella modulazione PSK differenziale la fase ϑ_n del segnale modulato si ottiene aggiornando il valore della fase ϑ_{n-1} nell'intervallo di simbolo precedente secondo la seguente regola

$$(2.3) \quad \vartheta_n = \vartheta_{n-1} + \Delta\vartheta_m \pmod{2\pi}$$

dove la quantità $\Delta\vartheta_m$, è scelta sempre nell'insieme $\left\{\frac{2\pi m}{M}\right\}_{m=1}^M$ in dipendenza del valore a_n del dato generato dalla sorgente presente al tempo n . È evidente che questo è un esempio di codifica con memoria, poiché per codificare il dato da trasmettere occorre conoscere il valore del dato precedente.

Facendo riferimento alla (2.3) il simbolo complesso c_n diventa:

$$(2.4) \quad c_n = e^{j\vartheta_n} = e^{j(\vartheta_{n-1} + \Delta\vartheta_m)} = e^{j\vartheta_{n-1}} e^{j\Delta\vartheta_m} = c_{n-1} c'_n$$

con $c'_n = e^{j\Delta\vartheta_m}$.

Dalla precedente si può dedurre uno schema equivalente del trasmettitore per segnalazione DPSK M -arie.

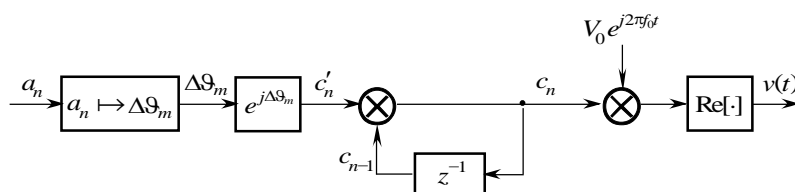


Fig. 1 – Schema equivalente del trasmettitore per segnalazione PSK M -arie.

Dallo schema di Fig. 1, detto $c_n = A_n + jB_n$, si deduce:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} v(t) &= V_0 \operatorname{Re} [c_n e^{j2\pi f_0 t}] = V_0 \operatorname{Re} [(A_n + jB_n) e^{j2\pi f_0 t}] = \\ &= V_0 [A_n \cos(2\pi f_0 t) - B_n \sin(2\pi f_0 t)] \end{aligned}$$

dove, per la (2.4) si deduce la seguente legge di aggiornamento dei coefficienti:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} A_n &= \operatorname{Re} [c_n] = \operatorname{Re} [c_{n-1} e^{j\Delta\vartheta_m}] = \operatorname{Re} [(A_{n-1} + jB_{n-1}) e^{j\Delta\vartheta_m}] = A_{n-1} \cos(\Delta\vartheta_m) - B_{n-1} \sin(\Delta\vartheta_m) \\ B_n &= \operatorname{Im} [c_n] = \operatorname{Im} [c_{n-1} e^{j\Delta\vartheta_m}] = \operatorname{Im} [(A_{n-1} + jB_{n-1}) e^{j\Delta\vartheta_m}] = B_{n-1} \cos(\Delta\vartheta_m) + A_{n-1} \sin(\Delta\vartheta_m) \end{aligned}$$

Si ottiene così lo schema del trasmettitore riportato in Fig. 2

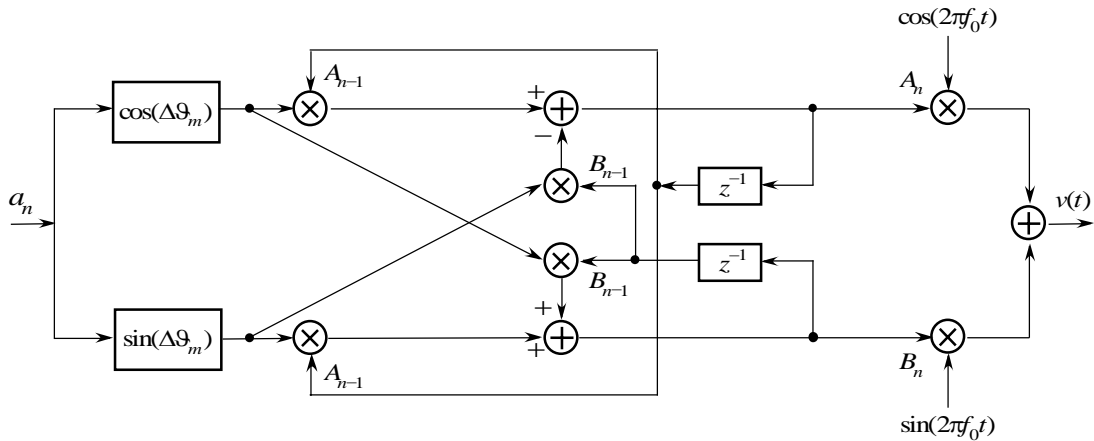


Fig. 2 – Schema del trasmettitore per segnalazioni DPSK.

Esempio E.1

Sia $\{a_n\} = 1001110001$ una sequenza binaria da trasmettere. I valori della fase ϑ_n sono dati dalla Tabella I avendo supposto nulla la condizione iniziale e cioè $\vartheta_0 = 0$.

Tabella I

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1
$\Delta\vartheta_m$	0	π	π	0	0	0	π	π	π	0
ϑ_n	0	π	0	0	0	0	π	0	π	π

Esempio E.2

Un esempio di codifica differenziale per una modulazione PSK quaternaria è riportato nella Tabella III dove si è posta eguale a 0 la condizione iniziale.

Tabella III

a_n	00	01	11	10	00	11	10	01	01	00	10
$\Delta\vartheta_m$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$
$\vartheta_n = \vartheta_{n-1} + \Delta\vartheta_m$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	π	π	0	$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

Un altro tipo di codifica differenziale per una modulazione PSK quaternaria, indicata con la sigla $\pi/4$ DPSK quaternaria (o $\pi/4$ DQPSK) è riportato nella Tabella IV con riferimento alla stessa sequenza di simboli presi in considerazione nella Tabella precedente.

Tabella IV

a_n	00	01	11	10	00	11	10	01	01	00	10
$\Delta\vartheta_m$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$
$\vartheta_n = \vartheta_{n-1} + \Delta\vartheta_m + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	π	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{6\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	π

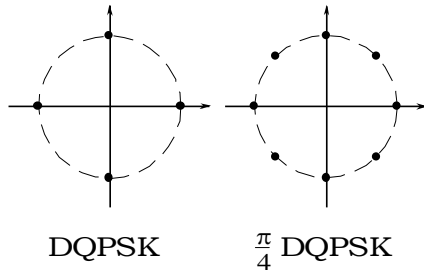


Fig. E.1 – Costellazione per modulazioni DPSK e $\pi/4$ DPSK.

In questo tipo di modulazione la codifica differenziale è fatta secondo la legge

$$\vartheta_n = \vartheta_{n-1} + \Delta\vartheta_m + \frac{\pi}{4}$$

Le due segnalazioni prese in esame nell'Esempio E.2 definiscono le costellazioni riportate in Fig.E.1. È evidente che nel caso della segnalazione $\pi/4$ DQPSK, la costellazione dei segnali assume la forma di una modulazione PSK a 8 livelli.

Da quanto esposto è evidente che perché un tale tipo di segnalazione funzioni correttamente è necessario che al ricevitore la condizione iniziale sia la stessa di quella adoperata dal trasmettitore; ciò comporta che, ad esempio, entrambi gli apparati devono funzionare a partire dalla condizione iniziale nulla.

Nel caso di segnalazione DPSK binaria è

$$(2.7) \quad \begin{aligned} a_n = 0 &\Rightarrow \Delta\vartheta_m = \pi \\ a_n = 1 &\Rightarrow \Delta\vartheta_m = 0 \end{aligned}$$

per cui risulta $\cos(\Delta\vartheta_m) = \pm 1$ e $\sin(\Delta\vartheta_m) = 0$. Tenendo conto della legge di aggiornamento della fase, espressa dalla (2.3), si verifica facilmente che se si parte dalla condizione iniziale $\vartheta_0 = 0$, la fase ϑ_n assume i valori 0 o π per cui è $\sin \vartheta_n = 0$. Le (2.6) forniscono:

$$(2.8) \quad A_n = A_{n-1} \cos(\Delta\vartheta_m)$$

Lo schema del trasmettitore si presenta come è mostrato in Fig. 3.

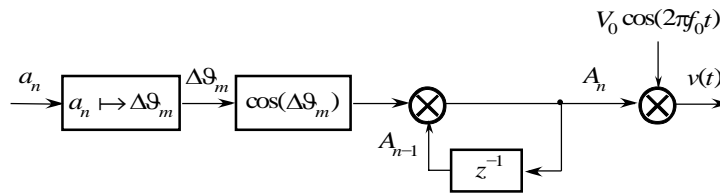


Fig. 3 – Schema I di modulatore per segnalazioni DPSK binarie.

Con un tale tipo di struttura la codifica differenziale è ottenuta operando direttamente sulle cifre A_n . È facile rendersi conto che tale operazione può essere effettuata direttamente operando sui dati in ingresso.

Infatti se la sequenza delle cifre A_n si pensa ottenuta con una codifica bipolare a partire da una sequenza di dati binari $\{D_n\}$ secondo la regola:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} D_n = 0 &\Rightarrow A_n = -1 \\ D_n = 1 &\Rightarrow A_n = 1 \end{aligned}$$

si ha:

- a) Se $a_n = 0 \Rightarrow \Delta\vartheta_m = \pi \Rightarrow \cos \Delta\vartheta_m = -1 \Rightarrow A_n = -A_{n-1}$ per cui
 - se $D_{n-1} = 0$ si ha $A_{n-1} = -1 \Rightarrow A_n = 1 \Rightarrow D_n = 1$
 - se $D_{n-1} = 1$ si ha $A_{n-1} = 1 \Rightarrow A_n = -1 \Rightarrow D_n = 0$
- b) Se $a_n = 1 \Rightarrow \Delta\vartheta_m = 0 \Rightarrow \cos \Delta\vartheta_m = 1 \Rightarrow A_n = A_{n-1}$ per cui
 - se $D_{n-1} = 0$ si ha $A_{n-1} = -1 \Rightarrow A_n = -1 \Rightarrow D_n = 0$
 - se $D_{n-1} = 1$ si ha $A_{n-1} = 1 \Rightarrow A_n = 1 \Rightarrow D_n = 1$

La sequenza dati $\{a_n\}$ è così convertita in una nuova sequenza di dati differenziali $\{D_n\}$ come è mostrato nella seguente Tabella II. In altre parole se il dato a_n da trasmettere è 0 si

cambia il dato D_{n-1} ; esso si lascia inalterato se è $a_n = 1$. Da tale tabella è facile dedurre che la relazione che sussiste tra le variabili binarie in gioco è la seguente:

$$(2.10) \quad D_n = \overline{a_n \oplus D_{n-1}}$$

Il trasmettitore assume una struttura come quella riportata in Fig. 4.

Tabella II

a_n	D_{n-1}	D_n
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

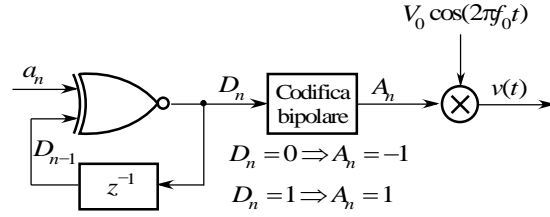


Fig.4 – Schema II di modulatore per segnalazioni DPSK binarie

3. Struttura del ricevitore.

L'involuppo complesso del segnale ricevuto all'ingresso del ricevitore, nel generico intervallo di simbolo $[nT, (n+1)T)$ è:

$$(3.1) \quad \tilde{r}(t) = V_0 e^{j\vartheta_n} e^{j\varphi_0} + \tilde{n}(t) \quad nT \leq t \leq (n+1)T$$

in cui φ_0 denota la fase introdotta dal mezzo di trasmissione che, in quel che segue, si suppone subisca variazioni trascurabili in un intervallo di tempo pari almeno al doppio del periodo di simbolo.

Come nel caso di rivelazione non coerente, il segnale $\tilde{r}(t)$ è proiettato ortogonalmente lungo la direzione individuata dal segnale $\tilde{u}(t) = \text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}-nT}{T}\right)$. Nel generico intervallo di simbolo è:

$$(3.2) \quad \tilde{r}_n = \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{r}(t) dt = V_0 T e^{j\vartheta_n} e^{j\varphi_0} + \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{n}(t) dt$$

Data la struttura della segnalazione DPSK il ricevitore utilizza come variabili di decisione le quantità \tilde{r}_n e \tilde{r}_{n-1} . per cui, supponendo che i simboli generati dalla sorgente di informazione siano equiprobabili ed indipendenti, la decisione sul simbolo trasmesso, in accordo con il criterio di massima verosimiglianza, è data dalla:

$$(3.3) \quad \hat{a}_n = \arg \max_{a_n} \left\{ p_{\tilde{r}_n, \tilde{r}_{n-1}, \varphi_0}(\tilde{r}_n, \tilde{r}_{n-1}, \varphi_0) \right\}$$

Supponendo anche qui che φ_0 è uniformemente distribuita in $[-\pi, \pi)$, si può scrivere:

$$(3.4) \quad p_{\tilde{r}_n, \tilde{r}_{n-1}, \varphi_0}(\tilde{r}_n, \tilde{r}_{n-1}, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_{\tilde{r}_n, \tilde{r}_{n-1} | \varphi_0}(\tilde{r}_n, \tilde{r}_{n-1} | \varphi_0) d\varphi_0$$

Inoltre poiché, per un assegnato valore di φ_0 , le variabili aleatorie \tilde{r}_n e \tilde{r}_{n-1} sono statisticamente indipendenti, si ha:

$$(3.5) \quad p_{\tilde{r}_n, \tilde{r}_{n-1} | \varphi_0}(\tilde{r}_n, \tilde{r}_{n-1} | \varphi_0) = p_{\tilde{r}_n | \varphi_0}(\tilde{r}_n | \varphi_0) p_{\tilde{r}_{n-1} | \varphi_0}(\tilde{r}_{n-1} | \varphi_0)$$

dove, sulla base della (3.2), è:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} p_{\tilde{r}_n | \varphi_0}(\tilde{r}_n | \varphi_0) &= p_{\tilde{r}_n}(\tilde{r}_n - V_0 T e^{j\vartheta_n} e^{j\varphi_0}) \\ p_{\tilde{r}_{n-1} | \varphi_0}(\tilde{r}_{n-1} | \varphi_0) &= p_{\tilde{r}_{n-1}}(\tilde{r}_{n-1} - V_0 T e^{j\vartheta_{n-1}} e^{j\varphi_0}) \end{aligned}$$

avendo posto:

$$(3.7) \quad \tilde{n}_n = \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{n}(t) dt \quad \tilde{n}_{n-1} = \int_{(n-1)T}^{nT} \tilde{n}(t) dt$$

È immediato rendersi conto che le quantità \tilde{n}_n e \tilde{n}_{n-1} sono variabili aleatorie gaussiane proprie, a media nulla, incorrelate e aventi la stessa varianza N_0T . Si ha perciò:

$$(3.8) \quad p_{\tilde{r}_n|\varphi_0}(\tilde{r}_n|\varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0T}} \exp\left\{-\frac{|\tilde{r}_n - V_0T e^{j\vartheta_n} e^{j\varphi_0}|^2}{2N_0T}\right\}$$

$$p_{\tilde{r}_{n-1}|\varphi_0}(\tilde{r}_{n-1}|\varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0T}} \exp\left\{-\frac{|\tilde{r}_{n-1} - V_0T e^{j\vartheta_{n-1}} e^{j\varphi_0}|^2}{2N_0T}\right\}$$

La (3.5) così diviene:

$$(3.9) \quad p_{\tilde{r}_n, \tilde{r}_{n-1}|\varphi_0}(\tilde{r}_n, \tilde{r}_{n-1}|\varphi_0) = \frac{1}{2\pi N_0T} \exp\left\{-\frac{1}{2N_0T} \left(|\tilde{r}_n - V_0T e^{j\vartheta_n} e^{j\varphi_0}|^2 + |\tilde{r}_{n-1} - V_0T e^{j\vartheta_{n-1}} e^{j\varphi_0}|^2 \right)\right\}$$

Poiché è

$$(3.10) \quad \begin{aligned} |\tilde{r}_n - V_0T e^{j\vartheta_n} e^{j\varphi_0}|^2 + |\tilde{r}_{n-1} - V_0T e^{j\vartheta_{n-1}} e^{j\varphi_0}|^2 = \\ = |\tilde{r}_n|^2 + |\tilde{r}_{n-1}|^2 + 2V_0^2T^2 - 2V_0T \operatorname{Re} \left[\tilde{r}_n e^{-j\vartheta_n} e^{-j\varphi_0} + \tilde{r}_{n-1} e^{-j\vartheta_{n-1}} e^{-j\varphi_0} \right] \end{aligned}$$

la (3.3), eliminando i termini inessenziali, si riduce alla:

$$(3.11) \quad \hat{a}_n = \arg \max_{a_n} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[\frac{V_0}{N_0} \operatorname{Re} \left[\tilde{r}_n e^{-j\vartheta_n} e^{-j\varphi_0} + \tilde{r}_{n-1} e^{-j\vartheta_{n-1}} e^{-j\varphi_0} \right] \right] d\varphi_0 \right\}$$

che tenendo conto della legge di aggiornamento (2.3), vale:

$$(3.12) \quad \hat{a}_n = \arg \max_{a_n} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[\frac{V_0}{N_0} \operatorname{Re} \left[(\tilde{r}_n e^{-j\Delta\vartheta_m} + \tilde{r}_{n-1}) e^{-j\vartheta_{n-1}} e^{-j\varphi_0} \right] \right] d\varphi_0 \right\}$$

Ponendo adesso $(\tilde{r}_n e^{-j\Delta\vartheta_m} + \tilde{r}_{n-1}) = |\tilde{r}_n e^{-j\Delta\vartheta_m} + \tilde{r}_{n-1}| e^{j\alpha}$ si ottiene:

$$(3.13) \quad \hat{a}_n = \arg \max_{a_n} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[\frac{V_0}{N_0} \left[|\tilde{r}_n e^{-j\Delta\vartheta_m} + \tilde{r}_{n-1}| \cos(\alpha + \vartheta_{n-1} + \varphi_0) \right] \right] d\varphi_0 \right\}$$

e cioè

$$(3.14) \quad \hat{a}_n = \arg \max_{a_n} \left\{ I_0 \left(\frac{V_0}{N_0} |\tilde{r}_n e^{-j\Delta\vartheta_m} + \tilde{r}_{n-1}| \right) \right\}$$

dove $I_0(\cdot)$ rappresenta la funzione di Bessel modificata di prima specie e di ordine 0. Poiché $I_0(\cdot)$ è una funzione crescente del suo argomento, la precedente può risciversi come segue:

$$(3.15) \quad \hat{a}_n = \arg \max_{a_n} \left\{ |\tilde{r}_n e^{-j\Delta\vartheta_m} + \tilde{r}_{n-1}| \right\} = \arg \max_{a_n} \left\{ |\tilde{r}_n e^{-j\Delta\vartheta_m} + \tilde{r}_{n-1}|^2 \right\}$$

dal momento che $\arg \max \{x\} = \arg \max \{x^2\}$.

Si ha:

$$(3.16) \quad |\tilde{r}_n e^{-j\Delta\vartheta_m} + \tilde{r}_{n-1}|^2 = |\tilde{r}_n|^2 + |\tilde{r}_{n-1}|^2 + 2 \operatorname{Re} \left[\tilde{r}_n \tilde{r}_{n-1}^* e^{j\Delta\vartheta_m} \right]$$

per cui è

$$(3.17) \quad \hat{a}_n = \arg \max_{\Delta\vartheta_m} \left\{ \operatorname{Re} \left[\tilde{r}_n \tilde{r}_{n-1}^* e^{j\Delta\vartheta_m} \right] \right\}$$

che dà luogo alla struttura riportata in Fig. 5.

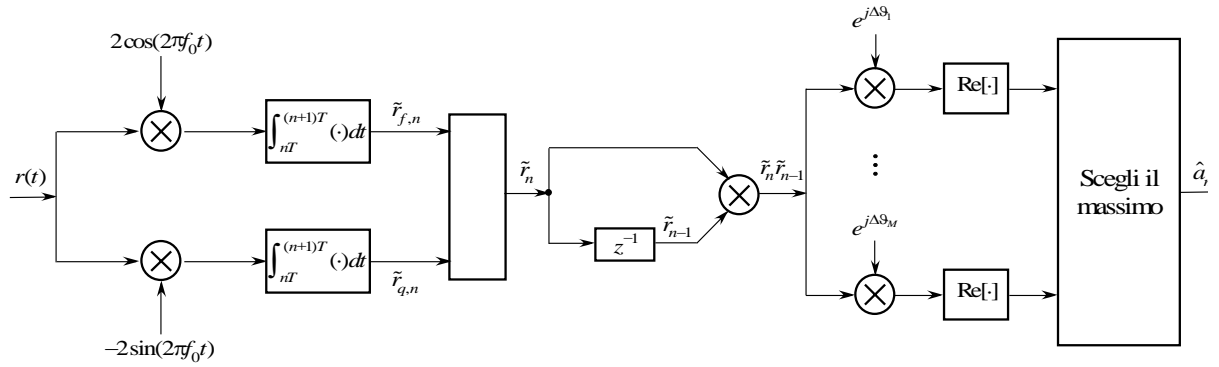


Fig. 5 – Schema del ricevitore per segnalazione DPSK binaria

Con riferimento alla Fig. 5, si deduce che se il segnale in ingresso è del tipo

$$(3.18) \quad r(t) = r_f(t) \cos(2\pi f_0 t) - r_q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

le grandezze in uscita dagli integratori valgono

$$(3.19) \quad \begin{aligned} 2r(t) \cos(2\pi f_0 t) &= 2 \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{r}_f(t) \cos^2(2\pi f_0 t) dt - 2 \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{r}_q(t) \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) dt = \\ &= \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{r}_f(t) dt \equiv \tilde{r}_{f,n} \\ -2r(t) \sin(2\pi f_0 t) &= -2 \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{r}_f(t) \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t) dt + 2 \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{r}_q(t) \sin^2(2\pi f_0 t) dt = \\ &= \int_{nT}^{(n+1)T} \tilde{r}_q(t) dt \equiv \tilde{r}_{q,n} \end{aligned}$$

dove si è supposto che sia $f_0 \gg \frac{1}{T}$. Esse si identificano quindi con la parte reale e la parte immaginaria delle quantità \tilde{r}_n .

4. Probabilità di errore.

Non è possibile determinare in forma chiusa la probabilità di errore in una segnalazione PSK M -aria differenziale tranne che nel caso di $M = 2$.

In questo caso, facendo riferimento alla (3.17), e ricordando la codifica (2.7), il ricevitore effettua la decisione sul simbolo trasmesso come appresso indicato:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \text{Re}[\tilde{r}_n \tilde{r}_{n-1}^*] > 0 &\Rightarrow \hat{a}_n = 1 \\ \text{Re}[\tilde{r}_n \tilde{r}_{n-1}^*] < 0 &\Rightarrow \hat{a}_n = 0 \end{aligned}$$

per cui si commette errore se:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \text{Se } a_n = 1 &\Rightarrow \text{Re}[\tilde{r}_n \tilde{r}_{n-1}^*] < 0 \\ \text{Se } a_n = 0 &\Rightarrow \text{Re}[\tilde{r}_n \tilde{r}_{n-1}^*] > 0 \end{aligned}$$

Poiché tali probabilità di errore sono manifestamente eguali e i simboli della sorgente si suppongono equiprobabili, la probabilità di errore diventa:

$$(4.3) \quad P_e = \Pr\left\{\text{Re}[\tilde{r}_n \tilde{r}_{n-1}^*] > 0 \mid a_n = 0\right\}$$

Per calcolare la probabilità di errore basta introdurre le seguenti posizioni:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}(\tilde{r}_n + \tilde{r}_{n-1}) \\ z_2 &= \frac{1}{2}(\tilde{r}_n - \tilde{r}_{n-1}) \end{aligned}$$

Si ha perciò

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \tilde{r}_n &= z_1 + z_2 \\ \tilde{r}_{n-1} &= z_1 - z_2 \end{aligned}$$

e quindi

$$(4.6) \quad \operatorname{Re}[\tilde{r}_n \tilde{r}_{n-1}^*] = \operatorname{Re}[(z_1 + z_2)(z_1^* - z_2^*)] = |z_1|^2 - |z_2|^2$$

La probabilità di errore è pertanto:

$$(4.7) \quad P_e = \Pr\{|z_1|^2 - |z_2|^2 > 0 \mid a_n = 0\} = \Pr\{|z_1|^2 > |z_2|^2 \mid a_n = 0\} = \Pr\{|z_1| > |z_2| \mid a_n = 0\}$$

D'altra parte, tenendo conto che è:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \tilde{r}_n &= V_0 T e^{j\theta_{n-1}} e^{j\varphi_0} e^{j\Delta\theta_m} + \tilde{n}_n = V_0 T e^{j\alpha} e^{j\Delta\theta_m} + \tilde{n}_n = V_0 T e^{j\alpha} + \tilde{n}_n \\ \tilde{r}_{n-1} &= V_0 T e^{j\theta_{n-1}} e^{j\varphi_0} + \tilde{n}_{n-1} = V_0 T e^{j\alpha} + \tilde{n}_{n-1} \end{aligned}$$

si ha:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} z_1 &= V_0 T e^{j\alpha} + \frac{1}{2}(\tilde{n}_n + \tilde{n}_{n-1}) \\ z_2 &= \frac{1}{2}(\tilde{n}_n - \tilde{n}_{n-1}) \end{aligned}$$

Si deduce infine dalle (4.4) che la variabile aleatoria $|z_1|$ obbedisce alla distribuzione di Rice con parametri $m = V_0 T$ e $\sigma^2 = \frac{N_0 T}{2}$:

$$(4.10) \quad p_{|z_1|}(x) = \begin{cases} \frac{x}{N_0 T / 2} e^{-\frac{x^2 + V_0^2 T^2}{N_0 T}} I_0\left(\frac{V_0 T}{N_0 T / 2} x\right) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

e la variabile aleatoria $|z_2|$ obbedisce alla distribuzione di Rayleigh con parametro $\sigma^2 = \frac{N_0 T}{2}$:

$$(4.11) \quad p_{|z_2|}(x) = \begin{cases} \frac{x}{N_0 T / 2} \exp\left\{-\frac{x^2}{N_0 T}\right\} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

La probabilità di errore si calcola facilmente marginalizzando la (4.7) rispetto a $|z_2|$. Si ha:

$$(4.12) \quad P_e = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{|z_1| > |z_2| \mid z_2 = z \mid a_n = 0\} p_{|z_2|}(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} p_{|z_1|}(x) \left[\int_x^{\infty} p_{|z_2|}(y) dy \right] dx$$

od anche:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} P_e &= \int_0^{\infty} \frac{x}{N_0 T / 2} \exp\left[-\frac{x^2 + V_0^2 T^2}{N_0 T}\right] I_0\left(\frac{V_0 T}{N_0 T / 2} x\right) \left[\int_x^{\infty} \frac{y}{N_0 T / 2} \exp\left[-\frac{y^2}{N_0 T}\right] dy \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{V_0^2 T}{4 N_0}} \int_0^{\infty} \frac{x}{N_0 T / 4} \exp\left[-\frac{x^2 + \frac{V_0^2 T^2}{2}}{N_0 T}\right] I_0\left(\frac{V_0 T}{\frac{N_0 T}{4}} x\right) dx \end{aligned}$$

Poiché l'integrando che compare nella precedente corrisponde ad una distribuzione di Rice con parametri $\sigma^2 = \frac{N_0 T}{4}$ e $m = \frac{V_0 T}{2}$ si ha:

$$(4.14) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{V_0^2 T}{4 N_0}}$$