

L'EQUALIZZAZIONE DI CANALE

1 – Generalità.

In un sistema di trasmissione numerica, se è nota la risposta impulsiva o la risposta in frequenza del canale, è possibile annullare l'interferenza d'intersimbolo sagomando l'impulso di segnalazione corrispondente al segnale ricevuto in modo da soddisfare le condizioni richieste dal criterio di Nyquist. Questo significa che nel ricevitore deve essere previsto un dispositivo, detto **equalizzatore**, tale che da conformare il segnale in modo da ridurre, se non proprio annullare, l'interferenza di intersimbolo. Normalmente l'equalizzatore è un dispositivo numerico che opera sui campioni del segnale ricevuto e pertanto va inserito a valle del campionatore. Lo schema del ricevitore si presenta così come è schematizzato in Fig. 1.

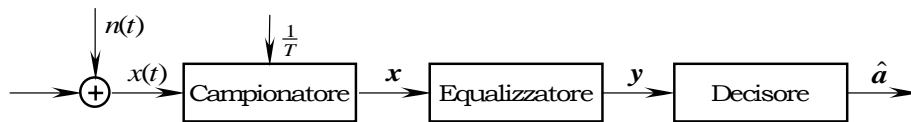


Fig.1 – Schema del ricevitore.

Sia

$$(1.1) \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q(t - nT) + n(t)$$

l'involuppo complesso di un segnale numerico PAM all'ingresso del ricevitore, dove:

- $\mathbf{a} \equiv \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ rappresenta la sequenza dei simboli emessi dalla sorgente supposti appartenenti ad un alfabeto composto da M elementi;
- $q(t)$ è l'impulso di segnalazione;
- $n(t)$ denota il rumore introdotto dal canale.

Se si suppone un perfetto sincronismo fra il segnale trasmesso e quello ricevuto, all'uscita del campionatore si presenta il segnale:

$$(1.2) \quad x(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q[(k-n)T] + n(kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{k-n} q(nT) + n(kT)$$

che, introducendo le sequenze $\mathbf{x} \equiv \{x(nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\mathbf{q} \equiv \{q(nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ e $\mathbf{n} \equiv \{n(nT)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, si può scrivere nella forma:

$$(1.3) \quad \mathbf{x} = \mathbf{a} * \mathbf{q} + \mathbf{n}$$

In quel che segue si prendono in esame gli equalizzatori lineari che producono una sequenza di variabili di decisione:

$$(1.4) \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} * \mathbf{h}$$

ottenuta come uscita di un filtro lineare di risposta impulsiva \mathbf{h} quando al suo ingresso è presente la sequenza \mathbf{x} . Le (1.2) e (1.4) permettono di definire lo schema equivalente del sistema di trasmissione con equalizzatore lineare riportato in Fig. 2 dove il canale di trasmis-

sione e l'equalizzatore sono rappresentati dalle funzioni di trasferimento, espresse nella variabile zeta, date da $Q(z)$ e $H(z)$ rispettivamente.

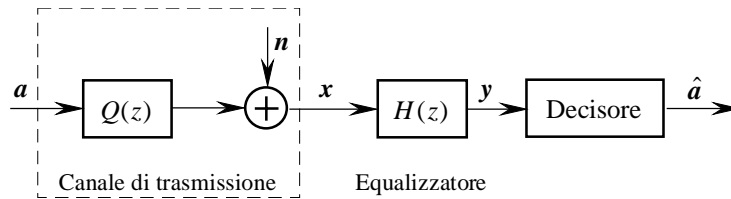


Fig.2 - Schema equivalente tempo discreto del sistema di trasmissione numerico.

Le caratteristiche dell'equalizzatore sono determinate imponendo particolari condizioni all'errore di predizione:

$$(1.5) \quad e_k = y_k - \hat{a}_k$$

fra il segnale in entrata al decisore e la stima del dato. In quel che segue si suppone che la decisione sia presa simbolo per simbolo e sia *sempre* corretta per modo che si può porre $\hat{a}_k = a_k$; in tal caso la sequenza errore diventa:

$$(1.6) \quad e = y - a$$

Dallo schema di Fig. 2 si deduce:

$$(1.7) \quad e = (a * q + n) * h - a$$

che, potendosi scrivere $a = a * \delta$, dove δ denota la sequenza impulsiva a tempo discreto, diventa:

$$(1.8) \quad e = a * (q * h - \delta) + n * h$$

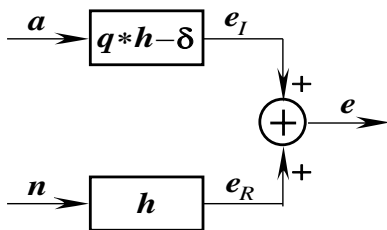


Fig.3 - Errore di decisione.

La (1.8) può essere rappresentata come è mostrato in Fig. 3 dalla quale si desume che a produrre l'errore di decisione intervengono due componenti:

1. l'interferenza di intersimbolo e_I ;
2. il rumore del canale di trasmissione e_R .

La risposta impulsiva dell'equalizzatore, supposta nota la forma dell'impulso di segnalazione all'uscita del canale di

trasmissione, può essere individuata prendendo in esame due distinte procedure:

- a) imponendo l'annullamento dell'interferenza di intersimbolo, che corrisponde ad annullare la componente e_I dell'errore di decisione;
- b) imponendo che il valore quadratico medio dell'errore di decisione sia minimo.

Gli equalizzatori conformati secondo la procedura a) sono denominati equalizzatori **zero forcing** (equalizzatori **ZF**); quelli ottenuti con la procedura b) sono detti equalizzatori a **minimo errore quadratico medio** (equalizzatori **MMSE Minimum Mean Square Error**).

In quel che segue è necessario prendere in esame due diverse configurazioni dell'equalizzatore. Infatti esso può essere conformato come un filtro a risposta impulsiva infinita (filtro IIR) o come un filtro a risposta impulsiva finita (filtro FIR).

EQUALIZZATORI CONFORMATI SECONDO FILTRI IIR

2. - Equalizzatori zero forcing (ZF).

Negli equalizzatori di tipo ZF si conforma l'equalizzatore in modo da annullare l'interferenza di intersimbolo. Ponendo uguale a zero la componente e_l dell'errore di decisione si ottiene:

$$(2.1) \quad \mathbf{q} * \mathbf{h}_o = \delta$$

dove \mathbf{h}_o denota la risposta impulsiva che caratterizza l'equalizzatore ottimo.

Prendendo la trasformata zeta di entrambi i membri della (2.1) si ottiene:

$$(2.2) \quad H_o(z) = \frac{1}{Q(z)}$$

Per calcolare le prestazioni di un tale tipo di equalizzatore occorre valutare il valore quadratico medio della sequenza errore. A tal proposito ricordando che il valore quadratico medio di una sequenza aleatoria si ottiene integrando la sua densità spettrale, si ha:

$$(2.3) \quad \varepsilon_o = \int_{-\pi}^{\pi} W_{ee}(e^{j\omega}) d\omega$$

Tenendo presente la (2.1), dalla (1.8) si deduce che la sequenza errore e si riduce a $n * h_o$, per cui la densità spettrale $W_{ee}(e^{j\omega})$, denotando con $W_{nn}(e^{j\omega})$ la densità spettrale della sequenza di rumore, diviene:

$$(2.4) \quad W_{ee}(e^{j\omega}) = W_{nn}(e^{j\omega}) |H_o(e^{j\omega})|^2$$

Supponendo che il circolo di raggio unitario del piano zeta sia contenuto nella regione di convergenza della funzione $H_o(z)$, si ha $H_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{Q(e^{j\omega})}$ per cui si può scrivere:

$$(2.5) \quad W_{ee}(e^{j\omega}) = \frac{W_{nn}(e^{j\omega})}{|Q(e^{j\omega})|^2}$$

Risulta pertanto:

$$(2.6) \quad \varepsilon_o = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{W_{nn}(e^{j\omega})}{|Q(e^{j\omega})|^2} d\omega$$

Se le sequenze dei dati \mathbf{a} e del rumore \mathbf{n} si suppongono entrambe costituite da elementi incorrelati e caratterizzati da varianze pari a σ_a^2 e σ_n^2 rispettivamente, la (2.6) scritta in termini del rapporto segnale rumore $\gamma = \sigma_a^2 / \sigma_n^2$ diviene:

$$(2.7) \quad \varepsilon_o = \sigma_a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\gamma |Q(e^{j\omega})|^2} d\omega$$

Esempio E.1

Sia

$$q(t) = e^{-t/T_0} u(t)$$

la forma dell'impulso di segnalazione all'uscita del canale. È

$$q_k = \begin{cases} \rho^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

con $\rho = e^{-T/T_0} < 1$. Si ha per $|z| \geq \rho$:

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{\rho}{z}} = \frac{z}{z - \rho}$$

e quindi:

$$H_o(z) = \frac{z - \rho}{z} = 1 - \rho z^{-1}$$

che permette di dedurre lo schema dell'equalizzatore come indicato in Fig. E.1. È inoltre $H_o(e^{j\omega}) = (1 - \rho e^{-j\omega})^{-1}$.

Se la sequenza di rumore si suppone stazionaria e composta da elementi a media nulla e varianza σ_n^2 è $W_n(e^{j\omega}) = \sigma_n^2$, per cui l'errore di decisione vale:

$$\varepsilon_o = \sigma_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} |1 - \rho e^{-j\omega}|^2 d\omega = \sigma_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} [(1 + \rho^2) - 2\rho \cos \omega] d\omega = 2\pi \sigma_n^2 (1 + \rho^2)$$

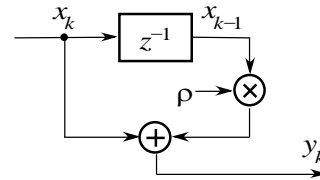


Fig. E.1

3. - Equalizzatori MMSE.

Negli equalizzatori ZF il procedimento adottato per determinare i coefficienti dell'equalizzatore non tiene conto del rumore introdotto dal mezzo di trasmissione. Per questo motivo, in particolari gravose condizioni, il comportamento di tali equalizzatori può non essere accettabile. La risposta impulsiva h dell'equalizzatore MMSE, invece, si determina imponendo che il valore quadratico medio dell'errore fra il segnale in uscita y e la stima \hat{a} del dato trasmesso risulti minimo. Sempre nell'ipotesi di decisione corretta, gli elementi del filtro ottimo sono calcolati come segue:

$$(3.1) \quad \mathbf{h}_o = \arg \min_h E \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 \right\}$$

Dalla teoria del filtro alla Wiener riportata nell'Appendice A si deduce che la risposta impulsiva ottima \mathbf{h}_o dell'equalizzatore MMSE si ottiene dalla condizione:

$$(3.2) \quad E \left\{ x_{n-k}^* e_n \right\} = 0$$

essendo $e_n = y_n - a_n$ l'errore di predizione. Nella stessa Appendice è mostrato che la caratteristica del filtro ottimo, espressa nel dominio della variabile zeta, è:

$$(3.3) \quad H_o(z) = \frac{W_{xa}(z)}{W_x(z)}$$

Per valutare le densità spettrali che compaiono nella (3.3) occorre calcolare le corrispondenti funzioni di correlazione. Se si suppone che le sequenze \mathbf{a} e \mathbf{n} siano congiuntamente incorrelate per cui si ha:

$$(3.4) \quad E \left\{ a_n^* n_{n+k} \right\} = 0 \quad \forall k$$

si ha, tenendo conto della (1.2):

$$(3.5) \quad \begin{aligned} R_{xa}(k) &= E \left\{ x_n^* a_{n+k} \right\} = E \left\{ \left[\sum_i q_i^* a_{n-i}^* + n_n^* \right] a_{n+k} \right\} = \sum_i q_i^* E \left\{ a_{n-i}^* a_{n+k} \right\} \\ R_{xx}(k) &= E \left\{ x_n^* x_{n+k} \right\} = E \left\{ \left[\sum_i q_i^* a_{n-i}^* + n_n^* \right] \left[\sum_j q_j a_{n+k-j} + n_{n+k} \right] \right\} = \\ &= \sum_i \sum_j q_i^* q_j E \left\{ a_{n-i}^* a_{n+k-j} \right\} + E \left\{ n_n^* n_{n+k} \right\} \end{aligned}$$

che, denotando con $R_{aa}(k) = E \left\{ a_n^* a_{n+k} \right\}$ e $R_{nn}(k) = E \left\{ n_n^* n_{n+k} \right\}$ le autocorrelazione delle sequen-

ze \mathbf{a} e \mathbf{n} , assumono la forma:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} R_{xa}(k) &= \sum_i q_i^* R_{aa}(k+i) \\ R_{xx}(k) &= \sum_i \sum_j q_i^* q_j R_{aa}(k+i-j) + R_{nn}(k) \end{aligned}$$

Prendendo le trasformate zeta delle (3.6) si ottiene:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} W_{xa}(z) &= \sum_k \sum_i q_i^* R_{aa}(k+i) z^{-k} = \sum_k \left(\sum_i q_i^* z^i \right) R_{aa}(k+i) z^{-(k+i)} = W_{aa}(z) \sum_i q_i^* z^i = W_{aa}(z) Q^*(1/z^*) \\ W_{xx}(z) &= \sum_k \sum_i \sum_j q_i^* q_j R_{aa}(k+i-j) z^{-k} + \sum_k R_{nn}(k) z^{-k} = \\ &= \sum_k \left(\sum_i q_i^* z^i \cdot \sum_j q_j z^{-j} \right) R_{aa}(k+i-j) z^{-(k+i-j)} + \sum_k R_{nn}(k) z^{-k} = \\ &= W_{aa}(z) \left(\sum_i q_i^* z^i \cdot \sum_j q_j z^{-j} \right) + W_{nn}(z) = W_{aa}(z) Q(z) Q^*(1/z^*) + W_{nn}(z) \end{aligned}$$

dove $Q(z)$ denota la trasformata zeta della sequenza \mathbf{q} e dove si è fatto uso della relazione:

$$(3.8) \quad \sum_i q_i^* z^i = \left[\sum_i q_i \left(\frac{1}{z^*} \right)^{-i} \right]^* = Q^*(1/z^*).$$

Sostituendo le (3.7) nella (3.3) si ha:

$$(3.9) \quad H_o(z) = \frac{W_{aa}(z) Q^*(1/z^*)}{W_{aa}(z) Q(z) Q^*(1/z^*) + W_{nn}(z)}$$

Tenendo conto dei risultati dell'Appendice A, si deduce infine:

$$(3.10) \quad W_{ee}(z) = W_{aa}(z) \left[1 - \frac{W_{aa}(z) Q(z) Q^*(1/z^*)}{W_{aa}(z) Q(z) Q^*(1/z^*) + W_{nn}(z)} \right] = \frac{W_{aa}(z) W_{nn}(z)}{W_{aa}(z) Q(z) Q^*(1/z^*) + W_{nn}(z)}$$

essendo $W_{xx}(z) = W_{xx}^*(1/z^*)$.

Se il cerchio unitario del piano zeta è contenuto nella regione di convergenza della trasformata $W_{ee}(z)$, ponendo nella (3.10) $z = e^{j\omega}$, si ottiene la trasformata di Fourier della sequenza errore e_n :

$$(3.11) \quad W_{ee}(e^{j\omega}) = W_{aa}(e^{j\omega}) \left[1 - \frac{W_{aa}(e^{j\omega}) |Q(e^{j\omega})|^2}{W_{aa}(e^{j\omega}) |Q(e^{j\omega})|^2 + W_{nn}(e^{j\omega})} \right] = \frac{W_{aa}(e^{j\omega}) W_{nn}(e^{j\omega})}{W_{aa}(e^{j\omega}) |Q(e^{j\omega})|^2 + W_{nn}(e^{j\omega})}$$

Se le sequenze \mathbf{a} e \mathbf{n} sono entrambe costituite da elementi incorrelati, a media nulla e varianze date da σ_a^2 e σ_n^2 rispettivamente, la (3.11) può essere espressa in termini del rapporto segnale rumore $\gamma = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}$ come segue:

$$(3.12) \quad W_{ee}(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_a^2}{\gamma |Q(e^{j\omega})|^2 + 1}$$

La trasformata $W_{ee}(e^{j\omega})$ consente di calcolare il valore quadratico medio dell'errore di decisione e si ha:

$$(3.13) \quad \varepsilon_o = \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\omega}{\gamma |Q(e^{j\omega})|^2 + 1}$$

Confrontando la precedente con la (2.7) si deduce che negli equalizzatori MMSE, a parità

di condizioni, il valore quadratico medio dell'errore di decisione è più basso del corrispondente errore che si verifica negli equalizzatori ZF e ciò è dovuto alla circostanza che le caratteristiche dell'equalizzatore MMSE sono determinate tenendo in conto il rumore introdotto dal canale di trasmissione.

Esempio E.2

Con riferimento all'Esempio E.1, dalla (3.4), tenendo conto delle (3.7), si ottiene:

$$H_o(z) = \frac{W_{aa}(z)Q^*(1/z^*)}{W_{aa}(z)Q(z)Q^*(1/z^*) + W_{nn}(z)}$$

che, se le sequenze a e n si suppongono costituite da elementi incorrelati e caratterizzati da varianze σ_a^2 e σ_n^2 rispettivamente per cui è $W_{aa}(z) = \sigma_a^2$ e $W_{nn}(z) = \sigma_n^2$, diventa

$$H_o(z) = \frac{\sigma_a^2 Q^*(1/z^*)}{\sigma_a^2 Q(z)Q^*(1/z^*) + \sigma_n^2}$$

Essendo d'altra parte $Q(z) = \frac{z}{z-\rho}$ e $Q^*(1/z^*) = \frac{1}{1-\rho z}$, si deduce l'espressione della funzione $H_o(z)$ in funzione del rapporto segnale rumore $\gamma = \sigma_a^2 / \sigma_n^2$:

$$H_o(z) = \gamma \frac{z-\rho}{-\rho z + (1+\gamma+\rho^2)z-\rho}$$

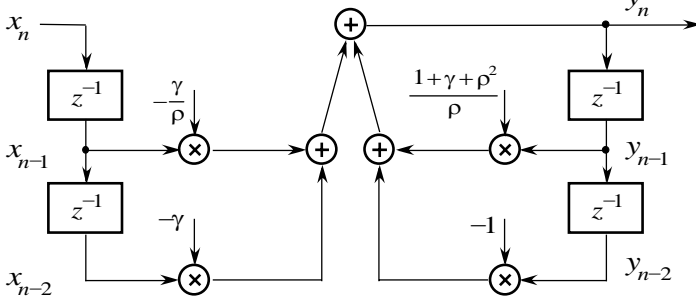


Fig. E.2

dalla quale si ottiene lo schema dell'equalizzatore riportato in Fig. E.2.

Il valore quadratico medio dell'errore di decisione vale:

$$\epsilon_o = \sigma_a^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+\rho^2)-2\rho \cos \omega}{(1+\rho^2+\gamma)-2\rho \cos \omega} d\omega$$

Per risolvere l'integrale si ponga $t = \tan \frac{\omega}{2}$. Si ha:

$$\cos \omega = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ e } d\omega = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \epsilon_o &= 2\sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\rho^2)-2\rho \frac{1-t^2}{1+t^2}}{(1+\rho^2+\gamma)-2\rho \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = 2\sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\rho^2)(1+t^2)-2\rho(1-t^2)}{[(1+\rho^2+\gamma)](1+t^2)-2\rho(1-t^2)} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= 2\sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-2\rho+\rho^2)+(1+2\rho+\rho^2)t^2}{(1-2\rho+\rho^2+\gamma)+(1+2\rho+\rho^2+\gamma)t^2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \end{aligned}$$

che ponendo:

$$\begin{aligned} \alpha &= (1-\rho)^2 & \beta &= (1+\rho)^2 \\ A &= (1-\rho)^2 + \gamma & B &= (1+\rho)^2 + \gamma \end{aligned}$$

diventa:

$$\epsilon_o = 2\sigma_a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha + \beta t^2}{(A + Bt^2)(1+t^2)} dt$$

Si osservi ora che si può scrivere:

$$\frac{\alpha + \beta t^2}{(A + Bt^2)(1+t^2)} = \frac{\alpha B - \beta A}{B - A} \frac{1}{A + Bt^2} - \frac{\alpha - \beta}{B - A} \frac{1}{1+t^2}$$

per cui è:

$$\epsilon_o = 2\sigma_a^2 \frac{\alpha B - \beta A}{B - A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{A + Bt^2} - 2\sigma_a^2 \frac{\alpha - \beta}{B - A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2\sigma_a^2 \frac{\alpha B - \beta A}{(B - A)A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 + \frac{B}{A}t^2} - 2\sigma_a^2 \frac{\alpha - \beta}{B - A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

Ponendo $x = t\sqrt{\frac{B}{A}}$ nel primo integrale si ha:

$$\varepsilon_o = 2\sigma_a^2 \left[\frac{\alpha B - \beta A}{(B - A)\sqrt{AB}} - \frac{\alpha - \beta}{B - A} \right]$$

Tenendo conto delle posizioni fatte, si ottiene infine:

$$\varepsilon_o = \sigma_a^2 \left[1 - \frac{2\gamma}{\sqrt{(1 + \rho^2 + \gamma)^2 - 4\rho^2}} \right]$$

4. - Equalizzatori a reazione.

Un ulteriore tipo di equalizzatore è costituito dall'equalizzatore a reazione detto anche equalizzatore **DFE** (**D**ecision-**F**eedback **E**qualizer) in quanto si utilizzano le decisioni sui simboli precedentemente trasmessi a quello attuale per attenuare l'interferenza di intersimbolo. Il segnale in arrivo al ricevitore può essere espresso nella forma:

$$(4.1) \quad x_k = a_k + i_k + n_k$$

in termini cioè del simbolo trasmesso a_k , del rumore di canale n_k e dell'interferenza di intersimbolo:

$$(4.2) \quad i_k = \sum_{\substack{i=-\infty \\ (i \neq k)}}^{\infty} q_i a_{k-i} = \sum_{i=-\infty}^{k-1} q_i a_{k-i} + \sum_{i=k+1}^{\infty} q_i a_{k-i}$$

Negli equalizzatori a reazione si effettua una stima dell'interferenza

$$(4.3) \quad \hat{i}_k = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \hat{a}_{k-i} = \sum_{i=0}^{\infty} h_i \hat{a}_{k-i} - \hat{a}_k * \delta_k$$

ottenuta elaborando i dati stimati \hat{a}_k mediante un filtro causale ($h_k = 0$ per $k < 0$) e monico ($h_0 = 1$) e tale stima è sottratta al segnale in arrivo per cui il segnale così ottenuto:

$$(4.4) \quad z_k = x_k - \hat{i}_k$$

può presentare una riduzione notevole dell'interferenza di intersimbolo.

È bene precisare che l'interferenza è completamente annullata se il canale di trasmissione si suppone causale $q_k = 0$ per $k < 0$ e monico ($q_0 = 1$) e si pone $h_k = q_k$. In caso contrario la stima \hat{i}_k può solo annullare la componente dell'ISI dovuta ai simboli precedenti quello attuale ma non può influenzare il valore della componente dovuta ai simboli successivi.

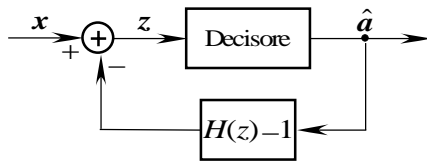


Fig. 4 - Equalizzatore a reazione

$$(4.5) \quad A(z) = X(z) - A(z)[H(z) - 1]$$

da cui:

$$(4.6) \quad A(z) = \frac{X(z)}{H(z)}$$

Si moltiplichino numeratore e denominatore della precedente per una funzione $U(z)$. Si ha:

$$(4.7) \quad A(z) = \frac{X(z)U(z)}{H(z)U(z)} = X(z) \frac{U(z)}{V(z)}$$

dove si è posto $U(z) = \frac{V(z)}{H(z)} = C(z)V(z)$. La (4.7) dà luogo allo schema del ricevitore riportato in

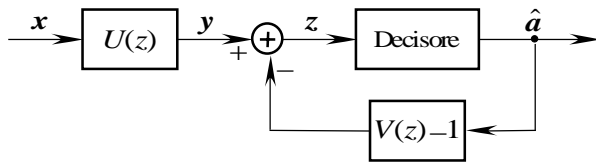


Fig. 5 – Equalizzatore a reazione con filtri forward e feedback.

Fig. 5. Tale schema comporta la presenza di due filtri:

- il filtro forward $U(z)$
- il filtro feedback $V(z)$

che introducono due gradi di libertà nella determinazione dei parametri

dell'equalizzatore DFE.

Lo schema completo del sistema di trasmissione con equalizzatore di tipo DFE è composto come è indicato in Fig. 6. Se il filtro $V(z)$ si suppone causale (con risposta impulsiva v tale che $v_k = 0$ per $k < 0$) e monico ($v_0 = 1$), la sequenza in ingresso al decisore è:

$$(4.8) \quad z = y - w$$

con:

$$(4.9) \quad w = \hat{a} * (v - \delta)$$

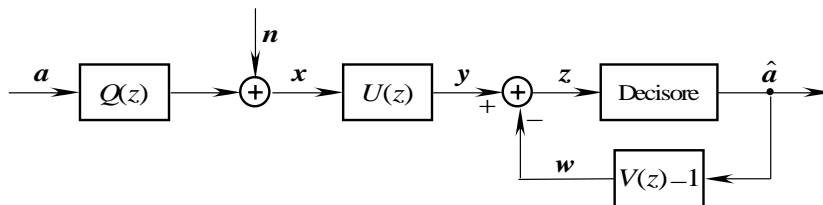


Fig.6 – Equalizzatore a reazione.

Denotando con u la risposta impulsiva del filtro $U(z)$, introducendo la (4.9) nella (4.8) e tenendo conto che è $y = (a * q + n) * u$, si ottiene:

$$(4.10) \quad z = (a * q + n) * u - \hat{a} * (v - \delta)$$

che, se la decisione si suppone esatta, si riduce alla:

$$(4.11) \quad z = a * (q * u - v) + v * u + a$$

e quindi la sequenza errore:

$$(4.12) \quad e = z - a = a * (q * u - v) + n * u$$

che, essendo $u = c * v$, assume la forma:

$$(4.13) \quad e = a * (q * c * v - v) + n * c * v = [(a * q * c - a * \delta) + n * c] * v = [a * (q * c - \delta) + n * c] * v$$

La (4.13) dà luogo allo schema di Fig. 7.

Dal confronto dello schema di Fig. 7 con quello di Fig. 3, è evidente che nell'equalizzatore a reazione si registra la presenza del filtro $V(z)$ che può essere utilmente impiegato per ridurre il valore quadratico medio dell'errore di decisione; così facendo le prestazioni dell'equalizzatore a reazione sono quindi migliori di quelle degli equalizzatori MMSE.

Riassumendo, per determinare le caratteristiche dell'equalizzatore a reazione si può procedere come segue:

- si determina la caratteristica $C(z)$ imponendo che e raggiunga la condizione di otti-

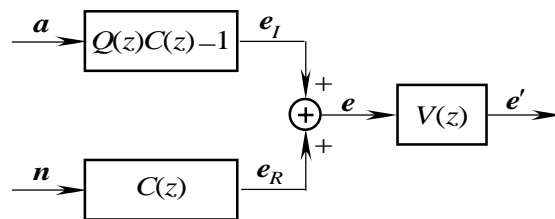


Fig.7 – Errore di decisione per equalizzatori a reazione.

mo;

- b) una volta individuata la caratteristica $C(z)$ si determina il valore ottimo del filtro $V(z)$ imponendo che il valore quadratico medio della sequenza di errore e' sia minima.

- c) si determini infine il valore del filtro forward essendo $U(z) = C(z)V(z)$.

Occorre infine precisare che il filtro $C(z)$ può, a sua volta, essere individuato con le seguenti procedure:

- a) imponendo che sia nulla l'interferenza di intersimbolo (equalizzatori **DFE ZF**);
 b) imponendo che sia minimo il valore quadratico medio della sequenza errore e_k (equalizzatori **DFE MMSE**).

4.1 - Equalizzatori DFE ZF.

Con riferimento alla Fig. 7, l'annullamento dell'interferenza di intersimbolo si ottiene se è:

$$(4.14) \quad C_o(z) = \frac{1}{Q(z)}$$

per cui il valore ottimo del filtro $U(z)$ vale:

$$(4.15) \quad U_o(z) = \frac{V(z)}{Q(z)}$$

La sequenza e , essendo $e_l = 0$, diventa:

$$(4.16) \quad e = n * c_o$$

alla quale corrisponde la densità spettrale che, espressa nel dominio della variabile zeta, vale:

$$(4.17) \quad W_{ee}(z) = W_{nn}(z)C_o(z)C_o^*(1/z^*) = \frac{\sigma_n^2}{Q(z)Q^*(1/z^*)}$$

avendo supposto la sequenza di rumore stazionaria e costituita da elementi incorrelati e caratterizzati dalla varianza σ_n^2 .

4.2 - Equalizzatori DFE MMSE.

Per determinare il valore ottimo del filtro $C(z)$ nel caso di equalizzatori DFE MMSE basta osservare che la caratteristica ottima del filtro $C(z)$ è la stessa di quella ottenuta nel par. 3.

Si ha pertanto:

$$(4.18) \quad C_o(z) = \frac{W_{aa}(z)Q^*(1/z^*)}{W_{aa}(z)Q(z)Q^*(1/z^*) + W_{nn}(z)}$$

per cui il filtro $U(z)$ diventa:

$$(4.19) \quad U_o(z) = \frac{W_{aa}(z)Q^*(1/z^*)V(z)}{W_{aa}(z)Q(z)Q^*(1/z^*) + W_{nn}(z)}$$

La densità spettrale della sequenza e , data dalla (3.10), è:

$$(4.20) \quad W_{ee}(z) = \frac{W_{aa}(z)W_{nn}(z)}{W_{aa}(z)Q(z)Q^*(1/z^*) + W_{nn}(z)}$$

che, se è $W_{aa}(z) = \sigma_a^2$ e $W_{nn}(z) = \sigma_n^2$ diventa:

$$(4.21) \quad W_{ee}(z) = \frac{\sigma_n^2}{Q(z)Q^*(1/z^*) + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2}}$$

Dal confronto della (4.17) con la (4.21) si deduce che, nel caso di equalizzatori DFE, la

densità spettrale della sequenza e può essere espressa nella forma:

$$(4.22) \quad W_{ee}(z) = \frac{\sigma_n^2}{F(z)}$$

in cui

$$(4.23) \quad F(z) = \begin{cases} Q(z)Q^*(1/z^*) & \text{per equalizzatori DFE ZF} \\ Q(z)Q^*(1/z^*) + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2} & \text{per equalizzatori DFE MMSE} \end{cases}$$

Dalle (4.23) è evidente che la funzione $F(e^{j\omega})$ presenta le caratteristiche di una densità spettrale di un'opportuna sequenza f ; questo comporta che la trasformata zeta $F(z)$ di detta sequenza, può essere fattorizzata come segue (v. Appendice B. *Fattorizzazione spettrale*):

$$(4.24) \quad F(z) = k \cdot M(z)M^*(1/z^*)$$

dove

- k è una quantità reale e positiva;
- $M(z)$ è una funzione causale, monica e stabile (questo comporta che i suoi zeri e poli sono contenuti nel circolo unitario del piano z);
- $M^*(1/z^*)$ è una funzione anticausale, monica (questo comporta che i suoi zeri e poli sono esterni al circolo unitario del piano z).

Con riferimento alla Fig. 7, la sequenza errore e_k presenta una densità spettrale, definita nel dominio della variabile z , data dalla:

$$(4.25) \quad W_{e'e'}(z) = W_{ee}(z)V(z)V^*(1/z^*) = \frac{\sigma_n^2}{k} \frac{V(z)}{M(z)} \cdot \frac{V^*(1/z^*)}{M^*(1/z^*)}$$

Poiché si è supposto che il filtro $V(z)$ è causale, monico, la funzione $G(z) = \frac{V(z)}{M(z)}$ caratterizza

un filtro causale e monico e pertanto può essere espressa nella forma $G(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} g_k z^{-k}$.

Il valore quadratico medio della sequenza errore e'_k vale:

$$(4.26) \quad E\{|e'_k|^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_{ee}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_n^2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{V(e^{j\omega})}{M(e^{j\omega})} \right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_n^2}{k} \int_{-\pi}^{\pi} |G(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

che applicando il teorema di Parseval si può scrivere come segue:

$$(4.27) \quad E\{|e'_k|^2\} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_n^2}{\gamma} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} |g_k|^2 \right)$$

dalla quale si evince che il valore minimo di $E\{|e'_k|^2\}$ si raggiunge quando è $g_k = 0$ (per $k \geq 2$)

e cioè quando è $G(z) = 1$. Il valore ottimo del filtro $V(z)$ è quindi:

$$(4.28) \quad V_o(z) = M(z)$$

Tenendo conto della (4.28) le (4.15) e (4.19) diventano

$$(4.29) \quad U_o(z) = \begin{cases} \frac{M(z)}{Q(z)} & \text{per equalizzatori DFE- ZF} \\ \frac{W_{aa}(z)M(z)Q^*(1/z^*)}{W_{aa}(z)Q(z)Q^*(1/z^*) + W_{nn}(z)} & \text{per equalizzatori DFE- MMSE} \end{cases}$$

Se è $W_{aa}(e^{j\omega}) = \sigma_a^2$ e $W_{nn}(e^{j\omega}) = \sigma_n^2$ le precedenti si riducono alle:

$$(4.30) \quad U_o(z) = \begin{cases} \frac{M(z)}{Q(z)} & \text{per equalizzatori DFE-ZF} \\ \frac{\sigma_a^2 M(z) Q^*(1/z^*)}{\sigma_a^2 Q(z) Q^*(1/z^*) + \sigma_n^2} & \text{per equalizzatori DFE-MMSE} \end{cases}$$

In tali condizioni si ha:

$$(4.31) \quad E\{|e'_k|^2\} = \frac{\sigma_n^2}{k}$$

È da tener presente che se $Q(z)$ è causale ($q_n \equiv 0$ per $n < 0$), si ha:

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^{-n} = q_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{q_0} z^{-n}$$

$$Q^*(1/z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^* z^n = q_0^* \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q_n}{q_0}\right)^* z^n$$

per cui nel caso di equalizzatori DFE-ZF è

$$(4.32) \quad F(z) = |q_0|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{q_0} z^{-n} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q_n}{q_0}\right)^* z^n$$

Si ha:

$$(4.33) \quad M(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{q_0} z^{-n} = \frac{Q(z)}{q_0} \quad k = |q_0|^2$$

Esempio E.3

Con riferimento all'esempio E.1 per determinare le caratteristiche di equalizzatori DFE di tipo FF o MMSE è necessario calcolare le funzioni $V_o(z)$ e $U_o(z)$; a tal fine occorre effettuare la scomposizione spettrale della funzione $F(z)$, che osservando che è $Q(z) = z/(z-\rho)$ diviene:

$$F(z) = \begin{cases} \frac{z}{(z-\rho)(1-\rho z)} & \text{per equalizzatori DFE-ZF} \\ \frac{z}{(z-\rho)(1-\rho z)} + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2} & \text{per equalizzatori DFE-MMSE} \end{cases}$$

Equalizzatori DFE-ZF

La funzione $F(z)$ presenta due poli di valore ρ e $1/\rho$ e uno zero all'origine. Essendo $\rho < 1$, la funzione $M(z)$ deve contenere il polo di valore ρ e lo zero all'origine; di conseguenza $M^*(1/z^*)$ deve contenere il polo di valore $1/\rho$. Poiché entrambe tali funzioni devono essere moniche, si ha:

$$M(z) = \frac{z}{z-\rho} = \frac{1}{1-\rho z^{-1}} \quad M^*(1/z^*) = \frac{1}{1-\rho z}$$

con $k = 1$. È allora $V_o(z) = M(z) = \frac{z}{z-\rho}$ e $U_o(z) = 1$. Il valore quadratico medio dell'errore di decisione vale $E\{|e'_k|^2\} = \sigma_n^2$.

Equalizzatori DFE-MMSE

In tal caso la funzione $F(z)$ diventa:

$$F(z) = \frac{z}{(z-\rho)(1-\rho z)} + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2} = \frac{-\rho z^2 + (\rho^2 + \gamma + 1)z - \rho}{\gamma(z-\rho)(1-\rho z)} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

essendo $\gamma = \sigma_a^2 / \sigma_n^2$ il rapporto segnale rumore.

Detti ξ (con $\xi < 1$) e $1/\xi$ le radici del trinomio $N(z)$ a numeratore ⁽¹⁾ si può scrivere:

⁽¹⁾ Se z_1 e z_2 denotano gli zeri del polinomio $N(z)$ dalla condizione $z_1 z_2 = 1$ discende $z_1 = z_2^{-1}$

$$N(z) = -\rho(z - \xi)(z - \xi^{-1}) \quad D(z) = -\gamma\rho(z - \rho)(z - \rho^{-1})$$

per cui risulta:

$$F(z) = \frac{(z - \xi)(z - \xi^{-1})}{\gamma(z - \rho)(z - \rho^{-1})} = \frac{1}{\gamma} \frac{z - \xi}{z - \rho} \frac{z - \xi^{-1}}{z - \rho^{-1}}$$

Si ha allora

$$M(z) = \frac{z - \xi}{z - \rho} \quad M^*(1/z^*) = \frac{z - \xi^{-1}}{z - \rho^{-1}} \quad k = \frac{1}{\gamma}$$

Il valore quadratico medio dell'errore di decisione vale:

$$E\{|e_k|^2\} = \gamma\sigma_n^2 = \sigma_a^2$$

5 - La precodifica di Tomlinson - Harashima.

Come osservato in precedenza, il segnale in arrivo al ricevitore può essere posto nella forma:

$$(5.1) \quad y_k = a_k + i_k + n_k$$

dove i_k rappresenta l'ammontare dell'interferenza di intersimbolo prodotta dal canale di trasmissione. Negli equalizzatori a reazione si effettua una stima di tale interferenza

$\hat{i}_k = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \hat{a}_{k-i}$ ottenuta sulla base dei dati \hat{a}_k rivelati. Tale stima, sottratta al segnale in uscita dal filtro $U(z)$ costituisce il segnale $z_k = y_k - \hat{i}_k$ che interviene nel decisore. Se la decisione si suppone senza errori e il segnale in uscita dal filtro di reazione riesce a compensare esattamente l'interferenza di intersimbolo, il segnale in ingresso al decisore vale $z_k = a_k + n_k$ ottenendosi così una perfetta cancellazione dell'ISI. A rigor di termini, l'interferenza di intersimbolo $i_k = \sum_{i=0}^{\infty} a_{k-i} q_i$ è annullata dalla stima \hat{i}_k solo se il canale è causale e se si adotta un'equalizzazione del tipo ZF per modo che sia $q_k = v_k$. In caso contrario la stima \hat{i}_k riesce solo ad attenuare la componente dell'ISI dovuta ai simboli precedenti al dato attuale ma non a quelli successivi.

È da osservare che, anche se si riuscisse ad eliminare completamente l'interferenza, se si commette un errore nella decisione del simbolo trasmesso, la stima dell'ISI non è più corretta e ciò potrebbe comportare un errore nella rivelazione del simbolo successivo. In altri termini, l'errore potrebbe propagarsi; la sequenza dei dati rivelati potrebbe contenere un *burst* di simboli errati.

È da osservare che, anche se si riuscisse ad eliminare completamente l'interferenza, se si commette un errore nella decisione del simbolo trasmesso, la stima dell'ISI non è più corretta e ciò potrebbe comportare un errore nella rivelazione del simbolo successivo. In altri termini, l'errore potrebbe propagarsi; la sequenza dei dati rivelati potrebbe contenere un *burst* di simboli errati.

Per sopperire a tale inconveniente si può trasferire la sezione a reazione di un ricevitore che impiega un equalizzatore DFE nel trasmettitore. Si tratta di disporre al trasmettitore un dispositivo, detto *predittore*, che genera una predizione dell'ISI che è utilizzata per correggere il simbolo attuale. È evidente che un tale metodo è applicabile solo se il trasmettitore conosce esattamente la caratteristica del canale di trasmissione.

Facendo riferimento a segnalazioni PAM M -arie, lo schema del predittore (**predittore di Tomlinson - Harashima**) si presenta come è indicato in Fig. 8.

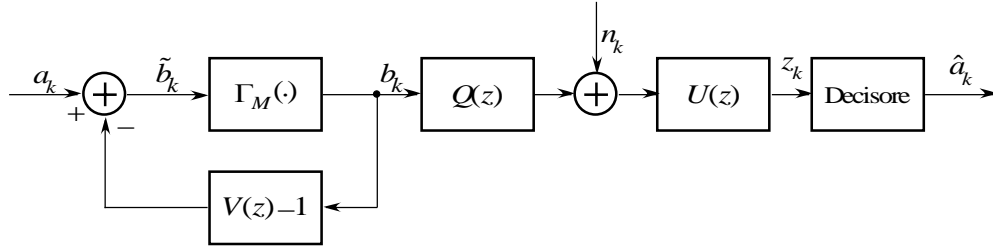


Fig. 8 - Schema di un equalizzatore con predittore TH.

Tralasciando per il momento il blocco non lineare, la sequenza in uscita dal predittore è ($\tilde{b}_k = b_k$):

$$(5.2) \quad B(z) = A(z) - [V(z) - 1]B(z)$$

da cui

$$(5.3) \quad B(z) = \frac{A(z)}{V(z)}$$

e quindi il segnale all'ingresso del decisore, in assenza di rumore di canale, vale:

$$(5.4) \quad Z(z) = B(z)Q(z)U(z) = A(z)Q(z)\frac{U(z)}{V(z)} = A(z)Q(z)C(z)$$

Ad esempio, nel caso di equalizzatori ZF essendo $C(z) = Q^{-1}(z)$ la precedente diviene:

$$(5.5) \quad Z(z) = A(z)$$

L'interferenza di intersimbolo presente nel segnale in arrivo è stata così eliminata.

Ritornando allo schema del predittore riportato in Fig. 8 è facile riconoscere che il simbolo \tilde{b}_k del predittore può risultare di valore notevole a causa del termine $\sum_{i \neq 0} b_i v_{k-i}$. potrebbe Ciò comportare un eccessivo incremento della potenza in uscita dal predittore. Per eliminare tale inconveniente si introduce nel predittore in blocco non lineare $\Gamma_M(\cdot)$ che produca la riduzione mod $2M$ del simbolo presente al suo ingresso. In altri termini, detto a il valore del simbolo presente all'ingresso del blocco in questione, l'uscita c dal dispositivo $\Gamma_M(\cdot)$ è tale che risulta:

$$(5.6) \quad a = c + 2M \cdot i$$

dove $i \in \mathbb{Z}$ e $c \in [-M, M)$.

Ad esempio con $M = 4$, al valore $a = 19,4$ corrisponde $c = 3,4$ e $i = 2$ essendo manifestamente $19,4 = 3,4 + 2 \cdot 4 \cdot 2$.

In tali condizioni la sequenza in uscita dal predittore può essere scritta come segue:

$$(5.7) \quad B(z) = \tilde{B}(z) - 2M \cdot I(z) = A(z) - B(z)[V(z) - 1] - 2M \cdot I(z)$$

che da luogo alla:

$$(5.8) \quad B(z) = \frac{1}{V(z)} [A(z) - 2M \cdot I(z)]$$

In assenza di rumore di canale il segnale in ingresso al decisore vale:

$$(5.9) \quad Z(z) = B(z)Q(z)U(z) = [A(z) - 2M \cdot I(z)]Q(z)\frac{U(z)}{V(z)}$$

che, nel caso di equalizzatori ZF diviene:

$$(5.10) \quad Z(z) = A(z) - 2M \cdot I(z)$$

e cioè

$$(5.11) \quad z_k = a_k - 2M \cdot i_k$$

Il dato trasmesso a_k può cos' essere dedotto da a_k operando prima decisione una riduzione mod $2M$ del segnale in arrivo.

EQUALIZZATORI CONFORMATI SECONDO FILTRI FIR

6 – Equalizzatori a spaziatura intera.

Nella maggior parte dei casi gli equalizzatori sono conformati con filtri a risposta impulsiva finita (FIR) che sono presi in considerazione in questa sezione.

Il segnale in uscita da un equalizzatore costituito da un filtro FIR è dato dalla:

$$(6.1) \quad y_k = \sum_{i=0}^N c_i^* x_{k-i}$$

essendo $\{c_n^*\}_{n=0}^N$ un insieme di $N+1$ coefficienti (in generale complessi) che costituiscono i parametri dell'equalizzatore. L'elemento base dell'equalizzatore lineare è costituito da un **filtro numerico trasversale** la cui struttura si presenta come è indicato in Fig. 9. La quantità y_k è inviata ad un decisore che prende una decisione simbolo per simbolo.

Il filtro numerico trasversale è composto da N celle di ritardo connesse in cascata; i campioni prelevati all'ingresso del filtro e all'uscita di ogni cella sono moltiplicati per i coefficienti $\{c_i^*\}_{i=0}^N$ e inviati al sommatore in uscita. La quantità N rappresenta la *lunghezza* dell'equalizzatore.

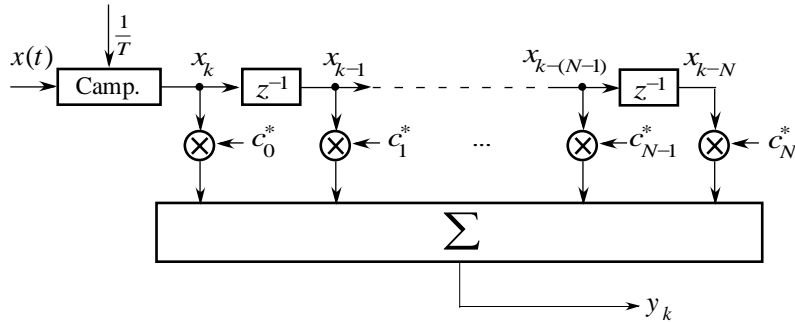


Fig. 9 – Filtro numerico trasversale

È opportuno osservare che, di norma, l'impulso di segnalazione $q(t)$ tende a zero per $t \rightarrow +\infty$; ciò significa che è possibile individuare un intero L tale che, per $t \geq (L+1)T$ si abbia $q(t) \equiv 0$. Inoltre l'impulso di segnalazione è causale per cui risulta $q(t) \equiv 0$ per $t < 0$. Da queste considerazioni si deduce che la (1.2) contiene un numero finito di termini e cioè diventa:

$$(6.2) \quad x(kT) = \sum_{n=k}^{k-L} a_n q[(k-n)T] + n(kT) = \sum_{n=0}^L a_{k-n} q(nT) + n(kT)$$

per cui il generico campione del segnale all'ingresso dell'equalizzatore è:

$$(6.3) \quad x_k = \sum_{n=0}^L a_{k-n} q_n + n_k$$

Gli $N+1$ campioni di $x(t)$ che intervengono nella determinazione della variabile di decisione si possono rappresentare mediante il vettore:

$$(6.4) \quad \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-N} \end{bmatrix}$$

il cui generico componente, sulla base della (6.3), si può porre nella seguente forma matriciale:

$$(6.5) \quad x_{k-i} = [q_0 \quad q_1 \quad \cdots \quad q_L] \begin{bmatrix} a_{k-i} \\ a_{k-i-1} \\ \vdots \\ a_{k-i-L} \end{bmatrix} + n_{k-i} \quad 0 \leq i \leq N$$

Si ha dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \begin{bmatrix} [q_0 \quad q_1 \quad \cdots \quad q_L] \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-L} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ [q_0 \quad q_1 \quad \cdots \quad q_L] \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \vdots \\ a_{k-L-1} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ [q_0 \quad q_1 \quad \cdots \quad q_L] \begin{bmatrix} a_{k-N} \\ a_{k-1-N} \\ \vdots \\ a_{k-L-N} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_k \\ n_{k-1} \\ \vdots \\ n_{k-N} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \cdots & q_L & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0 & q_1 & \cdots & q_L & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & q_0 & q_1 & \cdots & q_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-L-N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_k \\ n_{k-1} \\ \vdots \\ n_{k-N} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ovvero

$$(6.6) \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{n}_k$$

essendo:

$$(6.7) \quad \mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} a_k \\ \vdots \\ a_{k-L} \\ \vdots \\ a_{k-N-L} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{n}_k = \begin{bmatrix} n_k \\ n_{k-1} \\ \vdots \\ n_{k-N} \end{bmatrix}$$

due vettori di dimensioni $N+L+1$ e $N+1$ rispettivamente e \mathbf{Q} una matrice di dimensioni $(N+1) \times (N+L+1)$ definita dalla:

$$(6.8) \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \cdots & q_L & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0 & q_1 & \cdots & q_L & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & q_0 & q_1 & \cdots & q_L \end{bmatrix}$$

Si noti che tutte le righe della matrice \mathbf{Q} contengono gli stessi elementi, ma sono sfalsati in avanti di un posto quando dalla riga i -esima si passa alla riga successiva.

Se si denota con

$$(6.9) \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}$$

il vettore dei pesi di $N+1$ dimensioni, l'uscita dell'equalizzatore lineare, tenendo conto delle (6.1) e (6.6), vale:

$$(6.10) \quad y_k = \mathbf{c}^H \cdot \mathbf{x}_k = \mathbf{c}^H \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{n}_k) = \mathbf{c}^H \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k + w_k$$

dove l'apice H denota la trasposta coniugata (hermitiana) e si è posto:

$$(6.11) \quad w_k = \mathbf{c}^H \mathbf{n}_k$$

È bene mettere in evidenza che il filtro numerico trasversale altera il rumore introdotto dal canale. Così, ad esempio, se la sequenza $\{\mathbf{n}_k\}$ si può ritenere stazionaria, incorrelata, a media nulla e varianza σ_n^2 , l'autocorrelazione della sequenza $\{w_k\}$ vale:

$$(6.12) \quad R_w(k) = E\{w_l w_{l+k}^*\} = E\{\mathbf{c}^H \mathbf{n}_k \mathbf{n}_{l+k}^H \mathbf{c}\} = \mathbf{c}^H \cdot E\{\mathbf{n}_k \mathbf{n}_{l+k}^H\} \cdot \mathbf{c} = \sigma_n^2 \mathbf{c}^H \mathbf{I} \mathbf{c} = \sigma_n^2 \mathbf{c}^H \mathbf{c}$$

essendo \mathbf{I} la matrice unitaria di ordine $2N+1$.

7 – Equalizzatori a spaziatura frazionata.

Il modello descritto nel precedente paragrafo si presta a rappresentare i cosiddetti equalizzatori a spaziatura frazionata che usano un campionamento con una velocità r volte maggiore di quella usata dagli equalizzatori a spaziatura intera. Normalmente r , che si denota *fattore di sovra-campionamento* è un intero. Tale struttura migliora le prestazioni dell'equalizzatore seppur ne aumenta la complessità. In un tale tipo di equalizzatore i valori campionati possono essere descritti da elementi del tipo $x\left(kT + \frac{m}{r}T\right)$ con $m \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ e $k \in \mathbb{N}$. È pertanto, per ogni k :

$$(7.1) \quad x\left(kT + \frac{m}{r}T\right) = \sum_{n=0}^L a_{k-n} q\left(nT + \frac{m}{r}T\right) + n\left(kT + \frac{m}{r}T\right) \quad m \in \{0, 1, \dots, r-1\}$$

Se si introducono i vettori

$$(7.2) \quad \mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x(kT) \\ x\left(kT + \frac{1}{r}T\right) \\ \vdots \\ x\left(kT + \frac{r-1}{r}T\right) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} q(kT) \\ q\left(kT + \frac{1}{r}T\right) \\ \vdots \\ q\left(kT + \frac{r-1}{r}T\right) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n}_k = \begin{bmatrix} n(kT) \\ n\left(kT + \frac{1}{r}T\right) \\ \vdots \\ n\left(kT + \frac{r-1}{r}T\right) \end{bmatrix}$$

la (7.1) si può porre nella forma:

$$(7.3) \quad \mathbf{x}_k = \sum_{n=0}^L a_{k-n} \mathbf{q}_n + \mathbf{n}_k \quad k \in \mathbb{N}$$

Si supponga che l'equalizzatore utilizzi un blocco di $N+1$ simboli \mathbf{x}_k , ciascuno dei quali composto da r campioni. Il vettore definito dall'insieme degli $N+1$ simboli \mathbf{x}_k vale:

$$(7.4) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k-N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^L a_{k-n} \mathbf{q}_n \\ \sum_{n=0}^L a_{k-1-n} \mathbf{q}_n \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^L a_{k-N-n} \mathbf{q}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_k \\ \mathbf{n}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{k-N} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 & \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_L & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}_0 & \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_L & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{q}_0 & \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-L} \\ \vdots \\ a_{k-N-L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_k \\ \mathbf{n}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{k-N} \end{bmatrix}$$

in cui si è denotato con $\mathbf{0}$ un vettore di tutti zeri di r dimensioni. Con le notazioni:

$$(7.5) \quad \bar{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{k-N} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{Q}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 & \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_L & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}_0 & \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_L & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{q}_0 & \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_L \end{bmatrix}; \quad \mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ \vdots \\ a_{k-L} \\ \vdots \\ a_{k-N-L} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{n}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_k \\ \mathbf{n}_{k-1} \\ \vdots \\ \mathbf{n}_{k-N} \end{bmatrix}$$

la precedente diviene:

$$(7.6) \quad \bar{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{Q}}_k \cdot \mathbf{a}_k + \bar{\mathbf{n}}_k$$

Nella (7.6) i vettori $\bar{\mathbf{x}}_k$ e $\bar{\mathbf{n}}_k$ hanno Nr dimensioni, il vettore \mathbf{a}_k è di $N+L$ dimensioni e la matrice $\bar{\mathbf{Q}}_k$ è del tipo $(Nr \times (N+L))$. Un equalizzatore a lunghezza frazionata presenta una lunghezza pari a Nr .

Le considerazioni svolte a proposito degli equalizzatori a spaziatura intera possono essere estesi anche a quelli a spaziatura frazionata purché si sostituiscano alle quantità \mathbf{x}_k , \mathbf{Q}_k e \mathbf{n}_k le corrispondenti grandezze $\bar{\mathbf{x}}_k$, $\bar{\mathbf{Q}}_k$ e $\bar{\mathbf{n}}_k$.

8 - Equalizzatori del tipo zero forcing.

Esplicitando la (6.10) si ha:

$$(8.1) \quad y_k = \sum_{i=0}^{L+N} (c^H \mathbf{Q})_i a_{k-i} + w_k$$

dove $(c^H \mathbf{Q})_i$ rappresenta l' i -esimo elemento del vettore riga $c^H \mathbf{Q}$. Lo scopo dell'equalizzatore consiste nel far sì che il campione y_k all'uscita dell'equalizzatore riproduca il corrispondente dato inviato dal trasmettitore. Se $D \cdot T$ è il ritardo di propagazione, al simbolo y_k corrisponde il dato inviato a_{k-D} . È bene ricordare che, nel caso di equalizzatori ZF, l'eliminazione dell'interferenza di intersimbolo si ottiene senza tener conto della presenza del rumore. Ciò comporta che, se si ammette di mantenere finita la quantità $(c^H \mathbf{Q})_{D+1}$, la sequenza dei pesi $\{c_n\}_{n=0}^N$ dovrà essere scelta in modo tale da realizzare le condizioni:

$$(8.2) \quad \begin{aligned} (c^H \mathbf{Q})_{D+1} &= 1 \\ (c^H \mathbf{Q})_i &= 0 \quad (i \neq D+1) \end{aligned}$$

Le (8.2), indicando con \mathbf{u}_D il vettore

$$(8.3) \quad \mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{posto } D+1$$

di $N+L+1$ dimensioni, possono essere riscritte sinteticamente nel seguente modo:

$$(8.4) \quad \mathbf{c}^H \mathbf{Q} = \mathbf{u}_D^H$$

essendo manifestamente $\mathbf{u}^H = \mathbf{u}^T$. Prendendo il coniugato trasposto della precedente si ha:

$$(8.5) \quad \mathbf{Q}^H \mathbf{c} = \mathbf{u}_D$$

Il sistema (8.5) contiene, in generale, un numero di equazioni diverse dal numero delle incognite per cui una soluzione unica può essere ottenuta solo se si determina quel valore del vettore \mathbf{c} che rende minima la norma del vettore $\mathbf{Q}^H \mathbf{c} - \mathbf{u}_D$ e cioè:

$$(8.6) \quad \mathbf{c}_o = \arg \min_c \left[\left\| \mathbf{Q}^H \mathbf{c} - \mathbf{u}_D \right\|^2 \right]$$

In altri termini il vettore \mathbf{c}_o si ottiene imponendo che in corrispondenza ad esso si annulli il gradiente della funzione obiettivo:

$$(8.7) \quad \begin{aligned} J(\mathbf{c}) &\equiv \left\| \mathbf{Q}^H \mathbf{c} - \mathbf{u}_D \right\|^2 = (\mathbf{Q}^H \mathbf{c} - \mathbf{u}_D)^H (\mathbf{Q}^H \mathbf{c} - \mathbf{u}_D) = (\mathbf{c}^H \mathbf{Q} - \mathbf{u}_D^H) (\mathbf{Q}^H \mathbf{c} - \mathbf{u}_D) = \\ &= \mathbf{c}^H \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H \mathbf{c} - \mathbf{c}^H \mathbf{Q} \mathbf{u}_D - \mathbf{u}_D^H \mathbf{Q}^H \mathbf{c} + \mathbf{u}_D^H \mathbf{u}_D = \\ &= \mathbf{c}^H \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H \mathbf{c} - \mathbf{c}^H \mathbf{Q} \mathbf{u}_D - \mathbf{u}_D^H \mathbf{Q}^H \mathbf{c} + 1 \end{aligned}$$

che costituisce una forma quadratica nelle quantità complesse $c_i = c'_i + jc''_i$. Come è noto (v. Appendice C) il gradiente della funzione $J(\mathbf{c})$ è:

$$(8.8) \quad \text{grad} \{J(\mathbf{c})\} = 2(\mathbf{Q} \mathbf{Q}^H \mathbf{c} - \mathbf{Q} \mathbf{u}_D)$$

e quindi:

$$(8.9) \quad \mathbf{c}_o = (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^H)^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{u}_D$$

È interessante osservare che poiché \mathbf{Q} non è una matrice quadrata non esiste l'inversa \mathbf{Q}^{-1} ; cosicché dalla (8.8) non si può dedurre $\mathbf{c}_o = (\mathbf{Q}^H)^{-1} \mathbf{u}_D$.

Il valore minimo della funzione obiettivo vale:

$$(8.10) \quad J_{\min} \equiv J(\mathbf{c}_o) = \mathbf{c}_o^H \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H \mathbf{c}_o - \mathbf{c}_o^H \mathbf{Q} \mathbf{u}_D - \mathbf{u}_D^H \mathbf{Q}^H \mathbf{c}_o + 1$$

che, tenendo conto della (8.9), diventa:

$$(8.11) \quad \begin{aligned} J_{\min} &= \mathbf{u}_D^H \mathbf{Q}^H (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^H) (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^H)^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{u}_D - \mathbf{u}_D^H \mathbf{Q}^H (\mathbf{Q}^H \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{u}_D - \mathbf{u}_D^H \mathbf{Q}^H (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^H)^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{u}_D + 1 = \\ &= 1 - \mathbf{u}_D^H \mathbf{Q}^H (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^H)^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{u}_D \end{aligned}$$

che, ponendo $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^H (\mathbf{Q} \mathbf{Q}^H)^{-1} \mathbf{Q}$ diviene:

$$(8.12) \quad J_{\min} = 1 - \mathbf{u}_D^H \mathbf{M} \mathbf{u}_D = 1 - |m_{DD}|^2$$

Poiché J_{\min} dipende da D il valore ottimo del ritardo D si può determinare dall'indice dell'elemento massimo della diagonale principale della matrice \mathbf{M} .

Esempio E.1

Si determinino i valori dei pesi di un equalizzatore ZF con 2 celle di ritardo in un sistema di trasmissione numerica in banda base caratterizzato dall'impulso di segnalazione mostrato in Fig. E.1.

Dall'esame della Fig. E.1 si deduce che è $q(t) = 0$ per $t \geq 6T$ per

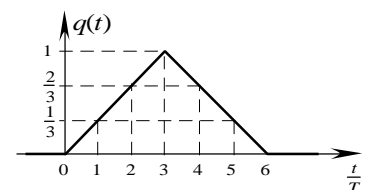


Fig. E.1

cui è $L = 5$. La matrice \mathbf{Q} ha dimensioni 3×8 e vale:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Poiché gli elementi della diagonale principale della matrice $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^H (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H)^{-1} \mathbf{Q}$ valgono

$$\frac{1}{117} [0 \quad 35 \quad 35 \quad 62 \quad 87 \quad 62 \quad 35 \quad 35]$$

il valore ottimo del ritardo vale $D = 3$ che corrisponde all'istante in cui la risposta $q(t)$ raggiunge il massimo. È $\mathbf{u}_D = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ e quindi il vettore il vettore \mathbf{c}_o , dato dalla (8.9), è:

$$\mathbf{c}_o = (\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H)^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{u}_D = \begin{bmatrix} \frac{31}{39} \\ -\frac{6}{13} \\ \frac{5}{39} \end{bmatrix}$$

Per valutare l'effetto dell'equalizzatore basta osservare che, in assenza di rumore, il segnale ricevuto, dato dalla (6.3) con $n_k = 0$, è:

$$x_k = \sum_{n=0}^3 a_{k-n} a_n = 0 \cdot a_k + \frac{1}{3} a_{k-1} + \frac{2}{3} a_{k-2} + a_{k-3} + \frac{2}{3} a_{k-4} + \frac{1}{3} a_{k-5} + 0 \cdot a_{k-6}$$

e di conseguenza l'interferenza:

$$i_k = x_k - a_{k-3} = \frac{1}{3} a_{k-1} + \frac{2}{3} a_{k-2} + \frac{2}{3} a_{k-4} + \frac{1}{3} a_{k-5}$$

L'interferenza è una grandezza aleatoria per cui per determinarne il peso è necessario calcolare il suo valore quadratico medio. Supponendo i dati $a_k \in \{-1, 1\}$ equiprobabili ed incorrelati, si ha:

$$E\{i_k^2\} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} = 1,1111$$

In presenza dell'equalizzatore, il segnale in uscita è dato dalla (6.10), che in assenza di rumore, diviene:

$$y_k = \mathbf{c}_o^H \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k = \frac{31}{117} a_{k-1} + \frac{44}{117} a_{k-2} + \frac{62}{117} a_{k-3} + \frac{18}{117} a_{k-4} + \frac{10}{117} a_{k-5} - \frac{8}{117} a_{k-6} + \frac{5}{117} a_{k-7}$$

Ad esso corrisponde l'interferenza d'intersimbolo data dalla:

$$i'_k = y_k - a_{k-3} = \frac{31}{117} a_{k-1} + \frac{44}{117} a_{k-2} + \frac{62}{117} a_{k-3} - \frac{55}{117} a_{k-4} + \frac{10}{117} a_{k-5} - \frac{8}{117} a_{k-6} + \frac{5}{117} a_{k-7}$$

il cui valore quadratico medio vale:

$$E\{i_k'^2\} = \frac{961}{13689} + \frac{1936}{13689} + \frac{3844}{13689} + \frac{3025}{13689} + \frac{100}{13689} + \frac{64}{13689} + \frac{25}{13689} = 0,727$$

È chiaramente $E\{i_k'^2\} < E\{i_k^2\}$.

9 - Equalizzatori di tipo MMSE.

Negli equalizzatori di tipo ZF l'equazione risolutiva (8.9), che consente di determinare i valori dei coefficienti del filtro numerico trasversale, è stata dedotta imponendo soltanto l'annullamento parziale dell'interferenza di intersimbolo; il segnale in uscita y_k è pertanto corrotto da un'interferenza residua dipendente dalla lunghezza finita dell'equalizzatore. Inoltre il procedimento adottato per la determinazione dei pesi non tiene conto del rumore introdotto dal mezzo di trasmissione. Per questi motivi, in particolari gravose condizioni, il comportamento di tali equalizzatori può non essere accettabile.

L'equalizzatore di tipo MMSE si basa sui campioni x_n del segnale ricevuto e determina il vettore dei pesi \mathbf{c} imponendo che il valore quadratico medio dell'errore fra il segnale in uscita y_k , dato dalla (6.10), e il corrispondente dato trasmesso a_{k-D} risulti minimo. Ciò equivale a dire che il dato a_{k-D} è stimato attraverso la quantità y_k e che il criterio di stima adottato è quello di rendere minimo l'errore quadratico medio. (Stima **MMSE Minimum Mean Square Error**).

In altri termini, detto e_k l'errore:

$$(9.1) \quad e_k = y_k - a_{k-D}$$

i pesi \mathbf{c} vengono determinati imponendo che la funzione obiettivo:

$$(9.2) \quad J(\mathbf{c}) = E \left\{ |y_k - a_{k-D}|^2 \right\}$$

risulti minima.

Tenendo conto della (6.10), la $J(\mathbf{c})$ diventa:

$$(9.3) \quad \begin{aligned} J(\mathbf{c}) &= E \left\{ (\mathbf{c}^H \mathbf{x}_k - a_{k-D}) (\mathbf{c}^H \mathbf{x}_k - a_{k-D})^H \right\} = \\ &= E \left\{ (\mathbf{c}^H \mathbf{x}_k - a_{k-D}) (\mathbf{x}_k^H \mathbf{c} - a_{k-D}^*) \right\} = \\ &= \mathbf{c}^H E \left\{ \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H \right\} \mathbf{c} - \mathbf{c}^H E \left\{ \mathbf{x}_k a_{k-D}^* \right\} - E \left\{ a_{k-D} \mathbf{x}_k^H \right\} \mathbf{c} + E \left\{ a_{k-D} a_{k-D}^* \right\} \end{aligned}$$

dalla quale si ottiene:

$$(9.4) \quad J(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^H \mathbf{R} \mathbf{c} - \mathbf{c}^H \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \mathbf{c} + \sigma_a^2$$

dove \mathbf{R} rappresenta la matrice delle autocorrelazioni dei campioni x_k

$$(9.5) \quad \mathbf{R} = E \left\{ \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^H \right\}$$

di dimensioni $(N+1) \times (N+1)$ e \mathbf{p} è il vettore:

$$(9.6) \quad \mathbf{p} = E \left\{ \mathbf{x}_k a_{k-D}^* \right\} = E \left\{ (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{n}_k) a_{k-D}^* \right\} = \mathbf{Q} E \left\{ \mathbf{a}_k a_{k-D}^* \right\} + E \left\{ \mathbf{n}_k a_{k-D}^* \right\}$$

di dimensioni $N+1$. Si noti che essendo $R_{ij} = R_{ji}^*$ è $\mathbf{R} = \mathbf{R}^H$ e cioè \mathbf{R} è una matrice hermitiana.

Il valore ottimo \mathbf{c}_o di \mathbf{c} si calcola imponendo che in corrispondenza ad esso si annulli il gradiente della funzione $J(\mathbf{c})$. Tenendo presente i risultati dell'Appendice C, si ha:

$$(9.7) \quad \text{grad} \{ J(\mathbf{c}) \} = 2(\mathbf{R} \mathbf{c} - \mathbf{p})$$

\mathbf{c}_o è ottenuta dalla soluzione dell'equazione:

$$(9.8) \quad \mathbf{R} \mathbf{c}_o = \mathbf{p}$$

nota come **equazione di Wiener-Hopf**.

Il valore minimo della funzione $J(\mathbf{c})$ vale:

$$(9.9) \quad \begin{aligned} J_{\min} &= \mathbf{c}_o^H \mathbf{R} \mathbf{c}_o - \mathbf{c}_o^H \mathbf{p} - \mathbf{p}^H \mathbf{c}_o + \sigma_a^2 = \mathbf{c}_o^H \mathbf{R} \mathbf{c}_o - \mathbf{c}_o^H \mathbf{R} \mathbf{c}_o - (\mathbf{R} \mathbf{c}_o)^H \mathbf{c}_o + \sigma_a^2 = \\ &= \sigma_a^2 - \mathbf{c}_o^H \mathbf{R} \mathbf{c}_o = \sigma_a^2 - \mathbf{c}_o^H \mathbf{R} \mathbf{c}_o \end{aligned}$$

Sottraendo la (9.9) dalla (9.4) e tenendo conto delle (9.8), è facile riconoscere che si ha:

$$(9.10) \quad J(\mathbf{c}) = J_{\min} + (\mathbf{c} - \mathbf{c}_o)^H \mathbf{R} (\mathbf{c} - \mathbf{c}_o)$$

Supponendo ancora che la sequenza dati sia stazionaria e composta da elementi a media nulla, incorrelati e caratterizzati da un valore quadratico medio pari a σ_a^2 , si ottiene:

$$(9.11) \quad \begin{aligned} \mathbf{R} &= E \left\{ (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{n}_k) (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{n}_k)^H \right\} = E \left\{ (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{n}_k) (\mathbf{a}_k^H \cdot \mathbf{Q}^H + \mathbf{n}_k^H) \right\} = \\ &= E \left\{ (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{n}_k) (\mathbf{a}_k^H \cdot \mathbf{Q}^H + \mathbf{n}_k^H) \right\} = \\ &= \mathbf{Q} E \left\{ \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H \right\} \mathbf{Q}^H + \mathbf{Q} E \left\{ \mathbf{a}_k \mathbf{n}_k^H \right\} + E \left\{ \mathbf{n}_k \mathbf{a}_k^H \right\} \mathbf{Q}^H + E \left\{ \mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^H \right\} = \\ &= \sigma_a^2 \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \end{aligned}$$

dove, si è supposto che la sequenza del rumore sia composta da elementi a media nulla, incorrelati, a varianza σ_n^2 ed indipendenti dagli elementi della sequenza dati.

Il vettore \mathbf{p} vale:

$$(9.12) \quad \mathbf{p} = E \left\{ (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{n}_k) a_{k-D}^* \right\} = \mathbf{Q} \cdot E \left\{ \mathbf{a}_k a_{k-D}^* \right\} + E \left\{ \mathbf{n}_k a_{k-D}^* \right\}$$

che essendo $a_{k-D}^* = a_k^H u_D$, assume la forma

$$(9.13) \quad \mathbf{p} = \sigma_a^2 \mathbf{Q} \mathbf{u}_D$$

Il vettore dei pesi ottimi vale allora:

$$(9.14) \quad \mathbf{c}_o = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} = \left(\mathbf{Q} \mathbf{Q}^H + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{u}_D$$

Sostituendo la (9.14) nella (9.9) e tenendo conto della (9.13) si ottiene:

$$(9.15) \quad J_{\min} = \sigma_a^2 - \mathbf{c}_o^H \mathbf{R} \mathbf{c}_o = \sigma_a^2 - \mathbf{p}^H (\mathbf{R}^H)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p} = \sigma_a^2 - \mathbf{p}^H (\mathbf{R}^H)^{-1} \mathbf{p} = \sigma_a^2 \left[1 - \sigma_a^2 \mathbf{u}_D^H \mathbf{Q}^H (\mathbf{R}^H)^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{u}_D \right]$$

per cui, in base alla (9.11) si deduce:

$$(9.16) \quad J_{\min} = \sigma_a^2 \left[1 - \mathbf{u}_D^H \mathbf{Q}^H \left(\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{u}_D \right]$$

In modo analogo a quanto fatto a proposito dell'equalizzatore ZF, il ritardo D può essere calcolato determinando il minimo della J_{\min} ; questo si ottiene scegliendo per D l'indice cui

corrisponde il massimo degli elementi diagonali della matrice $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^H \left(\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{Q}$.

Esempio E.2

Si determinino i valori dei pesi di un equalizzatore "MMSE" di lunghezza 2 in un sistema di trasmissione numerica in banda base caratterizzato dall'impulso di segnalazione mostrato in Fig. E.1, sotto le ipotesi che:

- (1. la sequenza del rumore in ingresso $\{n_k\}$ sia costituita da elementi statisticamente indipendenti, a valor medio nullo e varianza unitaria;
- (2. la sequenza dei dati $\{a_k\}$ sia costituita da elementi binari, equiprobabili, appartenenti all'insieme $\{-1,1\}$ ed indipendenti dagli elementi della sequenza $\{n_k\}$.

Calcolando la matrice \mathbf{M} , il massimo elemento della sua diagonale principale è quello di posto 4 che corrisponde al simbolo a_{k-3} . Applicando la (9.14) si ha:

$$\mathbf{c}_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{23} \\ \frac{25}{92} \\ \frac{1}{23} \end{bmatrix}$$

L'uscita dell'equalizzatore è

$$y_k = \mathbf{c}_o^H \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}_k + \mathbf{c}_o^H \mathbf{n}_k = \left(\frac{1}{69} a_{k+3} + \frac{11}{92} a_{k+2} + \frac{11}{46} a_{k+1} + \frac{91}{276} a_k + \frac{11}{46} a_{k-1} + \frac{11}{92} a_{k-2} + \frac{1}{69} a_{k-3} \right) + \left(\frac{1}{23} n_{k+1} + \frac{25}{92} n_k + \frac{1}{23} n_{k-1} \right)$$

Ad esso corrisponde l'interferenza d'intersimbolo:

$$i_k = y_k - a_{k-3} = \left(\frac{1}{69} a_k + \frac{11}{92} a_{k-1} + \frac{11}{46} a_{k-2} - \frac{185}{276} a_{k-3} + \frac{11}{46} a_{k-4} + \frac{11}{92} a_{k-5} + \frac{1}{69} a_{k-6} \right) + \left(\frac{1}{23} n_k + \frac{25}{92} n_{k-1} + \frac{1}{23} n_{k-2} \right)$$

il cui valore quadratico medio vale:

$$E \{ i_k^2 \} = 0.67029$$

10. - Equalizzatori a reazione.

Lo schema di un tale tipo di equalizzatore si presenta come è indicato in Fig. 10. Se la stima \hat{i}_k si suppone lineare si ha:

$$(10.1) \quad \hat{i}_k = \sum_{i=1}^{N'} v_i^* \hat{a}_{k-D-i}$$

dove si sono denotati con $\{v_i\}_{i=1}^{N'}$ i pesi del filtro *feedback* $V(z)-1$.

Se si suppone che non si commet-

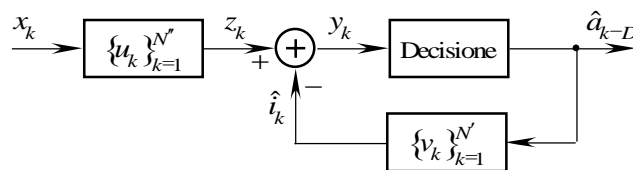


Fig. 10 - Equalizzatore a reazione

tono errori nella decisione, per modo che si può porre $\hat{a}_k = a_k$, è dunque:

$$(10.2) \quad y_k = \sum_{i=0}^N u_i^* x_{k-i} - \sum_{i=1}^{N'} v_i^* a_{k-D-i}$$

essendo $\{u_i\}_{i=0}^N$ i pesi del filtro *forward* $U(z)$.

Introducendo i vettori

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_0 \quad u_1 \quad \cdots \quad u_N]^T & \mathbf{v} &= [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_{N'}]^T \\ \mathbf{x}_k &= [x_k \quad x_{k-1} \quad \cdots \quad x_{k-N}]^T & \mathbf{a}_{k-D-1} &= [a_{k-D-1} \quad a_{k-D-2} \quad \cdots \quad a_{k-D-N'}]^T \end{aligned}$$

la precedente assume la forma:

$$(10.4) \quad y_k = \mathbf{u}^H \mathbf{x}_k - \mathbf{v}^H \mathbf{a}_{k-D-1}$$

Come nel caso dell'equalizzatore MMSE, i pesi dei filtri trasversali possono essere determinati imponendo che in corrispondenza ai valori ottimi l'errore quadratico medio raggiunga un minimo. A tale scopo definendo i vettori:

$$(10.5) \quad \tilde{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ -\mathbf{v} \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{a}_{k-D-1} \end{bmatrix}$$

la (10.4) diviene

$$(10.6) \quad y_k = \tilde{\mathbf{c}}^H \tilde{\mathbf{x}}_k$$

e la funzione obiettivo in tal caso diventa:

$$(10.7) \quad J(\mathbf{c}) = E \left\{ |y_k - a_{k-D}|^2 \right\} = \tilde{\mathbf{c}}^H E \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^H \right\} \tilde{\mathbf{c}} - \tilde{\mathbf{c}}^H E \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_k a_{k-D}^* \right\} - E \left\{ a_{k-D} \tilde{\mathbf{x}}_k^H \right\} \tilde{\mathbf{c}} + E \left\{ a_{k-D} a_{k-D}^* \right\}$$

Supponendo ancora che la sequenza dati sia stazionaria e composta da elementi a media nulla, incorrelati e caratterizzati da un valore quadratico medio pari a σ_a^2 , la precedente si scrive, con ovvio significato dei simboli:

$$(10.8) \quad J(\mathbf{c}) = \tilde{\mathbf{c}}^H \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{c}} - \tilde{\mathbf{c}}^H \tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}^H \tilde{\mathbf{c}} + \sigma_a^2$$

Il valore ottimo dei pesi $\tilde{\mathbf{c}}_o$ si ottiene annullando il gradiente della funzione $J(\mathbf{c})$; $\tilde{\mathbf{c}}_o$ pertanto è dato dalla soluzione dell'equazione

$$(10.9) \quad \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{c}}_o = \tilde{\mathbf{p}}$$

Tenendo presente le (9.11) e (10.5), si ha:

$$(10.10) \quad \tilde{\mathbf{R}} = E \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_k \tilde{\mathbf{x}}_k^H \right\} = E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{a}_{k-D-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^H & \mathbf{a}_{k-D-1}^H \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} & \sigma_a^2 \mathbf{Q} \mathbf{I}_D \\ \sigma_a^2 \mathbf{I}_D^H \mathbf{Q}^H & \sigma_a^2 \mathbf{I}' \end{bmatrix}$$

essendo \mathbf{I} e \mathbf{I}' le matrici unitarie di ordine $N+1$ e N' rispettivamente e \mathbf{I}_D una matrice i cui elementi sono δ_{i-j-D} $i \in \{0, N+1\}, j \in \{1, N'\}$. È inoltre:

$$(10.11) \quad \tilde{\mathbf{p}} = E \left\{ \tilde{\mathbf{x}}_k a_{k-D}^* \right\} = E \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{a}_{k-D-1} \end{bmatrix} a_{k-D}^* \right\} = E \left\{ \begin{bmatrix} (\mathbf{Q} \mathbf{a}_k + \mathbf{n}_k) a_{k-D}^* \\ \mathbf{a}_{k-D-1} a_{k-D}^* \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \mathbf{Q} \mathbf{u}_D \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

essendo $a_{k-D}^* = \mathbf{a}_k^H \mathbf{u}_D$.

Dalla (10.9), tenendo conto delle posizioni (10.5) si deduce:

$$(10.12) \quad \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} & \sigma_a^2 \mathbf{Q} \mathbf{I}_D \\ \sigma_a^2 \mathbf{I}_D^H \mathbf{Q}^H & \sigma_a^2 \mathbf{I}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_o \\ -\mathbf{v}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 \mathbf{Q} \mathbf{u}_D \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

dalla quale discendono i seguenti sistemi di equazioni:

$$(10.13) \quad \begin{aligned} (\sigma_a^2 \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}) \mathbf{u}_o - \sigma_a^2 \mathbf{Q} \mathbf{I}_D \mathbf{v}_o &= \sigma_a^2 \mathbf{Q} \mathbf{u}_D \\ \mathbf{I}_D^H \mathbf{Q}^H \mathbf{u}_o &= \mathbf{v}_o \end{aligned}$$

Dalle precedenti si ottiene:

$$(10.14) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_o &= \left(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H - \mathbf{Q}\mathbf{I}_D\mathbf{I}_D^H\mathbf{Q}^H + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2}\mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{u}_D \\ \mathbf{v}_o &= \mathbf{I}_D^H\mathbf{Q}^H \left(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^H - \mathbf{Q}\mathbf{I}_D\mathbf{I}_D^H\mathbf{Q}^H + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2}\mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{Q}\mathbf{u}_D \end{aligned}$$

11. - Prestazioni degli equalizzatori.

Le prestazioni di un equalizzatore sono pertanto individuate dal parametro

$$(11.1) \quad \eta = E \left\{ |y_k - a_{k-D}|^2 \right\}$$

Dalla (11.1) si ottiene facilmente:

$$(11.2) \quad \begin{aligned} \eta &= E \left\{ (y_k - a_{k-D})(y_k^* - a_{k-D}^*) \right\} = \\ &= E \left\{ y_k y_k^* \right\} - E \left\{ y_k a_{k-D}^* \right\} - E \left\{ a_{k-D} y_k^* \right\} + E \left\{ a_{k-D} a_{k-D}^* \right\} \end{aligned}$$

Tenendo conto della (6.10) e ricordando le ipotesi fatte a proposito della sequenza dati e della sequenza del rumore, si ha:

$$(11.3) \quad \begin{aligned} E \left\{ y_k y_k^* \right\} &= \mathbf{c}_o^H \mathbf{Q} E \left\{ \mathbf{a}_k \mathbf{a}_k^H \right\} \mathbf{Q}^H \mathbf{c}_o + \mathbf{c}_o^H \mathbf{Q} E \left\{ \mathbf{a}_k \mathbf{n}_k^H \right\} \mathbf{c}_o - \mathbf{c}_o^H E \left\{ \mathbf{n}_k \mathbf{a}_k^H \right\} \mathbf{Q}^H \mathbf{c}_o + \mathbf{c}_o^H E \left\{ \mathbf{n}_k \mathbf{n}_k^H \right\} \mathbf{c}_o = \\ &= \sigma_a^2 \mathbf{c}_o^H \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H \mathbf{c}_o + \sigma_n^2 \mathbf{c}_o^H \mathbf{I} \mathbf{c}_o = \sigma_a^2 \mathbf{c}_o^H \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H \mathbf{c}_o + \sigma_n^2 \mathbf{c}_o^H \mathbf{c}_o \\ E \left\{ y_k a_{k-D}^* \right\} &= E \left\{ (\mathbf{c}_o^H \mathbf{Q} \mathbf{a}_k + \mathbf{c}_o^H \mathbf{n}_k) a_{k-D}^* \right\} = \mathbf{c}_o^H \mathbf{Q} E \left\{ \mathbf{a}_k a_{k-D}^* \right\} + \mathbf{c}_o^H E \left\{ \mathbf{n}_k a_{k-D}^* \right\} = \sigma_a^2 \mathbf{c}_o^H \mathbf{Q} \mathbf{u}_D \\ E \left\{ y_k^* a_{k-D} \right\} &= \sigma_a^2 \mathbf{u}_D^H \mathbf{Q}^H \mathbf{c}_o \\ E \left\{ a_{k-D} a_{k-D}^* \right\} &= \sigma_a^2 \end{aligned}$$

Di conseguenza la (11.1) diviene:

$$(11.4) \quad \begin{aligned} \eta &= \sigma_a^2 \left(\mathbf{c}_o^H \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H \mathbf{c}_o - \mathbf{c}_o^H \mathbf{Q} \mathbf{u}_D - \mathbf{u}_D^H \mathbf{Q}^H \mathbf{c}_o + 1 \right) + \sigma_n^2 \mathbf{c}_o^H \mathbf{c}_o = \\ &= \sigma_a^2 \left\| \mathbf{c}_o^H \mathbf{Q} - \mathbf{u}_D^H \right\|^2 + \sigma_n^2 \left\| \mathbf{c}_o \right\|^2 \end{aligned}$$

che si può porre nella forma

$$(11.5) \quad \eta = \sigma_a^2 \left\| \mathbf{Q}^H \mathbf{c}_o - \mathbf{u}_D \right\|^2 + \sigma_n^2 \left\| \mathbf{c}_o \right\|^2$$

Il rapporto segnale/interferenza $\frac{\sigma_a^2}{\eta}$ si può scrivere in funzione del rapporto segna-

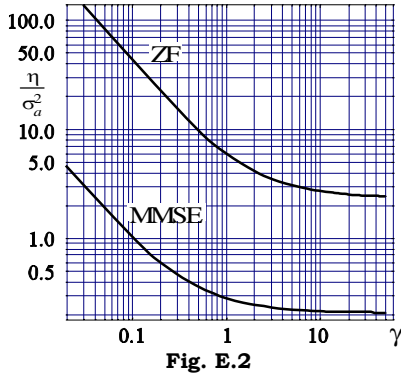
le/rumore $\gamma = \frac{\sigma_a^2}{\sigma_n^2}$ e si ha:

$$(11.6) \quad \frac{\sigma_a^2}{\eta} = \frac{1}{\left\| \mathbf{Q}^H \mathbf{c}_o - \mathbf{u}_D \right\|^2 + \frac{1}{\gamma} \left\| \mathbf{c}_o \right\|^2}$$

È bene notare che ad eccezione degli equalizzatori ZF il vettore dei pesi ottimi dipende dal rapporto segnale rumore.

Esempio E.3

Con riferimento agli equalizzatori di tipo ZF e MMSE di cui agli Esempi 1 e 2, si determini l'andamento della quantità η in funzione del rapporto segnale/rumore $\gamma = \sigma_a^2 / \sigma_n^2$. Dalla (11.5) si ha:



$$\eta = \sigma_a^2 \left[\left\| \mathbf{Q}^H \mathbf{c}_o - \mathbf{u}_D \right\|^2 + \frac{\|\mathbf{c}_o\|^2}{\gamma} \right]$$

Con i dati forniti negli Esempi 1 e 2 risulta:

Equalizzatore ZF $\eta = \sigma_a^2 (2.35 + 3.51/\gamma)$

Equalizzatore MMSE $\eta = \sigma_a^2 (0.21 + 0.08/\gamma)$

Gli andamenti del rapporto η/σ_a^2 in funzione di γ sono riportati in Fig. E.2 per i due diversi tipi di equalizzatore.

In quel che segue sono valutate le prestazioni degli equalizzatori di tipo ZF e MMSE supponendo che la lunghezza dell'equalizzatore sia abbastanza grande da poter considerare infinito il numero di celle di ritardo. Quanto detto comporta che la variabile di decisione è espressa dalla:

$$(11.7) \quad y_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i x_{k-i}$$

5.1 – Equalizzatori ZF.

Introducendo nella (11.7) la (1.2), si ottiene:

$$(11.8) \quad y_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{oi}^* \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q_{k-i-n} + n_{k-i} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{oi}^* q_{k-i-n} \right] + \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{oi}^* n_{k-i}$$

L'imposizione dell'annullamento dell'interferenza di intersimbolo comporta il verificarsi delle condizioni:

$$(11.9) \quad \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{oi}^* q_{n-i} = \delta_n$$

Trasformando la precedente secondo Fourier (v. Appendice A. Filtri alla Wiener) si ottiene:

$$(11.10) \quad C_o^*(-\varphi)Q(\varphi) = 1$$

dove con $C_o(\varphi)$ e $Q(\varphi)$ si sono denotate le trasformate delle sequenze $\{c_{ok}\}$ e $\{q_k\}$ rispettivamente e si è tenuto conto che è $\mathbf{F} \{\delta_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n e^{-j2\pi n f T} = 1$.

Se sono soddisfatte le condizioni di annullamento dell'interferenza di intersimbolo, la quantità y_k si riduce a $a_k + \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{oi}^* n_{k-i}$ e la differenza $y_k - a_k$ si riduce solo alla quantità $\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{oi}^* n_{k-i}$ e cioè:

$$(11.11) \quad e_k = y_k - a_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{oi}^* n_{k-i}$$

Il valore quadratico medio di y_k è allora:

$$(11.12) \quad E\{|e_k|^2\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{oi}^* c_{oj} E\{n_{k-i} n_{k-j}^*\} = \sigma_n^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} |c_{oi}|^2$$

avendo supposto la sequenza del rumore $\{n_k\}$ stazionaria, a media nulla, composta da elementi statisticamente indipendenti e caratterizzati dalla varianza σ_n^2 . In virtù del Teorema di Parseval la precedente diviene

$$(11.13) \quad \gamma = \sigma_n^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |C_o(\varphi)|^2 d\varphi = \sigma_n^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|Q(-\varphi)|^2} d\varphi$$

ovvero:

$$(11.14) \quad \gamma = \sigma_n^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|Q(\varphi)|^2} d\varphi$$

5.2 – Equalizzatori MMSE.

Nel caso di equalizzatori MMSE, le condizioni (9.8), con $N \rightarrow \infty$, diventano:

$$(11.15) \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{oj} E \{ x_{k-i} x_{k-j}^* \} = E \{ a_k^* x_{k-i} \} \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

che possono anche essere scritte nella forma:

$$(11.16) \quad E \left\{ \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{oj} x_{k-j}^* - a_k^* \right) x_{k-i} \right\} = 0$$

la quale, espressa in funzione dell'errore $e_k = y_k - a_k$, diventa:

$$(11.17) \quad E \{ e_k^* x_{k-i} \} = 0$$

D'altra parte si può scrivere:

$$(11.18) \quad \gamma = E \{ e_k^* (y_k - a_k) \} = E \{ e_k^* y_k \} - E \{ e_k^* a_k \}$$

e quindi, ricordando la (11.7) si ha

$$(11.19) \quad E \{ e_k^* y_k \} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{oi} E \{ e_k^* x_{k-i} \} = 0$$

La quantità γ allora diventa:

$$(11.20) \quad \gamma = -E \{ e_k^* a_k \} = -E \{ (y_k^* - a_k^*) a_k \} = E \{ |a_k|^2 \} - E \{ a_k y_k^* \} = \sigma_a^2 - \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{oi} E \{ a_k x_{k-i}^* \}$$

Tenendo presente la scritta nella forma $x_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{k-n} q_n + n_k$ e ricordando che la sequenza di rumore è a media nulla ed indipendente dai dati a_k , si ha:

$$(11.21) \quad E \{ a_k x_{k-i}^* \} = E \left\{ a_k \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{k-i-n}^* q_n^* + n_{k-i}^* \right) \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n^* E \{ a_k a_{k-i-n}^* \} + E \{ a_k n_{k-i}^* \} = \sigma_a^2 q_{-i}^*$$

È quindi:

$$(11.22) \quad \gamma = \sigma_a^2 \left(1 - \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_{oi} q_{-i}^* \right)$$

Interpretando la sommatoria a secondo membro come la convoluzione, tra la sequenza dei pesi $\{c_{ok}\}$ e quella $\{q_k\}$ dedotta dagli impulsi di segnalazione (v. Appendice A), calcolata nel punto $n=0$, la (11.22) può essere più agevolmente calcolata operando nel dominio della frequenza. Si ha:

$$(11.23) \quad \gamma = \sigma_a^2 \left(1 - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C_o(\varphi) Q^*(-\varphi) d\varphi \right)$$

Per determinare la quantità γ si deve calcolare la grandezza $C_0(\omega)$. A proposito si osservi che, tenendo conto delle (9.13), la (11.15) diviene

$$(11.24) \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{oj} \left(\sigma_a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{n-(i-j)} q_n^* + \sigma_n^2 \delta_{i-j} \right) = \sigma_a^2 q_{-i}$$

che introducendo la sequenza $z_\ell = \sum_n q_n q_{n-\ell}^*$ si può scrivere come:

$$(11.25) \quad \sigma_a^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{oj} z_{i-j}^* + \sigma_n^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{oj} \delta_{i-j} = \sigma_a^2 q_{-i}$$

La trasformata secondo Fourier conduce alla:

$$(11.26) \quad C_o(\varphi) \left(\sigma_a^2 Z(\varphi) + \sigma_n^2 \right) = \sigma_a^2 Q(-\varphi)$$

dove si è indicato con $Z(\varphi)$ la trasformata di Fourier della sequenza $\{z_k\}$ e si è tenuto presente che è $F\{\delta_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n e^{-j2\pi n f T} = 1$. Potendosi scrivere $z_\ell = \sum_n q_n q_{n-\ell}^* = \sum_n q_n q_{-(\ell-n)}^*$ la sequenza $\{z_k\}$ può essere interpretata come la convoluzione della sequenza $\{q_k\}$ con la sequenza $\{q_{-k}\}$. Si ha $Z(\varphi) = Q(\varphi)Q^*(\varphi) = |Q(\varphi)|^2$. È quindi:

$$(11.27) \quad C_o(\varphi) \left(\sigma_a^2 |Q(-\varphi)|^2 + \sigma_n^2 \right) = \sigma_a^2 Q(-\varphi)$$

da cui:

$$(11.28) \quad C_o(\varphi) = \frac{\sigma_a^2 Q(-\varphi)}{\sigma_a^2 |Q(-\varphi)|^2 + \sigma_n^2}$$

Sostituendo il valore di $C_o(\varphi)$ così ottenuto nella (11.23) si ha:

$$(11.29) \quad \begin{aligned} \gamma &= \sigma_a^2 - \sigma_a^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma_a^2 |Q(-\varphi)|^2}{\sigma_a^2 |Q(-\varphi)|^2 + \sigma_n^2} d\varphi = \sigma_a^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} df - \sigma_a^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma_a^2 |Q(-\varphi)|^2}{\sigma_a^2 |Q(-\varphi)|^2 + \sigma_n^2} d\varphi = \\ &= \sigma_a^2 \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} d\varphi - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma_a^2 |Q(-\varphi)|^2}{\sigma_a^2 |Q(-\varphi)|^2 + \sigma_n^2} d\varphi \right) = \sigma_a^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2 |Q(-\varphi)|^2 + \sigma_n^2} d\varphi \end{aligned}$$

che equivale alla:

$$(11.30) \quad \gamma = \sigma_n^2 \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \frac{d\varphi}{|Q(\varphi)|^2 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_a^2}}$$

Esempio E.3

Si calcolino i valori del parametro γ per gli equalizzatori ZF e MMSE degli esempi E.1 e E.2.

Dalla (2.1) discende:

$$\gamma = E\{y_k^2\} - 2E\{a_k y_k\} + E\{a_k^2\} = E\{y_k^2\} - 2E\{a_k y_k\} + 1$$

Tenendo conto delle (1.1) e (1.5) è:

$$E\{y_k^2\} = \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-N}^N c_i c_j E\{x_{k-i} x_{k-j}\} = \sum_{i=-N}^N \sum_{j=-N}^N c_i c_j \left\{ \sum_n q_n q_{n+i-j} + \delta_{i-j} \right\}$$

e

$$E\{a_k y_k\} = \sum_{i=-N}^N c_i E\{a_k x_{k-i}\} = \sum_{i=-N}^N c_i q_{-i}$$

Si ha:

$$\gamma = \frac{5}{2} c_{-1}^2 + \frac{5}{2} c_0^2 + \frac{5}{2} c_1^2 + 2c_{-1}c_0 + \frac{1}{2} c_{-1}c_1 + 2c_0c_1 - c_{-1} - 2c_0 - c_1 + 1$$

Numericamente si ha:

$$\gamma_{ZF} = \frac{13}{2} \quad \gamma_{MMSE} = \frac{23}{39}$$

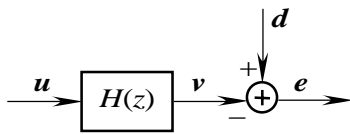
APPENDICE A

FILTRI ALLA WIENER

1 – Generalità.

Sia u una sequenza aleatoria, a valori in generale complessi, stazionaria, almeno in senso lato che è usata per la predizione di un'altra sequenza d , supposta anch'essa stazionaria. Si dice che la predizione di d è eseguita sulla base delle osservazioni u . In quel che segue si prendono in esame le predizioni lineari e cioè quelle predizioni della forma:

$$(A.1) \quad v = u * h$$



che corrispondono all'uscita da un filtro a tempo discreto, lineare e tempo invariante e caratterizzato da una risposta impulsiva h ⁽²⁾ quando al suo ingresso è applicata la sequenza u . Lo schema del predittore si presenta come è

indicato in Fig. 1 dove è anche indicato l'errore di predizione:

$$(A.2) \quad e = d - u * h$$

La scelta della risposta impulsiva del filtro $H(z)$ è operata scegliendo quella sequenza h in corrispondenza della quale il valore quadratico medio della sequenza errore e raggiunge un minimo. Tale criterio equivale a determinare la sequenza ottima che comporta un minimo della funzione obiettivo definita dalla:

$$(A.3) \quad J(\mathbf{h}) = E\{|e_n|^2\} = E\{e_n e_n^*\}$$

e cioè:

$$(A.4) \quad h_{ok} = \arg \min_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h})$$

Il minimo corrisponde ad un punto di stazionarietà della funzione $J(\mathbf{h})$ e cioè al punto in cui si annulla il gradiente:

$$(A.5) \quad \nabla_k J(\mathbf{h}) = 0$$

che, posto $h_n = a_n + jb_n$, è definito dalla:

$$(A.6) \quad \nabla_k J(\mathbf{h}) = \frac{\partial J(\mathbf{h})}{\partial a_k} + j \frac{\partial J(\mathbf{h})}{\partial b_k}$$

Tenendo conto delle (A.2), dalla (A.3) si ha:

$$(A.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial J(\mathbf{h})}{\partial a_k} &= E \left\{ \frac{\partial e_n}{\partial a_k} e_n^* + e_n \frac{\partial e_n^*}{\partial a_k} \right\} = E \left\{ -u_{n-k} e_n^* - u_{n-k}^* e_n \right\} \\ \frac{\partial J(\mathbf{h})}{\partial b_k} &= E \left\{ \frac{\partial e_n}{\partial b_k} e_n^* + e_n \frac{\partial e_n^*}{\partial b_k} \right\} = E \left\{ -ju_{n-k} e_n^* + ju_{n-k}^* e_n \right\} \end{aligned}$$

per cui è:

$$(A.8) \quad \nabla_k J = -2E \left\{ u_{n-k}^* e_n \right\}$$

La condizione di stazionarietà è quindi data dalla:

⁽²⁾ Si suppone che la risposta impulsiva del filtro sia di lunghezza infinita (filtro di tipo IIR). È ovvio che i filtri a risposta impulsiva di lunghezza finita (filtri FIR) possono essere considerati casi particolari dei filtri IIR.

$$(A.9) \quad E\{u_{n-k}^* e_n\} = 0$$

La sequenza errore è ortogonale alla sequenza delle osservazioni (**Principio di ortogonalità**).

Sia e la sequenza errore corrispondente ad una generica risposta impulsiva h e e_o l'errore ottenuto in corrispondenza alla sequenza ottima che soddisfa la condizione (A.9). Si può scrivere:

$$(A.10) \quad \begin{aligned} E\{|e_n|^2\} &= E\{|(e_n - e_{on}) + e_{on}|^2\} = \\ &= E\{|e_n - e_{on}|^2\} + E\{|e_{on}|^2\} - 2 \operatorname{Re} \left[E\{(e_n - e_{on})^* e_{on}\} \right] = \\ &= E\{|e_n - e_{on}|^2\} + E\{|e_{on}|^2\} - 2 \operatorname{Re} \left[E\left\{ \left(d_n^* - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k^* u_{n-k}^* - d_n^* + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{ok}^* u_{n-k}^* \right) e_{on} \right\} \right] = \\ &= E\{|e_n - e_{on}|^2\} + E\{|e_{on}|^2\} - 2 \operatorname{Re} \left[E\left\{ \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (h_{ok}^* - h_k^*) u_{n-k}^* \right) e_{on} \right\} \right] \end{aligned}$$

che, in virtù della (A.9), diventa:

$$(A.11) \quad E\{|e_n|^2\} = E\{|e_n - e_{on}|^2\} + E\{|e_{on}|^2\} \geq E\{|e_{on}|^2\}$$

che dimostra che la condizione (A.9) conduce al minimo della funzione obiettivo.

Esplicitando la (A.9) si perviene alle equazioni che definiscono la sequenza ottima h_o :

$$(A.12) \quad E\left\{ u_{n-k}^* \left(d_n - \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_{oi} u_{n-i} \right) \right\} = E\{u_{n-k}^* d_n\} - \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_{ok} E\{u_{n-k}^* x_{n-i}\} = 0 \quad k \in \mathbb{Z}$$

Introducendo la funzione di correlazione fra due sequenze stazionarie a valori complessi:

$$(A.13) \quad R_{ab}(k) = E\{a_n^* b_{n+k}\}$$

le (A.12) assumono la forma:

$$(A.14) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{ok} R_{uu}(k-i) = R_{ud}(k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

che costituiscono le **equazioni di Wiener-Hopf**.

Per dedurre i valori dei pesi del filtro ottimo è opportuno prendere le trasformate zeta della precedente. Si ha:

$$(A.15) \quad W_{uu}(z) \cdot H_o(z) = W_{ud}(z)$$

dove $W_{ud}(z)$ e $W_{uu}(z)$ denotano le densità spettrali (auto e mutua) definite nel dominio della variabile zeta e

$$(A.16) \quad H_o(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{on} z^{-n}$$

la trasformata zeta della sequenza ottima h_o . Dalla (A.15) si deduce:

$$(A.17) \quad H_o(z) = \frac{W_{ud}(z)}{W_{uu}(z)}$$

La funzione di autocorrelazione della sequenza errore vale:

$$\begin{aligned}
R_{ee}(k) &= E\{e_n^* e_{n+k}\} = E\left\{\left(d_n - \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i u_{n-i}\right)^* \left(d_{n+k} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j u_{n+k-j}\right)\right\} = \\
(A.18) \quad &= E\{d_n^* d_{n+k}\} - \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i^* E\{u_{n-i}^* d_{n+k}\} - \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j E\{d_n^* u_{n+k-j}\} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i^* h_j E\{u_{n-i}^* u_{n+k-j}\} = \\
&= R_{dd}(k) - \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i^* R_{ud}(k+i) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j R_{du}(k-j) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i^* h_j R_{uu}(k+i-j)
\end{aligned}$$

che trasformata nel dominio della variabile zeta, conduce alla:

$$(A.19) \quad W_{ee}(z) = W_{dd}(z) - W_{ud}(z) \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i^* z^i - W_{du}(z) \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j z^{-j} + W_{uu}(z) \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i^* z^i \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j z^{-j}$$

essendo:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \sum_k \sum_i h_i^* R_{ud}(k+i) z^{-k} = \sum_k \left[\sum_i h_i^* z^i \right] R_{ud}(k+i) z^{-(k+i)} = W_{ud}(z) \sum_i h_i^* z^i \\
b) \quad & \sum_k \sum_j h_j R_{du}(k-j) z^{-k} = \sum_k \left[\sum_j h_j z^{-j} \right] R_{du}(k-j) z^{-(k-j)} = W_{du}(z) \sum_j h_j z^{-j} \\
c) \quad & \sum_k \left[\sum_i \sum_j h_i^* h_j R_{uu}(k+i-j) \right] z^{-k} = \sum_k \left[\sum_i h_i^* z^i \cdot \sum_j h_j z^{-j} \right] R_{uu}(k+i-j) z^{-(k+i-j)} = \\
& = W_{uu}(z) \sum_i h_i^* z^i \cdot \sum_j h_j z^{-j}
\end{aligned}
\tag{A.20}$$

D'altra parte, come è facile rendersi conto, si ha:

$$\begin{aligned}
(A.21) \quad & \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i z^{-i} = H(z) \\
& \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i^* z^i = H^*(1/z^*)
\end{aligned}$$

ed inoltre, dalla condizione

$$\begin{aligned}
(A.22) \quad & R_{du}(k) = E\{d_n^* x_{n+k}\} = \left(E\{x_{n+k} d_n^*\}\right)^* = R_{ud}^*(-k) \\
& R_{uu}(k) = E\{x_n^* x_{n+k}\} = \left(E\{x_{n+k}^* x_n\}\right)^* = R_{uu}^*(-k)
\end{aligned}$$

discende:

$$\begin{aligned}
(A.23) \quad & W_{du}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{du}(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{ud}^*(-k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{ud}^*(k) z^k = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{ud}(k) \left(\frac{1}{z}\right)^{-k}\right)^* = W_{ud}^*(1/z^*) \\
& W_{uu}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{uu}(k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{uu}^*(-k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{uu}^*(k) z^k = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{uu}(k) \left(\frac{1}{z}\right)^{-k}\right)^* = W_{uu}^*(1/z^*)
\end{aligned}$$

per cui la (A.19) può essere riscritta come segue:

$$(A.24) \quad W_{ee}(z) = W_{dd}(z) - H^*(1/z^*) - W_{ud}^*(z) H^*(1/z^*) + W_{uu}(z) H(z) H^*(1/z^*)$$

La funzione $W_{ee}(z)$, calcolata in corrispondenza al valore ottimo $H_o(z)$ dato dalla (A.17), tenendo conto delle (A.23), diviene:

$$(A.25) \quad W_{ee}(z) = W_{dd}(z) - \frac{W_{ud}(z) W_{ud}^*(1/z^*)}{W_{uu}(z)}$$

Se il circolo unitario del piano zeta è contenuto nella regione di convergenza della trasformata $W_{ee}(z)$, ponendo nella (A.25) $z = e^{j\omega}$ si deduce l'espressione della trasforma discreta di Fourier della sequenza errore e :

$$(A.26) \quad W_{ee}(e^{j\omega}) = W_{dd}(e^{j\omega}) - \frac{|W_{du}(e^{j\omega})|^2}{W_{uu}(e^{j\omega})}$$

Il valore quadratico medio della sequenza errore è allora dato dalla:

$$(A.27) \quad \sigma_e^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_{ee}(e^{j\omega}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[W_{dd}(e^{j\omega}) - \frac{|W_{du}(e^{j\omega})|^2}{W_{uu}(e^{j\omega})} \right] d\omega$$

APPENDICE B

FATTORIZZAZIONE SPETTRALE

Sia y una sequenza aleatoria stazionaria (almeno in senso lato) e caratterizzata da una funzione di autocorrelazione $\gamma_{yy}(k) = E\{y_n^* y_{n+k}\}$. Si supponga che tale sequenza sia ottenuta come uscita da un sistema LTI sollecitato da una sequenza x bianca a valor medio nullo e varianza σ^2 e pertanto caratterizzata da una funzione di autocorrelazione data dalla $\gamma_{xx}(k) = \sigma^2 \delta_k$. Se h denota la risposta impulsiva del filtro LTI è $y = x * h$.

Se la sequenza x è applicata all'ingresso di un sistema LTI di risposta impulsiva h , la sequenza in uscita y si ottiene dalla convoluzione $y = x * h$ e cioè:

$$(B.1) \quad y_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m x_{n-m}$$

La funzione di autocorrelazione della sequenza in uscita vale:

$$(B.2) \quad \begin{aligned} \gamma_{yy}(k) &= E\{y_n^* y_{n+k}\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i^* h_j E\{x_{n-i}^* x_{n+k-j}\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i^* h_j \gamma_{xx}(k+i-j) = \\ &= \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_i^* h_j \delta_{k+i-j} = \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i^* h_{k+i} \end{aligned}$$

La trasformata zeta della sequenza γ_{yy} vale:

$$(B.3) \quad \begin{aligned} \Gamma_{yy}(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{yy}(k) z^{-k} = \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i^* h_{k+i} \right] z^{-k} = N_0 \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i^* \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{k+i} z^{-k} \right] = \\ &= \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i^* z^i \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{k+i} z^{-(k+i)} \right] = \sigma^2 \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m \left(\frac{1}{z^*} \right)^{-m} \right]^* \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n} \right] \end{aligned}$$

Se

$$(B.4) \quad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}$$

denota la funzione di trasferimento del sistema LTI espressa nel dominio della variabile zeta, la (B.3) diventa:

$$(B.5) \quad \Gamma_{yy}(z) = \sigma^2 H(z) H^*(1/z^*)$$

Dalla (B.5) si deduce che una sequenza aleatoria y stazionaria in senso lato può essere rappresentata come sequenza in uscita da un filtro LTI sollecitato da una sequenza bianca.

La (B.5) però non è invertibile. In altri termini, assegnata una funzione densità spettrale $\Gamma_{yy}(z)$ non è possibile determinare in modo univoco una funzione $H(z)$ tale da soddisfare la

(B.5). Per rendersi conto facilmente di ciò basta osservare, ad esempio, che:

- a) se si sostituisce $H(z)$ con $-H(z)$, $\Gamma_{yy}(z)$ non cambia (ambiguità di segno);
- b) se si sostituisce $H(z)$ con $z^{-p} H(z)$ ($p \in \mathbb{Z}$), $\Gamma_{yy}(z)$ non cambia (ambiguità di ritardo);

Lo stesso problema si presenta se si vuole sbiancare una sequenza x aleatoria stazionaria in senso lato vale a dire se si vuole determinare un filtro LTI tale che la sequenza che si ottiene in uscita quando al suo ingresso è applicata la sequenza x sia una sequenza bianca.

Anche in questo caso il filtro sbiancante $H_w(z)$ non è univocamente determinato.

Per superare tale difficoltà basta imporre la condizione che il filtro $H(z)$ sia causale, stabile e monico (il coefficiente del termine z^0 nello sviluppo di $H(z)$ sia unitario), condizione che, com'è noto, garantisce la fisica realizzabilità del sistema LTI.

È opportuno tener presente che se il circolo unitario del piano zeta è contenuto nella regione di convergenza della trasformata zeta della funzione di autocorrelazione dalla (B.5) si deduce:

$$(B.6) \quad \Gamma_{yy}(e^{j\omega}) = \sigma^2 H(e^{j\omega}) H^*(e^{j\omega}) = \sigma^2 |H(e^{j\omega})|^2$$

Una condizione necessaria e sufficiente perché una funzione $A(\omega)$ reale e non negativa a quadrato integrabile in $[-\pi, \pi)$ corrisponda al quadrato del modulo della risposta in frequenza di un sistema LTI causale è che sia soddisfatta la condizione:

$$(B.7) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\log A(\omega)| d\omega < \infty$$

nota come **condizione di Paley- Wiener**.

Da quanto detto ci si rende facilmente conto che la condizione di causalità imposta al filtro LTI comporta per la (B.6) che si verifichi la condizione:

$$(B.8) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |\log \Gamma_{yy}(e^{j\omega})| d\omega < \infty$$

La (B.8) assicura che la funzione $\log \Gamma_{yy}(e^{j\omega})$, periodica di periodo 2π , in quanto assolutamente integrabile nel periodo, ammette uno sviluppo in serie di Fourier. Pertanto si può scrivere:

$$(B.9) \quad \log \Gamma_{yy}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n e^{-jn\omega}$$

Si scomponga la serie (B.9) come segue.

$$(B.10) \quad \log \Gamma_{yy}(e^{j\omega}) = \sum_{n \leq -1} \lambda_n e^{-jn\omega} + \lambda_0 + \sum_{n \geq 1} \lambda_n e^{-jn\omega}$$

dalla quale si deduce che la convergenza della serie (B.9) comporta la convergenza delle funzioni

$$(B.11) \quad X_+(e^{j\omega}) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n e^{-jn\omega} \quad X_-(e^{j\omega}) = \sum_{n \leq -1} \lambda_n e^{-jn\omega}$$

Si consideri adesso la funzione

$$(B.12) \quad X_+(z) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n z^{-n}$$

Poiché $X_+(e^{j\omega})$ esiste, essa è convergente sul circolo unitario del piano zeta e cioè converge per $z = e^{j\omega}$. Di conseguenza è convergente per tutti i valori di z tali che $|z| \geq 1$. Si conclude quindi che $X_+(z)$ è una funzione convergente nella regione del piano z esterna al circolo unitario; essa pertanto corrisponde ad un sistema strettamente causale ($\lambda_n \equiv 0$ per $n \leq 0$) e stabile.

Con analogo ragionamento si può verificare che la funzione:

$$(B.13) \quad X_-(z) = \sum_{n \leq -1} \lambda_n z^{-n}$$

è convergente nella regione del piano zeta interna al circolo unitario; essa pertanto corrisponde ad un sistema strettamente anticausale ($\lambda_n \equiv 0$ per $n \geq 0$) e stabile.

Ponendo allora:

$$(B.14) \quad \Gamma_{yy}(z) = e^{\lambda_0} \cdot e^{X_+(z)} \cdot e^{X_-(z)}$$

è immediato rendersi conto che le funzioni

$$(B.15) \quad H_+(z) = e^{X_+(z)} \quad H_-(z) = e^{X_-(z)}$$

sono convergenti all'esterno e all'interno del circolo unitario del piano zeta rispettivamente e quindi corrispondono a funzioni di trasferimento di sistemi stabili causali e anticausali rispettivamente. Se le funzioni $H_+(z)$ e $H_-(z)$ si normalizzano in modo che il coefficiente di ordine 0 dello sviluppo in serie di potenze di z^{-1} sia unitario, si ha:

$$(B.16) \quad \Gamma_{yy}(z) = \gamma \cdot H_+(z)H_-(z)$$

Poiché, essendo $\log \Gamma_{yy}(e^{j\omega})$ una funzione reale e pari ⁽³⁾ risulta $\lambda_{-n} = \lambda_n = \lambda_n^*$ per cui è

$$(B.17) \quad \begin{aligned} H_-(z) &= \exp \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} \lambda_n z^{-n} \right] = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{-n} z^n \right] = \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^* z^n \right] = \\ &= \exp \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{1}{z^*} \right)^{-n} \right)^* \right] = H_+^*(1/z^*) \end{aligned}$$

cosicché la (B.16) assume la forma:

$$(B.18) \quad \Gamma_{yy}(z) = \gamma \cdot H(z)H^*(1/z^*)$$

dove

- $H(z)$ è una funzione di trasferimento di un sistema LTI stabile e causale;
- $H^*(1/z^*)$ è una funzione di trasferimento di un sistema LTI stabile e anticausale.

Tenendo conto dei risultati sopra ottenuti si conclude che la trasformata zeta della sequenza delle correlazioni di un segnale, se la corrispondente densità spettrale soddisfa le condizioni di Paley-Wiener, può essere fattorizzata in termini di due funzioni della variabile zeta contenente tutte le potenze di z ad esponente positivo e ad esponente negativo rispettivamente. Tali funzioni sono inoltre entrambe moniche (cioè con il coefficiente della potenza di z^0 unitario).

Di particolare interesse è il caso in cui la densità spettrale $\Gamma_{yy}(z)$ è una funzione razionale della variabile z , per cui è espressa dal rapporto:

$$(B.19) \quad \Gamma_{yy}(z) = \frac{N_{yy}(z)}{D_{yy}(z)}$$

di due polinomi $N_{yy}(z)$ e $D_{yy}(z)$.

Dalla condizione $\lambda_{-n} = \lambda_n^*$ discende:

$$(B.20) \quad \Gamma_{yy}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{-n} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n^* z^n = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \left(\frac{1}{z^*} \right)^{-n} \right)^* = \Gamma_{yy}^*(1/z^*)$$

che comporta che se $z = \rho$ è un polo o uno zero di $\Gamma_{yy}(z)$, allora anche $z = 1/\rho^*$ è un polo o uno zero di $\Gamma_{yy}(z)$. Poiché se $|\rho| < 1$, è $|1/\rho^*| > 1$ e viceversa se $|\rho| > 1$, è $|1/\rho^*| < 1$, i poli e gli zeri di $\Gamma_{yy}(z)$ si distribuiscono equamente sia all'interno che all'esterno del circolo unitario del piano zeta. Poiché la $\Gamma_{yy}(z)$ è convergente sul circolo unitario, non sono presenti poli del tipo $\rho = e^{j\omega}$. Tuttavia sul circolo unitario possono essere allocati degli zeri. Se sono presenti

⁽³⁾ Si noti che la densità spettrale è una funzione reale non negativa e pari di ω .

devono presentare una molteplicità pari.

Infatti se $\rho_0 = e^{j\omega_0}$ è uno zero di molteplicità m appartenente al circolo unitario del piano z , la funzione $\Gamma_{yy}(z)$, essendo una funzione reale e non negativa, non deve diventare negativa quando, muovendosi sul circolo unitario, attraversa il punto $e^{j\omega_0}$. D'altra parte può scriversi:

$$(B.21) \quad \Gamma_{yy}(z) = (z - e^{j\omega_0})^m \bar{\Gamma}_{yy}(z)$$

in cui è $\bar{\Gamma}_{yy}(e^{j\omega_0}) \neq 0$. Si costruisca il rapporto $\frac{\Gamma_{yy}(e^{j(\omega_0+\varepsilon)})}{\Gamma_{yy}(e^{j(\omega_0-\varepsilon)})}$. Si ha:

$$(B.22) \quad \begin{aligned} \frac{\Gamma_{yy}(e^{j(\omega_0+\varepsilon)})}{\Gamma_{yy}(e^{j(\omega_0-\varepsilon)})} &= \left(\frac{e^{j(\omega_0+\varepsilon)} - e^{j\omega_0}}{e^{j(\omega_0-\varepsilon)} - e^{j\omega_0}} \right)^m \frac{\bar{\Gamma}_{yy}(e^{j(\omega_0+\varepsilon)})}{\bar{\Gamma}_{yy}(e^{j(\omega_0-\varepsilon)})} = \left(\frac{e^{j\varepsilon} - 1}{e^{-j\varepsilon} - 1} \right)^m \frac{\bar{\Gamma}_{yy}(e^{j(\omega_0+\varepsilon)})}{\bar{\Gamma}_{yy}(e^{j(\omega_0-\varepsilon)})} = \\ &= \left(\frac{e^{j\varepsilon/2}(e^{j\varepsilon/2} - e^{-j\varepsilon/2})}{e^{-j\varepsilon/2}(e^{-j\varepsilon/2} - e^{j\varepsilon/2})} \right)^m \frac{\bar{\Gamma}_{yy}(e^{j(\omega_0+\varepsilon)})}{\bar{\Gamma}_{yy}(e^{j(\omega_0-\varepsilon)})} = (-e^{jm\varepsilon})^m \frac{\bar{\Gamma}_{yy}(e^{j(\omega_0+\varepsilon)})}{\bar{\Gamma}_{yy}(e^{j(\omega_0-\varepsilon)})} = \\ &= (-1)^m e^{jm\varepsilon} \frac{\bar{\Gamma}_{yy}(e^{j(\omega_0+\varepsilon)})}{\bar{\Gamma}_{yy}(e^{j(\omega_0-\varepsilon)})} \end{aligned}$$

Se il segno di tale rapporto è positivo allora $\Gamma_{yy}(e^{j\omega})$ non cambia segno se attraversa il punto $\rho_0 = e^{j\omega_0}$; viceversa, se il rapporto è negativo nell'attraversamento del punto $\rho_0 = e^{j\omega_0}$ la funzione $\Gamma_{yy}(e^{j\omega})$ subisce una variazione di segno. Il limite del rapporto (B.22) per $\varepsilon \rightarrow 0$, è:

$$(B.23) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma_{yy}(e^{j(\omega_0+\varepsilon)})}{\Gamma_{yy}(e^{j(\omega_0-\varepsilon)})} = (-1)^m$$

Si ha un cambiamento di segno se m è dispari per cui tali valori della molteplicità dello zero sono esclusi.

Sulla base di quanto esposto si può concludere nella fattorizzazione spettrale il termine $H(z)$ deve contenere tutti i poli e gli zeri esterni al circolo unitario nonché metà degli eventuali zeri che si trovano sul circolo unitario; in modo analogo $H^*(1/z^*)$ deve contenere tutti i poli e gli zeri interni al circolo unitario nonché l'altra metà degli eventuali zeri disposti sul circolo unitario.

Esempio

Si determini la fattorizzazione spettrale della densità spettrale corrispondente alla funzione di autocorrelazione data dalla:

$$\gamma(k) = a^{-|k|}$$

con a parametro reale ($a > 1$).

Si ha:

$$\Gamma(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{-|k|} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^0 a^{-|k|} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a^{-|k|} z^{-k} - 1$$

La densità spettrale è convergente nell'anello del piano z definito da $a^{-1} \leq |z| \leq a$. In questa regione si ha:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - (az)^{-1}} + \frac{1}{1 - a^{-1}z} - 1 =$$

e cioè

$$\Gamma(z) = (a^2 - 1) \frac{z}{(z-a)(1-az)}$$

La funzione $\Gamma(z)$ presenta uno zero $z_0 = 0$ e due poli a $p_0 = a$ e $p_1 = 1/a$. Scrivendo la $\Gamma(z)$ nella forma:

$$\Gamma(z) = \frac{a^2 - 1}{a^2} \cdot \frac{a}{a-z} \cdot \frac{az}{az-1}$$

Poiché ponendo $H(z) = \frac{a}{z-a}$ è $H^*(1/z^*) = \left(\frac{a}{a-1/z^*}\right)^* = \frac{a}{a-1/z} = \frac{az}{az-1}$ ed inoltre, operando la divisione

lunga si deduce

$$\frac{a}{a-z} = 1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \dots$$

$$\frac{az}{az-1} = 1 + \frac{1}{az} + \frac{1}{a^2 z^2} + \dots$$

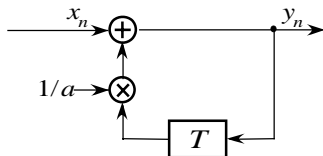


Fig. B.1

si conclude che i parametri della fattorizzazione spettrale della $\Gamma(z)$

sono:

$$H(z) = \frac{a}{a-z} \quad \gamma = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - 1}$$

Il filtro presenta la struttura riportata in Fig. B1.

APPENDICE C

GRADIENTE DI UNA FUNZIONE SCALARE

Il gradiente di una funzione scalare $f(\mathbf{x})$ di un vettore \mathbf{x} ad n dimensioni e a valori complessi è un vettore di n dimensioni le cui componenti sono definite dalle:

$$(C.1) \quad \text{grad}[f(\mathbf{x})]_i = \frac{\partial f}{\partial x'_i} + j \frac{\partial f}{\partial x''_i}$$

dove x'_i e x''_i denotano la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria del complesso x_i rispettivamente.

Due casi sono particolarmente interessanti:

1 - Se \mathbf{v} denota un vettore complesso ad n dimensioni, sia

$$(C.2) \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^H \mathbf{x} + \mathbf{x}^H \mathbf{v}$$

È:

$$(C.3) \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n v_i^* x_i + \sum_{i=1}^n x_i^* v_i = \sum_{i=1}^n v_i^* (x'_i + jx''_i) + \sum_{i=1}^n (x'_i - jx''_i) v_i$$

per cui

$$(C.4) \quad \text{grad}[f(\mathbf{x})]_i = \frac{\partial f}{\partial x'_i} + j \frac{\partial f}{\partial x''_i} = (v_i + v_i^*) - (v_i^* - v_i) = 2v_i$$

e cioè

$$(C.5) \quad \text{grad}[f(\mathbf{x})] = 2\mathbf{v}$$

2 - Se \mathbf{A} denota una matrice hermitiana di dimensioni $(n \times n)$ sia:

$$(C.6) \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$$

È

$$(C.7) \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a_{rs} x_r^* x_s = \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n a_{rs} (x'_r - jx''_r)(x'_s + jx''_s)$$

per cui

$$(C.8) \quad \begin{aligned} \text{grad}[f(\mathbf{x})]_r &= \frac{\partial f}{\partial x'_r} + j \frac{\partial f}{\partial x''_r} = \\ &= \left[\sum_{s=1}^n a_{rs} (x'_s + jx''_s) + \sum_{s=1}^n a_{sr} (x'_s - jx''_s) \right] + j \left[-j \sum_{s=1}^n a_{rs} (x'_s + jx''_s) + j \sum_{s=1}^n a_{sr} (x'_s - jx''_s) \right] = \\ &= \left[\sum_{s=1}^n a_{rs} (x'_s + jx''_s) + \sum_{s=1}^n a_{sr} (x'_s - jx''_s) \right] + \left[\sum_{s=1}^n a_{rs} (x'_s + jx''_s) - \sum_{s=1}^n a_{sr} (x'_s - jx''_s) \right] = \\ &= 2 \sum_{s=1}^n a_{rs} (x'_s + jx''_s) = 2 \sum_{s=1}^n a_{rs} x_s \end{aligned}$$

e pertanto

$$(C.9) \quad \text{grad}[f(\mathbf{x})] = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$$