

LA RIVELAZIONE IN PRESENZA DI INTERFERENZA DI INTERSIMBOLO

1 – Rivelazione di sequenze a minima distanza euclidea.

Nelle reali situazioni, la rivelazione del simbolo trasmesso non può essere considerata indipendente dalla presenza degli altri simboli a causa dell'interferenza di intersimbolo. In questi casi, è conveniente effettuare la rivelazione prendendo in considerazione la trasmissione di una sequenza di simboli $\mathbf{a}_N = \{a_n\}_{n=0}^{N-1}$, comprendente un numero N di dati. In quel che segue, quindi, il segnale (equivalente passa - basso) all'ingresso del ricevitore si presenta nella forma (propria delle modulazioni lineari):

$$(1.1) \quad r(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n q(t-nT) + n(t)$$

dove:

- la sequenza \mathbf{a}_N si suppone composta da elementi complessi appartenenti ad un alfabeto di M dimensioni (modulazione M -aria) equiprobabili ed indipendenti;
- $q(t)$ è una forma d'onda in generale complessa ad energia finita;
- il rumore $n(t)$ è un segnale aleatorio complesso e gaussiano, a media nulla, indipendente dai dati e caratterizzato dalle seguenti funzioni di correlazione:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} E\{n(t_1)n^*(t_2)\} &= 2N_0\delta(t_1-t_2) \\ E\{n(t_1)n(t_2)\} &= 0 \end{aligned}$$

avendo supposto che il rumore all'ingresso del ricevitore sia rappresentato da un segnale gaussiano di tipo passa-banda, a media nulla, stazionario e bianco con una densità spettrale data da $\frac{N_0}{2}$.

Quanto detto equivale a considerare il segnale in arrivo

$$(1.3) \quad r(t) = s(\mathbf{a}_N; t) + n(t)$$

come somma del segnale "utile"

$$(1.4) \quad s(\mathbf{a}_N; t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n q(t-nT)$$

ed il rumore $n(t)$.

Se la stima della sequenza inviata è ottenuta applicando il criterio di massima verosimiglianza, il ricevitore decide a favore di quella sequenza $\hat{\mathbf{a}}_N$ cui corrisponde il massimo della densità di probabilità condizionata $\Pr(\mathbf{a}_N | r(t))$ e cioè:

$$(1.5) \quad \hat{\mathbf{a}}_N = \arg \max_{\mathbf{a}_N} \{\Pr(\mathbf{a}_N | r(t))\}$$

Con riferimento alla (1.4) è immediato riconoscere che la componente utile del segnale ricevuto risulta espressa da una combinazione lineare delle N funzioni:

$$(1.6) \quad \mathbf{S}_N \equiv \{q(t), q(t-T), \dots, q(t-nT), \dots, q(t-(N-1)T)\}$$

che, supposte linearmente indipendenti, individuano un sottospazio \mathbf{S}_N ad N dimensioni. Applicando a tale insieme l'algoritmo di Gram-Schmidt, si può costruire in \mathbf{S}_N una base or-

tonormale di funzioni, in genere complesse. Detta $\mathbf{B}_N \equiv \{u_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$ una base siffatta tale cioè che si abbia:

$$(1.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_r(t)u_s^*(t)dt = \begin{cases} 1 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases}$$

è possibile scrivere:

$$(1.8) \quad s(\mathbf{a}_N; t) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k(\mathbf{a}_N)u_k(t)$$

dove è

$$(1.9) \quad s_k(\mathbf{a}_N) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{a}_N; t)u_k^*(t)dt \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

Allo scopo di valutare la funzione $\Pr(\mathbf{a}_N | r(t))$, si consideri la proiezione ortogonale $r_N(t)$ del segnale $r(t)$ nel sottospazio S_N :

$$(1.10) \quad r_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} r_k u_k(t)$$

in cui i coefficienti r_k sono definiti dai prodotti scalari del segnale $r(t)$ con la generica funzione di base $u_k(t)$:

$$(1.11) \quad r_k = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)u_k^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(\mathbf{a}_N; t)u_k^*(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} n(t)u_k^*(t)dt$$

che diventa:

$$(1.12) \quad r_k = s_k(\mathbf{a}_N) + n_k \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

dove $s_k(\mathbf{a}_N)$ è dato dalla (1.9) e si è posto:

$$(1.13) \quad n_k = \int_{-\infty}^{\infty} n(t)u_k^*(t)dt \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

In forma vettoriale la proiezione ortogonale \mathbf{r}_N di $r(t)$ nel sottospazio S_N assume la forma:

$$(1.14) \quad \mathbf{r}_N = \mathbf{s}(\mathbf{a}_N) + \mathbf{n}_N$$

È opportuno rilevare che poiché la componente del rumore ortogonale al sottospazio S_N è statisticamente indipendente dalla componente appartenente ad S_N , il criterio di massima verosimiglianza può essere riformulato come segue:

$$(1.15) \quad \hat{\mathbf{a}}_N = \arg \max_{\mathbf{a}_N} \{ \Pr(\mathbf{a}_N | \mathbf{r}_N(t)) \}$$

Nel sottospazio S_N il segnale $r_N(t)$ è rappresentato dal vettore \mathbf{r}_N . Di conseguenza si può scrivere:

$$(1.16) \quad \Pr(\mathbf{a}_N | r_N(t)) = \Pr(\mathbf{a}_N | \mathbf{r}_N)$$

D'altra parte, applicando la regola di Bayes, risulta:

$$(1.17) \quad \Pr(\mathbf{a}_N | \mathbf{r}_N) = \frac{p_{r_N | \mathbf{a}_N}(\mathbf{r}_N | \mathbf{a}_N) \Pr(\mathbf{a}_N)}{p_{r_N}(\mathbf{r}_N)}$$

Poiché in virtù dell'ipotesi dell'equiprobabilità e dell'indipendenza statistica degli elementi a_n , le M^N -ple \mathbf{a}_N sono equiprobabili, la (1.15) si riduce alla:

$$(1.18) \quad \hat{\mathbf{a}}_N = \arg \max_{\mathbf{a}_N} \{ p_{\mathbf{a}_N | r_N}(\mathbf{a}_N | \mathbf{r}_N) \}$$

dove la quantità $p_{r_N}(\mathbf{r}_N)$ non è stata considerata poiché positiva ed indipendente dai dati.

È da osservare che le quantità n_k , definite dalle (1.13), costituiscono una sequenza di variabili aleatorie gaussiane a valori complessi, a media nulla ed incorrelate. Infatti, tenendo

presente le ipotesi sul rumore $n(t)$ e la circostanza che la base $\{u_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$ è ortonormale, si ha:

$$\begin{aligned}
 E\{n_m n_n^*\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{n(t_1) n^*(t_2)\} u_m^*(t_1) u_n(t_2) dt_1 dt_2 = \\
 (1.19) \quad &= 2N_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_2 - t_1) u_m^*(t_1) u_n(t_2) dt_1 dt_2 = \\
 &= 2N_0 \int_{-\infty}^{\infty} u_m^*(t) u_n(t) dt = \begin{cases} 2N_0 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}
 \end{aligned}$$

e

$$(1.20) \quad E\{n_m n_n\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{n(t_1) n(t_2)\} u_m^*(t_1) u_n(t_2) dt_1 dt_2 = 0$$

Posto $n_n = \alpha_n + j\beta_n$, le precedenti condizioni comportano:

$$\begin{aligned}
 (1.21) \quad E\{\alpha_m \alpha_n\} &= E\{\beta_m \beta_n\} = \begin{cases} N_0 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \\
 E\{\alpha_m \beta_n\} &= 0 \quad \forall m, n
 \end{aligned}$$

Le variabili aleatorie $\{\alpha_n\}_{n=0}^{N-1}$ e $\{\beta_n\}_{n=0}^{N-1}$ sono gaussiane; a media nulla, incorrelate e presentano la stessa varianza come si deduce dalla (1.21,a). Infine, dalla (1.21,b) si evince che le dette variabili sono tra loro incorrelate e quindi, in quanto gaussiane, statisticamente indipendenti. La densità di probabilità del vettore \mathbf{n}_N , prescindendo da un inessenziale coefficiente moltiplicativo, può essere scritta come segue:

$$(1.22) \quad p_{\mathbf{n}_N}(\mathbf{n}_N) \approx \exp\left[-\frac{1}{2N_0}(\alpha_n^2 + \beta_n^2)\right] = \exp\left[-\frac{1}{2N_0} \sum_{n=0}^{N-1} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)\right] = \exp\left[-\frac{1}{2N_0} \|\mathbf{n}_N\|^2\right]$$

e conseguentemente:

$$(1.23) \quad p_{\mathbf{r}_N | \mathbf{a}_N}(\mathbf{r}_N | \mathbf{a}_N) = p_{\mathbf{n}_N}(\mathbf{r}_N - \mathbf{s}(\mathbf{a}_N)) \approx \exp\left[-\frac{1}{2N_0} \|\mathbf{r}_N - \mathbf{s}(\mathbf{a}_N)\|^2\right]$$

La stima di massima verosimiglianza può così essere posta nella forma:

$$(1.24) \quad \hat{\mathbf{a}}_N = \arg \min_{\mathbf{a}_N} \left\{ \|\mathbf{r}_N - \mathbf{s}(\mathbf{a}_N)\|^2 \right\}$$

Sviluppando il quadrato della norma si ha:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{r}_N - \mathbf{s}(\mathbf{a}_N)\|^2 &= \langle \mathbf{r}_N - \mathbf{s}(\mathbf{a}_N), \mathbf{r}_N - \mathbf{s}(\mathbf{a}_N) \rangle = \\
 &= \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{r}_N - \mathbf{s}(\mathbf{a}_N) \rangle - \langle \mathbf{s}(\mathbf{a}_N), \mathbf{r}_N - \mathbf{s}(\mathbf{a}_N) \rangle = \\
 (1.25) \quad &= \langle \mathbf{r}_N - \mathbf{s}(\mathbf{a}_N), \mathbf{r}_N \rangle^* - \langle \mathbf{r}_N - \mathbf{s}(\mathbf{a}_N), \mathbf{s}(\mathbf{a}_N) \rangle^* = \\
 &= \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{r}_N \rangle^* - \langle \mathbf{s}(\mathbf{a}_N), \mathbf{r}_N \rangle^* - \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{s}(\mathbf{a}_N) \rangle^* + \langle \mathbf{s}(\mathbf{a}_N), \mathbf{s}(\mathbf{a}_N) \rangle^* = \\
 &= \|\mathbf{r}_N\|^2 - \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{s}(\mathbf{a}_N) \rangle - \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{s}(\mathbf{a}_N) \rangle^* + \|\mathbf{s}(\mathbf{a}_N)\|^2
 \end{aligned}$$

e cioè:

$$(1.26) \quad \hat{\mathbf{a}}_N = \arg \max_{\mathbf{a}_N} \left\{ \text{Re}[\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{s}(\mathbf{a}_N) \rangle] - \frac{1}{2} \|\mathbf{s}(\mathbf{a}_N)\|^2 \right\}$$

dove non si è tenuto conto del termine $\|\mathbf{r}_N\|^2$ dato che questo è indipendente dalla sequenza \mathbf{a}_N dei simboli.

Risulta:

$$(1.27) \quad \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{s}(\mathbf{a}_N) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) s^*(\mathbf{a}_N; t) dt$$

e

$$(1.28) \quad \|\mathbf{s}(\mathbf{a}_N)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |s(\mathbf{a}_N; t)|^2 dt$$

che, tenendo conto della (1.4), diventano:

$$(1.29) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{r}_N, \mathbf{s}(\mathbf{a}_N) \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n^* \int_{-\infty}^{\infty} r(t) q^*(t-nT) dt \\ \|\mathbf{s}(\mathbf{a}_N)\|^2 &= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_m a_n^* \int_{-\infty}^{\infty} q(t-mT) q^*(t-nT) dt \end{aligned}$$

La stima della sequenza trasmessa corrisponde al valore di \mathbf{a}_N in corrispondenza della quale la funzione obiettivo

$$(1.30) \quad J(\mathbf{a}_N) = \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n^* \int_{-\infty}^{\infty} r(t) q^*(t-nT) dt \right] - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_m a_n^* \int_{-\infty}^{\infty} q(t-mT) q^*(t-nT) dt$$

raggiunge il massimo.

È interessante osservare che, introducendo la trasformazione di variabili $t-mT \rightarrow t$, risulta:

$$(1.31) \quad \int_{-\infty}^{\infty} q(t-mT) q^*(t-nT) dt = \int_{-\infty}^{\infty} q(t) q^*[t-(n-m)T] dt$$

per cui ponendo:

$$(1.32) \quad y_n = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) q^*(t-nT) dt$$

e

$$(1.33) \quad x_n = \int_{-\infty}^{\infty} q(t) q^*(t-nT) dt$$

la funzione obiettivo può essere semplificata come segue:

$$(1.34) \quad J(\mathbf{a}_N) = \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n^* y_n \right] - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_m a_n^* x_{n-m}$$

2 - Struttura del ricevitore. Filtro adattato.

Sostituendo la (1.3), nella (1.32) si ha:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} y_n &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \int_{-\infty}^{\infty} q(t-kT) q^*(t-nT) dt + \int_{-\infty}^{\infty} n(t) q^*(t-nT) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \int_{-\infty}^{\infty} q(t) q^*[t-(n-k)T] dt + \int_{-\infty}^{\infty} n(t) q^*(t-nT) dt \end{aligned}$$

che, ricordando le (1.33) e ponendo:

$$(2.2) \quad w_n = \int_{-\infty}^{\infty} n(t) q^*(t-nT) dt$$

diviene:

$$(2.3) \quad y_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x_{n-k} + w_n$$

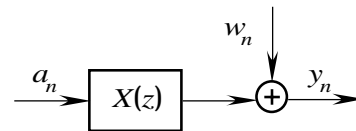


Fig. 1 - Schema equivalente del sistema di trasmissione.

che dà luogo allo schema equivalente tempo discreto rappresentato in Fig. 1.

Dalla (2.3) si evince che $\{w_k\}$ è una sequenza di variabili aleatorie gaussiane correlate, poiché risulta:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} E\{w_n w_{n-k}^*\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{n(t_1) n^*(t_2)\} q^*(t_1-mT) q(t_2-(n-k)T) dt_1 dt_2 = \\ &= 2N_0 \int_{-\infty}^{\infty} q(t-nT) q^*(t-(n-k)T) dt = 2N_0 x_k \end{aligned}$$

Questo comporta che la densità spettrale della sequenza $\{w_k\}$ è:

$$(2.5) \quad W_w(e^{j\omega}) = 2N_0 X(e^{j\omega})$$

dove è

$$(2.6) \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-jn\omega}$$

Dalla (1.34) infine è evidente che la stima della sequenza trasmessa è basata sull'osservazione della sequenza dei campioni $\{y_n\}$ che costituisce la cosiddetta **statistica sufficiente**.

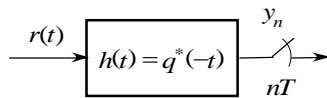


Fig. 2 - Filtro adattato.

Tenendo presente la (1.32) è immediato riconoscere che la sequenza $\{y_n\}$ è ottenuta campionando, negli istanti nT , l'uscita di un filtro LTI di risposta impulsiva $h(t) = q^*(-t)$ quando al suo ingresso è applicato il segnale $r(t)$ (**filtro**

adattato). Infatti, con riferimento alla Fig. 2, si ha:

$$(2.7) \quad y_n = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)h(t-\tau)d\tau \Big|_{t=nT} = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)q^*(\tau-nT)d\tau$$

3 - Riduzione della complessità di calcolo della funzione obiettivo.

Con riguardo alla (1.34) va fatta la seguente osservazione: per una fissata sequenza a_N , la valutazione della funzione obiettivo richiede l'esecuzione di un numero di operazioni di addizione e moltiplicazione che cresce come N^2 . Se N è sufficientemente elevato, il tempo necessario per effettuare la stima di a_N potrebbe diventare inaccettabile.

Per ridurre il numero di operazioni sono state proposte due procedure di calcolo di seguito esaminate.

3.1 - Metodo di Forney [1].

Il metodo di Forney è basato sulla fattorizzazione spettrale della trasformata zeta bilatera della sequenza $\{x_n\}$:

$$(3.1) \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$$

Se sono soddisfatte le condizioni di Paley-Wiener, la funzione $X(z)$ può essere espressa nella forma (vedi Appendice: *Fattorizzazione spettrale*)

$$(3.2) \quad X(z) = \gamma M(z)M^*(1/z^*)$$

dove:

- γ è una costante reale e positiva determinata in modo da rendere le funzioni $M(z)$ e $M^*(1/z^*)$ moniche;
- $M(z)$ è una funzione che comprende tutti i poli e gli zeri interni al circolo unitario del piano z ;
- $M^*(1/z^*)$ è una funzione che comprende tutti i poli e gli zeri esterni al circolo unitario del piano z ;

È opportuno ricordare che la condizione di Paley-Wiener esclude la presenza di poli e di zeri sul circolo unitario del piano z .

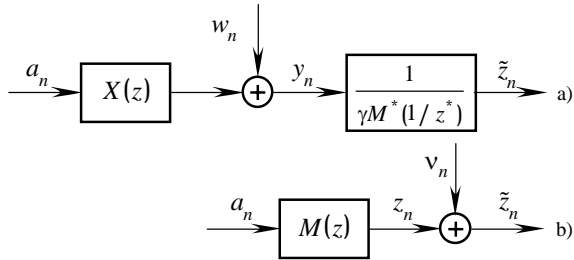


Fig. 3 – Filtro sbiancemente.

Il metodo di Forney consiste nell’inserire a valle del filtro adattato un filtro LTI di caratteristica $1/\gamma M^*(1/z^*)$ cosicché lo schema tempo discreto del sistema di comunicazione si presenta come è mostrato in Fig. 3.a). La cascata dei filtri $X(z)$ e $\frac{1}{\gamma M^*(1/z^*)}$ vale $M(z)$ (v. Fig. 3:b)).

Con riferimento allo schema equivalente di Fig. 3.b) il segnale in uscita diventa:

$$(3.3) \quad \tilde{z}_k = \sum_{n=0}^{N-1} m_n a_{k-n} + v_k$$

in cui $\{m_n\}$ è una sequenza causale e monica e la sequenza di rumore $\{v_n\}$ presenta una densità spettrale che, facendo riferimento allo schema di Fig. 3,a), vale:

$$(3.4) \quad W_v(z) = W_w(z) \frac{1}{\gamma^2 M^*(1/z^*) M(z)} = 2N_0 \frac{X(z)}{\gamma^2 M^*(1/z^*) M(z)} = \frac{2N_0}{\gamma} \frac{M(z) M^*(1/z^*)}{M^*(1/z^*) M(z)} = \frac{2N_0}{\gamma}$$

dove è, per la (2.4), $W_w(z) = 2N_0 X(z)$. Il rumore in uscita è quindi bianco. Per questo motivo il filtro di caratteristica $1/M^*(1/z^*)$ prende il nome di **filtro sbiancante**.

Poiché dalla $M(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n z^{-n}$ si deduce

$$(3.5) \quad M^*(1/z^*) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n (z^*)^n \right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_n^* z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m_{-n}^* z^{-n}$$

dalla (3.2), antitrasformando, si ha:

$$(3.6) \quad x_n = \gamma \cdot m_n * m_{-n}^* = \gamma \sum_k m_k m_{k-n}^*$$

Per determinare infine il segnale in uscita z_n (in assenza di rumore) basta osservare che nel dominio della trasformata zeta dalla condizione $Z(z) = Y(z) \frac{1}{\gamma M^*(1/z^*)}$ si deduce:

$$(3.7) \quad Y(z) = \gamma Z(z) \cdot M^*(1/z^*)$$

e pertanto, antitrasformando:

$$(3.8) \quad y_n = \gamma (z_n * m_{-n}^*) = \gamma \sum_k z_k m_{k-n}^*$$

Sostituendo le (3.8) e (3.6) nella (1.34) si ha:

$$(3.9) \quad J_1 \equiv \sum_{n=0}^{N-1} a_n^* y_n = \gamma \sum_{n=0}^{N-1} a_n^* \left[\sum_k z_k m_{k-n}^* \right] = \gamma \sum_k z_k \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n^* m_{k-n}^* \right] = \gamma \sum_k z_k \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n m_{k-n} \right]^*$$

e:

$$(3.10) \quad J_2 \equiv \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_m a_n^* x_{n-m} = \gamma \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_m a_n^* \left[\sum_k m_k m_{k-(n-m)}^* \right] = \gamma \sum_k \left[\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_m a_n^* m_k m_{k-(n-m)}^* \right]$$

che, ponendo $k = i - m$, diventa:

$$(3.11) \quad J_2 = \gamma \sum_i \left[\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_m a_n^* m_{i-m} m_{i-n}^* \right] = \gamma \sum_i \left[\left(\sum_{m=0}^{N-1} a_m m_{i-m} \right) \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n m_{i-n} \right)^* \right] = \gamma \sum_i \left| \sum_{m=0}^{N-1} a_m m_{i-m} \right|^2$$

La funzione obiettivo così si riduce alla:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} J(\mathbf{a}_N) &= \gamma \left\{ \operatorname{Re} \left[\sum_k z_k \cdot \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n m_{k-n} \right)^* \right] \right\} - \frac{1}{2} \gamma \sum_k \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n m_{k-n} \right|^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \gamma \left\{ \sum_k \left| z_k - \sum_{n=0}^{N-1} a_n m_{k-n} \right|^2 \right\} + \frac{1}{2} \gamma \sum_k |z_k|^2 \end{aligned}$$

Poiché il termine $\frac{1}{2} \gamma \sum_k |z_k|^2$ è indipendente dalla sequenza \mathbf{a}_N , si conclude che la funzione obiettivo può essere riscritta come segue:

$$(3.13) \quad J(\mathbf{a}_N) = \sum_k \left| z_k - \sum_{n=0}^{N-1} a_n m_{k-n} \right|^2$$

Per il calcolo della stima $\hat{\mathbf{a}}_N$, per un'assegnata sequenza \mathbf{a}_N , basta effettuare solo un numero di operazioni di somma e prodotto che cresce linearmente con N .

Un caso particolarmente interessante si ha quando l'impulso di segnalazione $q(t)$,

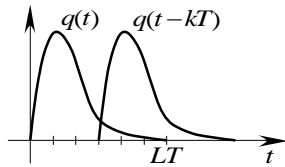


Fig. 4 - Durata della sequenza $\{x_n\}$

supposto causale, si può considerare di durata finita; cioè si suppone che esista un intero L tale che si abbia:

$$(3.14) \quad q(t) = 0 \quad t \in (-\infty, 0] \cup [(L+1)T, \infty)$$

Questo comporta che le quantità x_k si possono considerare nulle per $|k| > L$ (vedi Fig. 4):

$$(3.15) \quad x_k = 0 \quad |k| > L$$

Ciò comporta che la funzione $X(z)$ diventa:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=-L}^L x_k z^{-k} = x_{-L} z^L + x_{-L+1} z^{L-1} + \dots + x_{L-1} z^{-L+1} + x_L z^{-L} = \\ &= z^{-L} (x_{-L} z^{2L} + x_{-L+1} z^{2L-1} + \dots + x_{L-1} z + x_L) \end{aligned}$$

Ne segue che $X(z)$ possiede $2L$ zeri ed un polo all'origine di molteplicità L . Poiché la sequenza $\{x_k\}$ gode della simmetria hermitiana, si deduce che se ρ è uno zero di $X(z)$ anche $1/\rho^*$ è uno zero di $X(z)$; pertanto la $X(z)$ può essere posta nella forma:

$$(3.17) \quad X(z) = \gamma \prod_{i=1}^L (1 - \rho_i z^{-1}) \prod_{i=1}^L (1 - \rho_i^* z)$$

dove $\{\rho_k\}_{k=1}^L$ denota l'insieme degli zeri con $|\rho_i| < 1$. Alla (3.17) corrisponde la fattorizzazione spettrale caratterizzata dal polinomio:

$$(3.18) \quad M(z) = \prod_{i=1}^L (1 - \rho_i z^{-1})$$

e dalla costante γ .

Esempio 1.

Sia

$$q(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) - a \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{t-3T}{T}\right) \quad |a| < 1$$

l'impulso di segnalazione all'ingresso del ricevitore. È:

$$\begin{aligned}
x_k &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) - a \text{rect}\left(\frac{t-\frac{3T}{2}}{T}\right) \right] \left[\text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) - a^* \text{rect}\left(\frac{t-\frac{3T}{2}-kT}{T}\right) \right] dt = \\
&= T \left(\delta_{k,0} - a^* \delta_{k,-1} - a \delta_{k,1} + |a|^2 \delta_{k,0} \right) = \begin{cases} -Ta^* & k = -1 \\ T(1+|a|^2) & k = 0 \\ -Ta & k = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
X(z) &= T \left(-a^* z + (1+|a|^2) - az^{-1} \right) = T \frac{-a^* z^2 + (1+aa^*)z - a}{z} = \\
&= T \frac{-a^* (z-a) \left(z - \frac{1}{a^*} \right)}{z} = T \frac{(z-a)(1-a^*z)}{z} = \\
&= T (1-az^{-1})(1-a^*z)
\end{aligned}$$

per cui la fattorizzazione spettrale di $X(z)$:

$$M(z) = (1-az^{-1}) \quad \gamma = T$$

3.2 – Metodo di Ungerböck [2].

Il metodo di Ungerböck si basa sulla proprietà di simmetria hermitiana della sequenza $\{x_n\}$.

Si consideri il termine $X = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_m a_n^* x_{n-m}$ che compare nell'espressione della funzione obiettivo.

Esso si può porre nella forma:

$$(3.19) \quad X = x_0 \sum_{m=0}^{N-1} |a_m|^2 + \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{\substack{n < m \\ n \leq N-1}} a_m a_n^* x_{n-m} + \sum_{\substack{n > m \\ n \leq N-1}} a_m a_n^* x_{n-m} \right)$$

che, scambiando gli indici m ed n nell'ultima sommatoria a secondo membro, diviene:

$$(3.20) \quad X = x_0 \sum_{m=0}^{N-1} |a_m|^2 + \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{\substack{n < m \\ n \leq N-1}} a_m a_n^* x_{n-m} + \sum_{\substack{n < m \\ n \leq N-1}} a_n a_m^* x_{m-n} \right) = x_0 \sum_{m=0}^{N-1} |a_m|^2 + \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\substack{n < m \\ n \leq N-1}} (a_m a_n^* x_{n-m} + a_n a_m^* x_{m-n})$$

Tenendo conto della condizione $x_{-n} = x_n^*$, si ha:

$$(3.21) \quad X = x_0 \sum_{m=0}^{N-1} |a_m|^2 + 2 \text{Re} \left[\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{\substack{n < m \\ n \leq N-1}} a_n a_m^* x_{m-n} \right]$$

Scambiando ancora una volta gli indici m ed n si ottiene:

$$(3.22) \quad X = x_0 \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 + 2 \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{m < n \\ m \leq N-1}} a_m a_n^* x_{n-m} \right]$$

Se l'impulso di segnalazione è confinato nell'intervallo $[0, LT]$, tenendo conto della (3.15)

si ha:

$$(3.23) \quad X = x_0 \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 + 2 \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{N-1} a_n^* \sum_{m=n-L}^{n-1} a_m x_{n-m} \right]$$

e quinto la funzione obiettivo diventa:

$$(3.24) \quad J(\mathbf{a}_N) = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \text{Re} [a_n^* y_n] - \frac{1}{2} x_0 |a_n|^2 - \text{Re} \left[a_n^* \sum_{m=n-L}^{n-1} a_m x_{n-m} \right] \right\}$$

Dalla precedente è evidente che per il calcolo della stima $\hat{\mathbf{a}}_N$, per un'assegnata sequenza

a_N , il numero di operazioni di somma e prodotto è notevolmente ridotto.

4 - Algoritmo di Viterbi.

Malgrado la semplificazione ottenuta nel paragrafo precedente, per determinare la stima della sequenza trasmessa è necessario che la funzione obiettivo J sia valutata un numero M^N di volte e cioè pari al numero di sequenze di lunghezza N . La complessità di calcolo dunque cresce esponenzialmente con N . Al fine di ridurre tale complessità è stato introdotto da Viterbi un algoritmo, in cui il numero di operazioni cresce proporzionalmente ad N .

Con riferimento alla (3.13), il ricevitore deve scegliere quella sequenza che minimizzi la funzione costo data dalla:

$$(4.1) \quad J(a_N) = \sum_n |z_n - s_n|^2$$

dove s_n dipende dalla sequenza a_N secondo la:

$$(4.2) \quad s_n = \sum_{i=0}^{N-1} a_i m_{n-i}$$

Tenendo conto che i coefficienti m_k sono nulli per $k < 0$ e $k > L$, la precedente diventa:

$$(4.3) \quad s_n = \sum_{i=n-L}^n a_i m_{n-i}$$

che con un'opportuna trasformazione di indici assume la forma:

$$(4.4) \quad s_n = \sum_{i=0}^L a_{n-i} m_i$$

La sequenza $\{s_n\}$ può allora essere interpretata come sequenza in uscita dal filtro trasversale mostrato in Fig. 5 quando al suo ingresso è presente la sequenza dati $\{a_n\}$. Si noti che la lunghezza del filtro trasversale dipende da L e cioè dalla durata dell'impulso di segnalazione in arrivo al ricevitore.

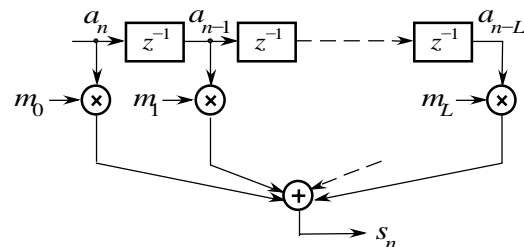


Fig. 5 - Schema equivalente del sistema di trasmissione rappresentato nella forma di filtro trasversale

Dalla (4.4), essendo $s_n = a_n m_0 + \sum_{i=1}^L a_{n-i} m_i$, si

deduce che il generico simbolo s_n dipende dal dato corrente a_n nonché da L dati precedenti.

Questa osservazione conduce a definire il **vettore di stato**:

$$(4.5) \quad \sigma_n = [a_{n-1} \ a_{n-2} \ \dots \ a_{n-L}]^T$$

per modo che il sistema rappresentato dalla Fig. 4 può essere considerato come una macchina a stati finiti la cui evoluzione nel tempo è caratterizzata da equazioni del tipo:

caratterizzata da equazioni del tipo:

$$(4.6) \quad \sigma_{n+1} = f(\sigma_n, a_n)$$

e

$$(4.7) \quad s_n = g(\sigma_n, a_n)$$

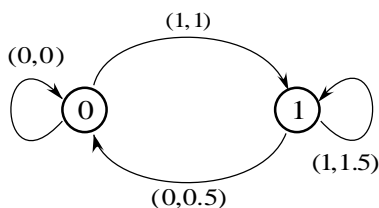


Fig. 6 - Diagramma di transizione di stato di cui all'Esempio E.2.

che costituiscono l'**equazione di transizione di stato** e l'**equazione di uscita** rispettivamente. Lo stato al passo $n+1$ dipende dallo stato σ_n e

dall'ingresso a_n al passo n ; mentre l'uscita s_n al passo n dipende dallo stato e dall'ingresso correnti. Le (4.6) e (4.7) permettono di caratterizzare il sistema mediante un **diagramma di transizione di stato** come quello riportato in Fig. 6.

Esempio 2.

Si consideri il modello ISI rappresentato in Fig. E.1. È

$$L = 1 \quad m_0 = 1 \quad m_1 = \frac{1}{2}$$

per cui

$$s_n = a_n + \frac{1}{2} a_{n-1}$$

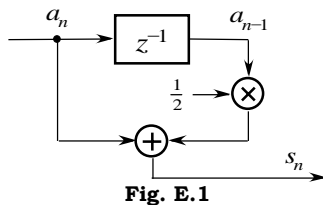


Fig. E.1

Lo stato del sistema è allora $\sigma_n = a_{n-1}$. L'equazione di transizione di stato è:

(a) $\sigma_{n+1} = a_n$

e l'equazione di uscita

(b) $s_n = a_n + \frac{1}{2} \sigma_n$

Le (a) e (b) danno luogo al diagramma di transizione di stato riportato in Fig. 7 nel caso in cui i simboli a_n appartengono all'alfabeto $\{0,1\}$. Gli stati sono individuati da cerchi e le transizioni da uno stato ad un altro sono etichettate dalla coppia (a_n, s_n) mettendo cioè in evidenza il valore dell'uscita s_n che si raggiunge quando è presente il simbolo a_n .

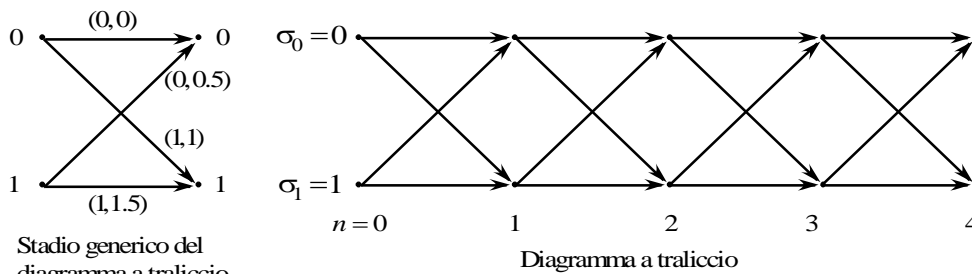


Fig. E.2 - Diagramma a traliccio per l'esempio .E.2

Di maggior comodità è il cosiddetto **diagramma a traliccio** (*diagramma "trellis"*) in cui è descritta l'evoluzione dello stato in funzione del tempo. Con riferimento all'esempio E.2 il diagramma a traliccio si presenta come è mostrato in Fig. E.2.

Sulla base del diagramma a traliccio si possono fare le seguenti considerazioni. Un *percorso* nel diagramma a traliccio è un insieme di rami connessi; per un'assegnata sequenza $\{y_k\}$ ad ogni percorso corrisponde una data sequenza dati $\{a_k\}$ e viceversa. Supposta nota la sequenza dei dati $\{y_k\}$, ogni ramo del diagramma a traliccio può essere caratterizzato

dalla quantità $\left| y_\ell - \sum_m a_m m_{\ell-m} \right|^2$ che costituisce la cosiddetta **metrica di ramo**, quindi la metrica

globale del percorso (detta **metrica di percorso**) può essere calcolata sommando le singole metriche di ramo. Ciò comporta che, se si riesce ad individuare quel percorso con la minima metrica, la successione dei dati che si rileva dal diagramma a traliccio costituisce ovviamente la stima della sequenza inviata secondo il criterio della minima distanza euclidea.

È inoltre importante notare che fra tutti i percorsi che attraversano un assegnato nodo del diagramma, quello a minima metrica è quello caratterizzato da una metrica di percorso, fino a quel nodo, minima. In altri termini in corrispondenza ad ogni nodo si possono escludere quei percorsi a metrica non minima che giungono a quel nodo. I percorsi così selezionati

nati, uno per ogni nodo, costituiscono i cosiddetti **sopravvissuti**. Fra tutti i percorsi composti dai sopravvissuti si considera quello a minima metrica da cui si deduce la stima della sequenza.

Poiché ad ogni nodo del diagramma a traliccio un solo sopravvissuto, è ovvio che procedendo in questo modo la complessità dell'algoritmo cresce proporzionalmente al numero dei nodi e cioè ad N .

Esempio .3

Si supponga adesso che, con riferimento all'esempio precedente, in corrispondenza della trasmissione di 4 simboli, si osservano i dati:

$$y_4 = [0.2 \quad 0.6 \quad 0.9 \quad 0.1]$$

Nella Fig. E.3 è tracciato il diagramma a traliccio dove sono riportate le metriche di ramo definite, in questo caso dalle:

$$\lambda_n = [z_n - s_n]^2 = \left[z_n - \left(a_n + \frac{1}{2} \sigma_n \right) \right]^2$$

che, esplicitate nelle varie transizioni degli stati, diventano:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow 0 & \quad \lambda_n = y_n^2 \\ 0 \rightarrow 1 & \quad \lambda_n = (y_n - 1)^2 \\ 1 \rightarrow 0 & \quad \lambda_n = (y_n - 0.5)^2 \\ 1 \rightarrow 1 & \quad \lambda_n = (y_n - 1.5)^2 \end{aligned}$$

I vari sopravvissuti sono indicati nella stessa Fig. E.2. Da essa si rileva che la stima della sequenza trasmessa di massima verosimiglianza vale:

$$\hat{a}_4 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

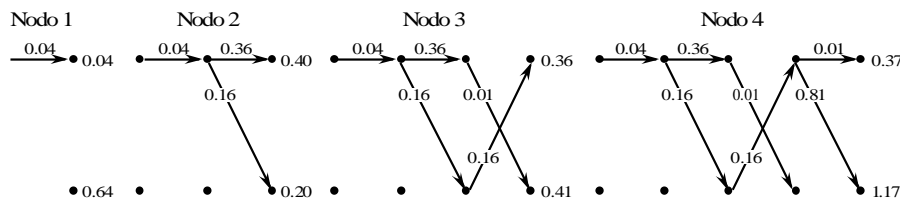
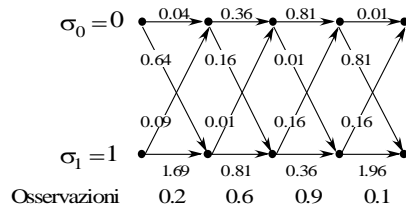


Fig. E.3

Se si adotta il metodo di Ungerbröck, si deve determinare quella sequenza dati che conduce al minimo della funzione obiettivo. Si ponga la (3.24) nella forma:

$$(4.8) \quad J(a_N) = \sum_n \text{Re} [a_n^* y_n - s_n]$$

con

$$(4.9) \quad s_n = \frac{1}{2} x_0 |a_n|^2 + a_n^* \sum_{m=n-L}^{n-1} a_m x_{n-m}$$

Dalla precedente si deduce che simbolo s_n dipende dal dato corrente a_n nonché dai dati precedenti $\{a_{n-L}, a_{n-L+1}, \dots, a_{n-1}\}$ che costituiscono il vettore di stato. L'algoritmo di Viterbi è applicabile purché si definiscano le "metriche" di ramo:

$$(4.10) \quad \lambda_k = \operatorname{Re} \left[a_k^* y_k - s_k \right]$$

e la metrica di percorso:

$$(4.11) \quad J_n = \sum_{k=0}^n \lambda_k$$

È da notare che in questo caso sia le metriche di ramo sia le metriche di percorso possono essere negative.

Bibliografia

- [1] - Forney G. D: *Maximum-Likelihood Sequence Estimation of Digital Sequence in the Presence of Intersymbol Interference*. IEEE Trans. on Information Theory, vol IT-18, n.3, May 1972, pp.363-377.
- [2] - Ungerböck G: *Adaptive Maximum-Likelihood Receiver for Carrier-Modulated Data-Transmission Systems*. IEEE Trans. on Communications, vol. COM-22, n.5, May 1974 pp. 624-636.
- [3] - U. Mengali, M. Morelli: "Trasmissione numerica". McGraw-Hill, 2001.
- [4] - J. G. Proakis: "Digital Communications". McGraw-Hill, 2001.
- [5] - J. B. Barry, E. A. Lee, D. G. Messerschmitt: "Digital Communications". Kluwer Academic Publishers, 2004.