# PROPRIETÀ DELLA MATRICE DI CORRELAZIONE

---

**1 - *Gli autovalori della matrice di autocorrelazione sono reali.***

La matrice di autocorrelazione $\boldsymbol{R}$ è una matrice hermitiana. Di conseguenza se $\boldsymbol{u}$ è un autovettore corrispondente all'autovalore $\lambda$ della matrice $\boldsymbol{R}$ è:

(1) $$\boldsymbol{Ru} = \lambda \boldsymbol{u}$$

che premoltiplicata per $\boldsymbol{u}^H$ fornisce:

(2) $$\boldsymbol{u}^H \boldsymbol{Ru} = \lambda \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u}$$

Prendendo ancora la trasposta coniugata, si ottiene:

(3) $$(\boldsymbol{u}^H \boldsymbol{Ru})^H = \lambda^* (\boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u})^H$$

e cioè

(4) $$\boldsymbol{u}^H \boldsymbol{Ru} = \lambda^* \boldsymbol{u}^H \boldsymbol{u}$$

dove si è tenuto conto che è $\boldsymbol{R}^H = \boldsymbol{R}$. Dalle (a) e (b) è facile dedurre:

(5) $$\lambda = \lambda^*$$

e cioè l'autovalore $\lambda$ è reale.

**2 – *Gli autovettori della matrice $\boldsymbol{R}$ sono ortogonali.***

Infatti siano $\boldsymbol{u}_i$ e $\boldsymbol{u}_j$ due autovettori corrispondenti agli autovalori $\lambda_i$ e $\lambda_j$, supposti distinti. Si ha:

(6) $$\boldsymbol{Ru}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i \text{ e } \boldsymbol{Ru}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j$$

Premoltiplicando la prima delle (a) per $\boldsymbol{u}_j^H$ e la seconda per $\boldsymbol{u}_i^H$, si ha:

(7) $$\boldsymbol{u}_j^H \boldsymbol{Ru}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_j^H \boldsymbol{u}_i \text{ e } \boldsymbol{u}_i^H \boldsymbol{Ru}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_i^H \boldsymbol{u}_j$$

Prendendo la coniugata trasposta della prima della (b) è:

(8) $$\boldsymbol{u}_i^H \boldsymbol{Ru}_j = \lambda_i^* \boldsymbol{u}_i^H \boldsymbol{u}_j$$

od anche, essendo $\lambda_i = \lambda_i^*$:

(9) $$\boldsymbol{u}_i^H \boldsymbol{Ru}_j = \lambda_i \boldsymbol{u}_i^H \boldsymbol{u}_j$$

Dal confronto della (d) con la seconda della (b) si deduce:

(10) $$(\lambda_i - \lambda_j)\boldsymbol{u}_i^H \boldsymbol{u}_j = 0$$

che, essendo gli autovalori distinti comporta:

(11) $$\boldsymbol{u}_i^H \boldsymbol{u}_j = 0 \qquad i \neq j$$

Imponendo inoltre la normalizzazione si ha:

(12) $$\boldsymbol{u}_i^H \boldsymbol{u}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

**3 – *Diagonalizzazione della matrice $\boldsymbol{R}$.***

Se $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i=-N}^{N}$ denotano gli autovettori corrispondenti agli autovalori $\{\lambda_i\}_{i=-N}^{N}$, supposti distinti, si può scrivere:

(13)
$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{-N} &= \lambda_{-N}\boldsymbol{u}_{-N} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{N} &= \lambda_{N}\boldsymbol{u}_{N} \end{aligned}$$

che si può porre anche nella seguente forma matriciale:

(14)
$$\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_{-N} & \dots & \boldsymbol{u}_0 & \dots & \boldsymbol{u}_N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_{-N} & \dots & \boldsymbol{u}_0 & \dots & \boldsymbol{u}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_{-N} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_N\end{bmatrix}$$

Denotando con $\boldsymbol{U}$ e $\Lambda$ le matrici:

(15)
$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}_{-N} & \dots & \boldsymbol{u}_0 & \dots & \boldsymbol{u}_N\end{bmatrix}$$
$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_{-N},\dots,\lambda_0,\dots,\lambda_N) = \begin{bmatrix}\lambda_{-N} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_N\end{bmatrix}$$

si scrive:

(16)
$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}\Lambda$$

Dalla precedente si deduce

(17)
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{U}^{-1}$$

D'altra parte sulla base della (g) del punto 2 si ha:

(18)
$$\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}$$

che comporta $\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}^H$. Si ha quindi:

(19)
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{U}^{-1} = \boldsymbol{U}\Lambda\boldsymbol{U}^H$$

e cioè

(20)
$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=-N}^{N} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^H$$