

LA MODULAZIONE D'ANGOLO

In questo Capitolo è presentata la modulazione d'angolo che rappresenta le modulazioni PM o FM. Sono studiate le caratteristiche spettrali al fine di ottenere informazioni sull'ampiezza di banda del segnale modulato. È discussa a tal proposito la regola di Carson. Una particolare attenzione è riservata al caso di modulante gaussiana. Infine sono presentate le strutture dei rivelatori a discriminatore che dei rivelatori ad aggancio di fase.

II.1 - Premessa.

L'espressione generale di un segnale modulato d'angolo è:

$$(II.1.1) \quad v(t; s(t)) = V_0 \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t) + \varphi_0]$$

dove f_0 e φ_0 rappresentano la frequenza e la fase propria della portante non modulata e $\varphi(t)$ la deviazione istantanea di fase. La deviazione istantanea di frequenza è definita dalla:

$$(II.1.2) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

A seconda della natura della relazione fra la deviazione istantanea di fase o di frequenza e il segnale modulante $s(t)$ si possono distinguere due diverse forme di modulazione d'angolo; precisamente:

a) la **modulazione di fase (PM Phase Modulation)** in cui la deviazione istantanea di fase varia proporzionalmente al segnale modulante:

$$(II.1.3) \quad \varphi(t) = k_p s(t)$$

dove la costante k_F dipende dalle caratteristiche del modulatore. Il segnale modulato è quindi:

$$(II.1.4) \quad v(t; s(t)) = V_0 \cos[2\pi f_0 t + k_p s(t) + \varphi_0]$$

b) la **modulazione di frequenza (FM Frequency Modulation)** in cui la deviazione istantanea di frequenza è proporzionale al segnale modulante secondo la:

$$(II.1.5) \quad \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_F s(t)$$

essendo k_F una costante dipendente dalle caratteristiche del modulatore.

Per il segnale modulato in frequenza la (II.1.1) assume la forma:

$$(II.1.6) \quad v(t; s(t)) = V_0 \cos \left[2\pi f_0 t + 2\pi k_F \int_{t_0}^t s(\tau) d\tau + \varphi_0 \right]$$

essendo t_0 l'istante scelto come iniziale.

È facile dedurre che l'espressione generale di un segnale modulato in angolo può essere posta nella seguente forma generale:

$$(II.1.7) \quad v(t; s(t)) = V_0 \cos[2\pi f_0 t + \beta m(t) + \varphi_0]$$

dove $m(t)$ denota il segnale "modulante" normalizzato:

$$(II.1.8) \quad |m(t)| \leq 1$$

e la costante β rappresenta l'**indice di modulazione**.

Nel caso di modulazione di fase la (II.1.4) si identifica con la (II.1.7) ponendo:

$$(II.1.9) \quad m(t) = \frac{s(t)}{\left|s(t)\right|_{\max}} \quad \beta = k_p \left|s(t)\right|_{\max}$$

mentre, nel caso di modulazione di frequenza, l'identità tra le (II.1.6) e (II.1.7) comporta:

$$(II.1.10) \quad m(t) = \frac{\int_{t_0}^t s(\tau) d\tau}{\left|\int_{t_0}^t s(\tau) d\tau\right|_{\max}} \quad \beta = 2\pi k_F \left|\int_{t_0}^t s(\tau) d\tau\right|_{\max}$$

Dalle (II.1.3) e (II.1.5) si deduce che nel caso di modulazione PM la deviazione istantanea di fase è proporzionale al segnale modulante mentre nella modulazione FM è proporzionale all'integrale del segnale modulante. Queste osservazioni comportano che si può ottenere una modulazione di fase utilizzando un modulatore di frequenza e una modulazione di frequenza utilizzando un modulatore di fase. Considerazioni analoghe si possono dedurre con riguardo ai rivelatori (v. Fig. II.1).

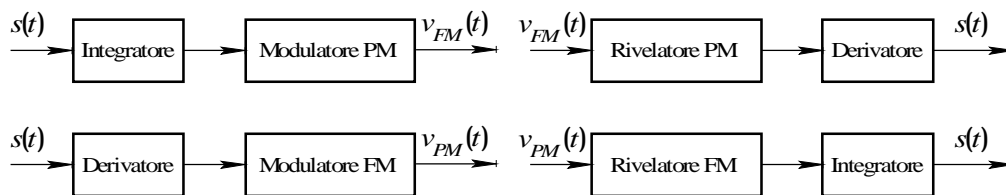


Fig. II.1 - Confronto fra modulatori e rivelatori FM con modulatori e rivelatori PM

Esempio E.II.1

Nel caso in cui il segnale modulante è costituito da una componente monocromatica del tipo:

$$s(t) = V_m \cos(2\pi f_m t)$$

le quantità $m(t)$ e β valgono:

$$\begin{aligned} m(t) &= \cos(2\pi f_m t) & \beta &= k_p V_m & \text{PM} \\ m(t) &= \sin(2\pi f_m t) & \beta &= \frac{k_F V_m}{f_m} & \text{FM} \end{aligned}$$

cosicché nel caso della modulazione di fase la massima deviazione della fase istantanea è:

$$\Delta\phi = \beta$$

e, nel caso della modulazione di frequenza, la massima deviazione della frequenza istantanea è:

$$\Delta f = \frac{\beta}{2\pi} \left| \frac{dm(t)}{dt} \right|_{\max} = \beta f_m$$

II.2 - Caratteristiche spettrali del segnale modulato.

Come nel caso della modulazione d'ampiezza, anche qui è opportuno distinguere se $s(t)$ è un segnale determinato o aleatorio. Nel caso che $s(t)$ sia aleatorio viene preso in considerazione il caso in cui il segnale modulante è gaussiano.

II.2.1 - Segnale modulante determinato.

Con riferimento alla (II.1.7) è facile rendersi conto che la dipendenza del segnale modulato $v(t)$ dal segnale modulante $m(t)$ non è lineare; per questo motivo è difficile determinare, nel caso generale, lo spettro di $v(t)$ in dipendenza delle caratteristiche del messaggio $m(t)$.

Solo nel caso in cui il segnale modulante è costituito da una sinusoidale tale determinazione è semplice. In tal caso essendo $m(t) = \sin 2\pi f_m t$ e ponendo per semplicità di trattazione $\phi_0 = 0$ nella (II.1.7) si ha:

$$(II.2.1) \quad v(t) = V_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{j2\pi f_0 t} e^{j\beta \sin 2\pi f_m t} \right\}$$

La quantità $e^{j\beta \sin 2\pi f_m t}$ è manifestamente una funzione periodica di periodo $T_m = \frac{1}{f_m}$ e per-

tanto si può scrivere:

$$(II.2.2) \quad e^{j\beta \sin 2\pi f_m t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_m t}$$

dove $f_m = \frac{1}{T_m}$ e in cui i coefficienti dello sviluppo C_k sono dati dalla:

$$(II.2.3) \quad C_k = \frac{1}{T_m} \int_{-\frac{T_m}{2}}^{\frac{T_m}{2}} e^{j[\beta \sin 2\pi f_m t - 2\pi k f_m t]} dt$$

che, con la posizione $x = 2\pi f_m t$, diventa:

$$(II.2.4) \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j[\beta \sin x - kx]} dx = J_k(\beta)$$

dove $J_k(\beta)$ è la funzione di Bessel di prima specie di ordine k definita dalla:

$$(II.2.5) \quad J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{k+2n}}{n!(k+n)!}$$

È pertanto:

$$(II.2.6) \quad e^{j\beta \sin 2\pi f_m t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{j2\pi k f_m t}$$

e quindi dalla (II.2.1) discende:

$$(II.2.7) \quad v(t) = V_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{j2\pi k f_m t} e^{j2\pi f_0 t} \right\} = V_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos[2\pi(f_0 + k f_m)t]$$

Notando che:

$$(II.2.8) \quad \begin{aligned} J_{-k}(\beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j[\beta \sin x + kx]} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^0 e^{j[\beta \sin(\pi-y) + k(\pi-y)]} dy = \\ &= e^{jk\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j[\beta \sin y - ky]} dy = (-1)^k J_k(\beta) \end{aligned}$$

risulta:

$$(II.2.9) \quad \begin{aligned} v(t) &= V_0 J_0(\beta) \cos 2\pi f_0 t + \\ &+ V_0 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos[2\pi(f_0 + 2k f_m)t] + V_0 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos[2\pi(f_0 - 2k f_m)t] + \\ &+ V_0 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \cos[2\pi(f_0 + (2k+1)f_m)t] - V_0 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \cos[2\pi(f_0 - (2k+1)f_m)t] \end{aligned}$$

che trasformata secondo Fourier fornisce:

$$(II.2.10) \quad \begin{aligned} V(f) &= \frac{V_0 J_0(\beta)}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \\ &+ \frac{V_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta) \left\{ \begin{aligned} &\delta[f - (f_0 + 2k f_m)] + \delta[f + (f_0 + 2k f_m)] + \\ &+ \delta[f - (f_0 - 2k f_m)] + \delta[f + (f_0 - 2k f_m)] \end{aligned} \right\} + \\ &+ \frac{V_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \left\{ \begin{aligned} &\delta[f - (f_0 + (2k+1)f_m)] + \delta[f + (f_0 + (2k+1)f_m)] + \\ &+ \delta[f - (f_0 - (2k+1)f_m)] + \delta[f + (f_0 - (2k+1)f_m)] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Dalla (II.2.10) si deduce che lo spettro del segnale $v(t)$ si compone di una s di righe disposte simmetricamente attorno a f_0 e a $-f_0$ come è mostrato in Fig. II.2 per un assegnato valore dell'indice di modulazione β e tali righe si succedono ad intervalli di frequenza regolari e di valore pari a f_m .

Si consideri infine il caso in cui l'indice di modulazione β risulti sufficientemente piccolo.

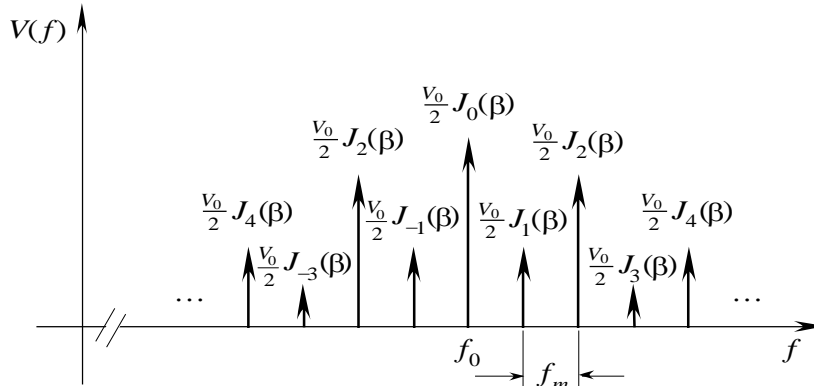


Fig. II.2 - Spettro di un segnale modulato in angolo con modulante sinusoidale.

Scrivendo il segnale modulato, dato dalla (II.1.7), nella forma:

$$(II.2.11) \quad v(t) = V_0 \{ \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \cos[\beta m(t)] - \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \sin[\beta m(t)] \}$$

e ponendo:

$$(II.2.12) \quad \cos[\beta m(t)] \cong 1 \quad \sin[\beta m(t)] \cong \beta m(t)$$

si ha:

$$(II.2.13) \quad v(t) = V_0 \{ \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - \beta m(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \}$$

da cui:

$$(II.2.14) \quad V(f) = \frac{V_0}{2} \left\{ e^{j\varphi_0} \delta(f - f_0) + e^{-j\varphi_0} \delta(f + f_0) + j\beta \left[e^{j\varphi_0} M(f - f_0) + e^{-j\varphi_0} M(f + f_0) \right] \right\}$$

avendo indicato con \$M(f)\$ lo spettro del segnale \$m(t)\$.

II.2.2 - Segnale modulante aleatorio.

Supponendo che \$\varphi_0\$ sia una variabile aleatoria indipendente da \$m(t)\$ ed uniformemente distribuita in \$[0, 2\pi)\$, la funzione di autocorrelazione di \$v(t)\$ è:

$$(II.2.15) \quad R_v(t, \tau) = E \{ v(t)v(t + \tau) \} = V_0^2 E \left\{ \text{Re} \left[e^{j[2\pi f_0 t + \beta m(t) + \varphi_0]} \right] \cdot \text{Re} \left[e^{j[2\pi f_0 (t + \tau) + \beta m(t + \tau) + \varphi_0]} \right] \right\}$$

dove la media si intende effettuata sia rispetto a \$\varphi(t)\$ che alla variabile aleatoria \$\varphi_0\$.

Ricordando la seguente proprietà dei numeri complessi:

$$(II.2.16) \quad \text{Re}[x] \cdot \text{Re}[y] = \frac{x + x^*}{2} \cdot \frac{y + y^*}{2} = \frac{x^* y + xy^*}{4} + \frac{xy + x^* y^*}{4} = \frac{1}{2} \text{Re}[x^* y] + \frac{1}{2} \text{Re}[xy]$$

la precedente si scrive:

$$(II.2.17) \quad R_v(t, \tau) = \frac{V_0^2}{2} E \left\{ \text{Re} \left[e^{j[2\pi f_0 \tau + \beta m(t + \tau) - \beta m(t)]} \right] + \text{Re} \left[e^{j[2\pi f_0 (2t + \tau) + \beta m(t + \tau) + \beta m(t) + 2\varphi_0]} \right] \right\}$$

Eseguendo la media rispetto a \$\varphi_0\$, essendo:

$$(II.2.18) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j2\varphi_0} d\varphi_0 = 0$$

la (II.2.17) si semplifica nella:

$$(II.2.19) \quad R_v(t, \tau) = \frac{V_0^2}{2} \text{Re} \left[e^{j2\pi f_0 \tau} E \left\{ e^{j\beta[m(t + \tau) - m(t)]} \right\} \right]$$

dove si è indicata con \$E\{\cdot\}\$ la media rispetto a \$m(t)\$. Denotando infine con \$k(\tau)\$ la quantità:

$$(II.2.20) \quad k(\tau) = E \left\{ e^{j\beta[m(t + \tau) - m(t)]} \right\}$$

la (II.2.19) diventa:

$$(II.2.21) \quad R_v(\tau) = \frac{V_0^2}{2} k(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau)$$

Si riconosce dalla precedente che la stazionarietà del segnale modulante e quindi della deviazione istantanea di fase $\varphi(t)$ comporta la stazionarietà del segnale modulato dato che la sua funzione di autocorrelazione dipende solo da τ (stazionarietà in senso lato).

Particolarmente interessante è il caso in cui il segnale modulante $m(t)$ è gaussiano, stazionario, a media nulla e caratterizzato da una funzione di autocorrelazione pari a $R_m(\tau)$. In tali ipotesi il segnale $x(t) = \beta[m(t+\tau) - m(t)]$ è gaussiano, a media nulla e varianza:

$$(II.2.22) \quad \sigma_x^2 = E\{\beta^2 [m(t+\tau) - m(t)]\} = 2\beta^2 [R_m(0) - R_m(\tau)]$$

Per determinare la funzione di autocorrelazione $R_v(\tau)$ basta valutare la media $E\{e^{jx(t)}\}$. A proposito si ricordi che la funzione caratteristica di una variabile gaussiana x a media nulla e varianza σ^2 vale ¹:

$$(II.2.23) \quad \Phi_x(\omega) = E\{e^{j\omega x}\} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$$

per cui è

$$(II.2.24) \quad E\{e^{jx(t)}\} = \Phi_x(1) = e^{\beta^2[R_m(\tau) - R_m(0)]}$$

Ne viene dunque:

$$(II.2.25) \quad R_v(\tau) = \frac{V_0^2}{2} \operatorname{Re} \left[e^{j2\pi f_0 \tau} e^{\beta^2[R_m(\tau) - R_m(0)]} \right] = \frac{V_0^2}{2} e^{\beta^2[R_m(\tau) - R_m(0)]} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

Trasformando secondo Fourier la (II.2.21) è possibile ottenere l'espressione della densità spettrale di potenza $W_v(f)$ del segnale modulato. Tuttavia, a causa della forma della (II.2.21) non è possibile dedurre per la $W_v(f)$ un'espressione in forma chiusa valida nel caso generale.

È opportuno a questo proposito considerare separatamente i casi limite in cui è $\beta \ll 1$ e $\beta \gg 1$.

a) Caso $\beta \ll 1$

Poiché, in tali circostanze, si può scrivere:

$$(II.2.26) \quad e^{j\beta[m(t+\tau) - m(t)]} \cong 1 + j\beta[m(t+\tau) - m(t)] - \frac{\beta^2}{2}[m(t+\tau) - m(t)]^2$$

risulta:

$$(II.2.27) \quad E\{e^{j\beta[m(t+\tau) - m(t)]}\} \cong 1 - \beta^2[R_m(0) - R_m(\tau)]$$

È allora:

$$(II.2.28) \quad R_v(\tau) = \frac{V_0^2}{2} \{1 - \beta^2[R_m(0) - R_m(\tau)]\} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

da cui:

$$(II.2.29) \quad W_v(f) = \frac{V_0^2}{4} \{1 - \beta^2[R_m(0)]\} \{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\} - \beta^2 \frac{V_0^2}{4} W_m \{\delta(f - f_0) + W_m(f + f_0)\}$$

con

$$(II.2.30) \quad W_m(f) = F[R_m(\tau)]$$

b) Caso $\beta \gg 1$

All'aumentare dell'indice di modulazione β aumenta l'ampiezza di banda B del segnale modulato; conseguentemente la funzione $R_v(\tau)$ tende a zero sempre più rapidamente. Di

¹ Vedi: A. Papoulis: Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw Hill. N.Y. 1965, pag. 153, 159 e segg.

conseguenza $R_v(\tau)$ si può ritenere diversa da zero solo per valori di τ sufficientemente piccoli dove può ritenersi valida l'approssimazione:

$$(II.2.31) \quad m(t + \tau) \cong m(t) + \dot{m}(t)\tau$$

e quindi la (II.2.21) può approssimarsi con la:

$$(II.2.32) \quad R_v(\tau) = \frac{V_0^2}{2} E \left\{ e^{j\beta \dot{m}(t)\tau} \right\} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

Nel caso di modulazione di frequenza, essendo:

$$(II.2.33) \quad \beta \dot{m}(t) = 2\pi k_F s(t)$$

la (II.2.32) diventa:

$$(II.2.34) \quad R_v(\tau) = \frac{V_0^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k_F x \tau} p_s(x) dx$$

essendo $p_s(x)$ la densità di probabilità del primo ordine associata al segnale $s(t)$.

Per il calcolo della $W_s(f)$ basta osservare che essendo:

$$(II.2.35) \quad \begin{aligned} \mathbf{F} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k_F \tau x} p_s(x) dx \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k_F \tau x} p_s(x) dx \right] e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_s(x) e^{-j2\pi(f - k_F x)\tau} d\tau ds = \int_{-\infty}^{\infty} p_s(x) \delta(f - k_F x) dx = \\ &= \frac{1}{k_F} \int_{-\infty}^{\infty} p_s\left(\frac{y}{k_F}\right) \delta(f - y) dy = \frac{1}{k_F} p_s\left(\frac{f}{k_F}\right) \end{aligned}$$

si ha, trasformando la. (II.2.35):

$$(II.2.36) \quad W_v(f) = \frac{V_0^2}{4k_F} \left\{ p_s\left(\frac{f - f_0}{k_F}\right) + p_s\left(\frac{f + f_0}{k_F}\right) \right\}$$

II.3 - Ampiezza di banda del segnale modulato.

Da quanto esposto nel paragrafo precedente si può dedurre che l'ampiezza di banda di un segnale modulato d'angolo, almeno nel caso di modulante sinusoidale, è infinita. Tuttavia se si considera il fatto che le ampiezze delle armoniche presenti nello spettro del segnale modulato decrescono se ci si allontana dalla frequenza della portante è possibile definire un'ampiezza di banda efficace limitata. È da osservare inoltre che tale ampiezza di banda dipende dall'indice di modulazione β poiché il coefficiente dell'armonica di ordine n è proporzionale alla funzione $J_n(\beta)$. In Fig. II.3 è riportato l'andamento di alcune funzioni di Bessel in dipendenza del parametro β .

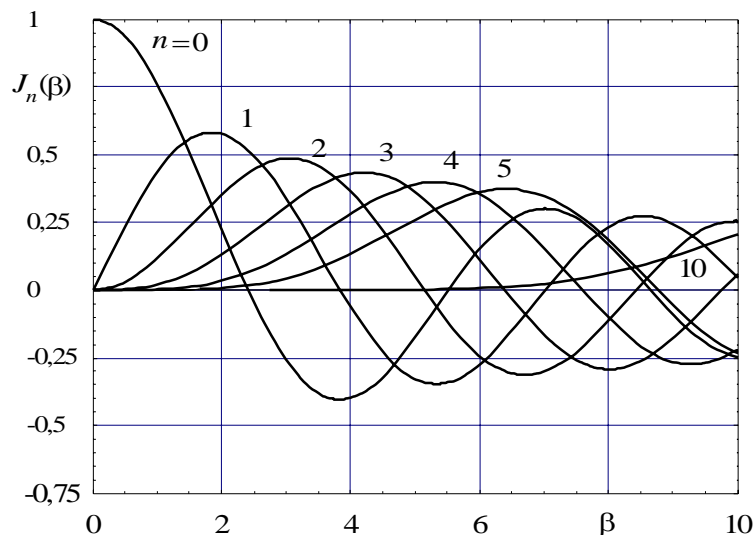


Fig. II.3 - Funzioni di Bessel di prima specie.

Facendo riferimento alla (II.2.9) è immediato riconoscere che la potenza $P_v = \frac{V_0^2}{2}$ del segnale modulato può essere espressa, nel caso di modulante sinusoidale, nella forma:

$$(II.3.1) \quad P_v = \frac{V_0^2}{2} \left[J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\beta) \right]$$

Di conseguenza l'aliquota di potenza che, per un assegnato valore dell'indice di modulazione, è contenuta nelle prime N armoniche dello spettro vale:

$$(II.3.2) \quad P_N = \frac{V_0^2}{2} \left[J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^N J_n^2(\beta) \right]$$

Questo comporta che se si vuole definire la banda equivalente sulla base della potenza, basta considerare il valore dell'intero N in corrispondenza del quale le N armoniche contenute nello spettro del segnale diano luogo a una potenza che sia un'aliquota ε della potenza totale. E cioè

$$(II.3.3) \quad J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} J_n^2(\beta) = \varepsilon$$

dove si è tenuto conto che è $J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$. Ritenendo sufficiente un'ampiezza spettrale che contenga il 98% della potenza totale del segnale risulta $N(\varepsilon) = \beta + 1$. Poiché le righe dello spettro si distanziano l'una dall'altra di f_m , la banda equivalente vale:

$$(II.3.4) \quad B = 2(1 + \beta)f_m$$

Facendo riferimento all'Esempio E.II.1 si riconosce che l'indice di modulazione β può essere definito come il rapporto fra la massima deviazione di frequenza Δf del segnale modulato e la frequenza della modulante f_m . Queste considerazioni consentono di estendere la formula (II.3.4) a una modulante non sinusoidale, sostituendo nella (II.3.4) la quantità $D = \frac{\Delta f}{f_m}$, al posto di β , dove stavolta f_m rappresenta il valore massimo della frequenza contenuta nel segnale modulante. La banda equivalente vale dunque:

$$(II.3.5) \quad B = 2(1 + D)f_m = 2(f_m + \Delta f)$$

che costituisce la **regola di Carson**.

Esempio E.II.3

Nel caso di modulante sinusoidale $s(t) = V_m \cos(2\pi f_m t)$ le (II.3.4) calcolate per alti valori dell'indice di modulazione, diventano:

$$\begin{aligned} B &\cong 2\beta f_m = 2k_P V_m f_m && \text{PM} \\ B &\cong 2\beta f_m = 2k_F V_m && \text{FM} \end{aligned}$$

dalle quali si evince che l'ampiezza di banda risulta indipendente da f_m per la modulazione di frequenza e proporzionale a f_m per la modulazione di fase. La modulazione di frequenza è allora in grado di utilizzare meglio il canale di trasmissione che non la modulazione di fase.

Nel caso di segnale modulante gaussiano, se $K(f)$ denota la trasformata di Fourier della funzione $k(\tau)$, definita dalla (II.2.20), la densità spettrale del segnale modulato (II.2.21) vale:

$$(II.3.6) \quad W_v(f) = \frac{V_0^2}{4} [K(f - f_0) + K(f + f_0)]$$

Una valutazione della banda occupata dal segnale modulato può essere, in tal caso, fornita dalla cosiddetta banda efficace definita dalla:

$$(II.3.7) \quad B_e^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 K(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} K(f) df}$$

Se $k(\tau)$ ammette derivate fino al secondo ordine almeno, risulta:

$$(II.3.8) \quad F[k''(\tau)] = -4\pi^2 f^2 K(f)$$

cosicché può scriversi:

$$(II.3.9) \quad 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} f^2 K(f) df = -k''(0)$$

D'altra parte è:

$$(II.3.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(f) df = k(0) = 1$$

e quindi la (II.3.7) assume la forma:

$$(II.3.11) \quad B_e^2 = -\frac{k''(0)}{4\pi^2}$$

Tenendo conto della (II.2.20) si ha:

$$(II.3.12) \quad k''(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2} \left[e^{\beta[R_m(\tau) - R_m(0)]} \right] = \left[\beta^2 R_m''(\tau) + \beta^4 (R_m'(\tau))^2 \right] \cdot e^{\beta[R_m(\tau) - R_m(0)]}$$

e quindi:

$$(II.3.13) \quad k''(0) = \beta^2 R_m''(0)$$

dove si è tenuto conto del fatto che poiché in $\tau = 0$ la funzione di autocorrelazione assume il massimo, è ivi $R_m'(0) = 0$.

La banda efficace è data dalla:

$$(II.3.14) \quad B_e = \frac{\beta}{2\pi} \sqrt{-R_m''(0)}$$

Nel caso di modulazione di fase, si ha, ricordando le (II.1.9):

$$(II.3.15) \quad R_m(\tau) = \frac{R_s(\tau)}{|s(t)|_{\max}^2}$$

e quindi la (II.3.14) diviene:

$$(II.3.16) \quad B_e = \frac{k_p}{2\pi} \sqrt{-R_s''(0)}$$

che, introducendo la banda efficace del segnale modulante $s(t)$, definita, analogamente alla

(II.3.7) dalla:

$$(II.3.17) \quad B_s^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 W_s(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} W_s(f) df} = -\frac{R_s''(0)}{4\pi^2 R_s(0)} = -\frac{R_s''(0)}{4\pi^2 P_s}$$

assume la forma:

$$(II.3.18) \quad B_e = k_p B_s \sqrt{P_s}$$

dove si è indicato con P_s la potenza specifica del segnale $s(t)$.

Nel caso di modulazione di frequenza, risulta per le (II.1.10):

$$(II.3.19) \quad R_s(\tau) = \left| \int_{t_0}^t s(\tau) d\tau \right|_{\max}^2 \quad R_m'(\tau) = - \left| \int_{t_0}^t s(\tau) d\tau \right|_{\max}^2 \quad R_m(\tau)$$

dove si utilizzata la relazione $R_s'(\tau) = -R_s''(\tau)$.

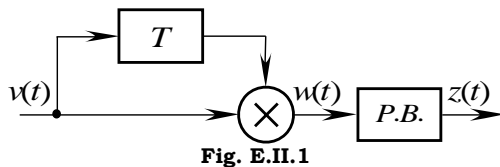
Sostituendo i valori così ottenuti nella (II.3.16) si ottiene:

$$(II.3.20) \quad B_e = k_F \sqrt{R_s(0)} = k_F \sqrt{P_s}$$

Nei sistemi di radiodiffusione FM la variazione di frequenza, come consigliata dal FCC (Federal Communications Commission) è fissata a 75 kHz. Se si assume che la massima frequenza contenuta in un segnale audio è di 15 kHz allora il corrispondente valore di β è pari a 5. La banda del segnale modulato risulta allora eguale a $B = 2 \cdot 6 \cdot 15 = 180$ kHz.

Esempio E.II.4

Una particolare applicazione della modulazione FM si riscontra nel funzionamento del radar ad onda continua per la misura della distanza. A tale scopo si consideri un segnale modulato in FM la cui frequenza istantanea vari secondo la



$$f(t) = f_0 + \gamma t$$

detto segnale "chirp". Il segnale modulato allora è:

$$v(t) = V_0 \cos \left[2\pi \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + \varphi \right] = V_0 \cos \left[2\pi f_0 t + \pi \gamma t^2 + \varphi_0 \right]$$

$$\text{essendo } \varphi_0 = \varphi - (f_0 t_0 + \pi \gamma t_0^2).$$

Si supponga adesso che il segnale $v(t)$ subisca un ritardo T ed il segnale così ritardato venga impiegato

come è indicato schematicamente in Fig. E.III.1. Con riferimento alle notazioni di detta figura, si ha:

$$\begin{aligned} w(t) &= v(t)v(t-T) = \\ &= V_0^2 \cos \left[2\pi f_0 t + \pi \gamma t^2 + \varphi_0 \right] \cdot \cos \left[2\pi f_0 (t-T) + \pi \gamma (t-T)^2 + \varphi_0 \right] = \\ &= \frac{V_0^2}{2} \left\{ \cos \left[2\pi f_0 T + \pi \gamma (t^2 - (t-T)^2) \right] + \cos \left[2\pi f_0 (2t-T) + \pi \gamma (t^2 + (t-T)^2) + 2\varphi_0 \right] \right\} = \\ &= \frac{V_0^2}{2} \left\{ \cos \left[2\pi (\gamma T) t + (2\pi f_0 T - \pi \gamma T^2) \right] + \cos \left[2\pi (2f_0 - \gamma T) t + 2\pi \gamma t^2 + (\pi \gamma T^2 + 2\varphi_0) \right] \right\} \end{aligned}$$

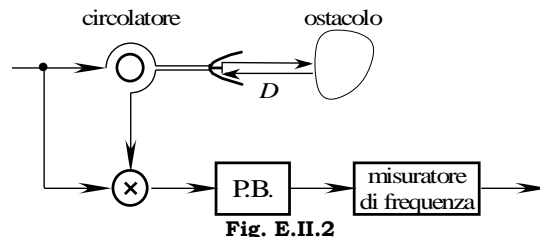
Il segnale $w(t)$ contiene una componente a frequenza γT ed una componente il cui contenuto in frequenza è centrato attorno alla frequenza $2f_0 - \gamma T$. Supposto che la quantità γT sia molto più piccola di $2f_0$, è possibile isolare tale componente con un filtro passa basso per cui il segnale in uscita diviene:

$$z(t) = \frac{V_0^2}{2} \cos \left[2\pi (\gamma T) t + (2\pi f_0 T - \pi \gamma T^2) \right]$$

In un radar ad onda continua il segnale modulato è inviato ad un'antenna. Il segnale di ritorno, riflesso da un ostacolo posta a distanza D dall'antenna, è moltiplicato con il segnale riferimento e filtrato come è indicato in Fig. E.III.2. La lettura della frequenza del segnale in uscita fornisce il valore della frequenza $F = \gamma T$ che vale:

$$F = \frac{2\gamma D}{c}$$

dalla quale si può dedurre la distanza essendo c la velocità di propagazione dell'onda pari alla velocità della luce (300.000 km/sec).



II.4 - Rivelatori.

La rivelazione di segnali modulati in frequenza può essere realizzata in due modi distinti e cioè con i rivelatori a discriminatore e i rivelatori ad anello ad aggancio di fase.

III.4.1 - Rivelatori a discriminatore.

Si consideri la derivata della (II.1.7). Si ha:

$$(II.4.1) \quad \frac{dv}{dt} = -V_0 \left[2\pi f_0 + \beta \frac{dm}{dt} \right] \cos \left[2\pi f_0 t + \beta m(t) + \varphi_0 \right]$$

Essa rappresenta un segnale modulato sia in ampiezza che in frequenza. In particolare l'involuppo di modulazione è:

$$(II.4.2) \quad V(t) = V_0 \left| 2\pi f_0 + \beta \frac{dm}{dt} \right|$$

Se $m(t)$ è un segnale di tipo passa basso di banda f_m , la trasformata di Fourier di $\frac{dm}{dt}$ è $F\left\{\frac{dm(t)}{dt}\right\} = j2\pi f F\{m(t)\} = j2\pi f M(f)$. Si ha allora:

$$(II.4.3) \quad \left|\frac{dm(t)}{dt}\right| = \left|\int_{-f_m}^{f_m} j2\pi f M(f) e^{j2\pi f t} df\right| \leq \int_{-f_m}^{f_m} |2\pi f| |M(f)| df \leq 2\pi f_m \int_{-f_m}^{f_m} |M(f)| df$$

che significa che $\frac{dm}{dt}$ è un segnale limitato. Di conseguenza, se si verifica la condizione:

$$(II.4.4) \quad 2\pi f_0 > 2\pi \beta f_m \int_{-f_m}^{f_m} |M(f)| df$$

l'involuppo di modulazione dipende linearmente da $\frac{dm}{dt}$ per cui si ha:

$$(II.4.5) \quad V(t) = \begin{cases} V_0 [2\pi f_0 + 2\pi k_F s(t)] & \text{modulazione FM} \\ V_0 \left[2\pi f_0 + k_P \frac{ds(t)}{dt}\right] & \text{modulazione PM} \end{cases}$$

Queste considerazioni portano ad individuare uno schema del ricevitore (detto ricevitore a discriminatore) come quello rappresentato in Fig. III.4.

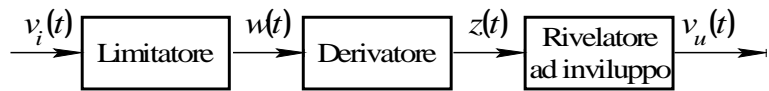


Fig. II.4 - Schema di un discriminatore

Il limitatore è stato introdotto per eliminare le eventuali variazioni dell'ampiezza del segnale in arrivo. Esso è sostanzialmente costituito da un elemento non lineare la cui caratteristica ingresso-uscita è data dalla $y = \text{segn}[x]$ seguito da un filtro passa-banda la cui banda è centrata alla frequenza f_0

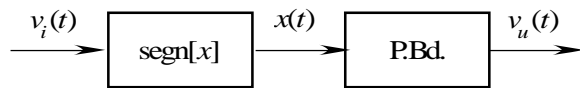


Fig. II.5 - Schema di un limitatore

della portante, come è mostrato in Fig. III.5. Se

$$(II.4.6) \quad v_i(t) = V(t) \cos[\vartheta(t)]$$

in cui $\vartheta(t) = 2\pi f_0 t + 2\pi k_F \int_{t_0}^t s(\tau) d\tau + \varphi_0$ e $V(t)$ un'ampiezza poco discosta da V_0 , denota il segnale in ingresso al limitatore, si ha:

$$(II.4.7) \quad x(t) = \text{segn}[V(t) \cos \vartheta]$$

La grandezza $x(t)$, supponendo $V(t)$ non negativo, se considerata come funzione della variabile ϑ , costituisce un'onda quadra di periodo 2π che sviluppata in serie di Fourier diventa:

$$(II.4.8) \quad x(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos \vartheta - \frac{1}{3} \cos 3\vartheta + \frac{1}{5} \cos 5\vartheta + \dots \right]$$

Ricordando l'espressione di ϑ , si riconosce che il segnale $x(t)$ è pari alla somma di segnali modulati in FM con portanti pari a $f_0, 3f_0, 5f_0, \dots$ per cui all'uscita del filtro passa-banda si ha:

$$(II.4.9) \quad v_u(t) = V_0 \cos \left[2\pi f_0 t + 2\pi k_F \int_{t_0}^t s(\tau) d\tau + \varphi_0 \right]$$

Con riferimento alla Fig. III.4 è facile verificare che essendo:

$$(II.4.10) \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

la relazione ingresso-uscita del derivatore, sua risposta in frequenza è data dalla:

$$(II.4.11) \quad H(f) = j2\pi f \quad f_0 - \frac{B}{2} \leq |f| \leq f_0 + \frac{B}{2}$$

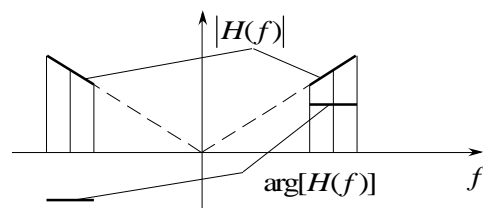


Fig. II.6 - Caratteristiche spettrali del derivatore

Essa quindi è caratterizzata da un modulo teneramente dipendente dalla frequenza come è mostrato in Fig. III.6.

II.4.1 – Rivelatori ad aggancio di fase.

Il rivelatore ad aggancio di fase PLL (**P**hase **L**ocked **L**oop) è un sistema a retroazione il cui schema è riportato in Fig. III.7.

Il rivelatore di fase è un dispositivo che fornisce in uscita un segnale che è una funzione monotona della differenza delle fasi istantanee dei segnali in ingresso. Normalmente esso è costituito nella forma riportata in Fig. III.8; per

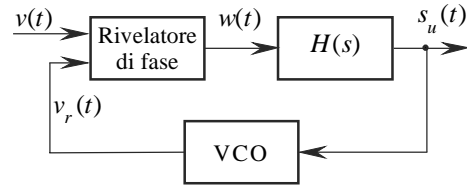


Fig. II.7 - Dispositivo ad aggancio di fase.

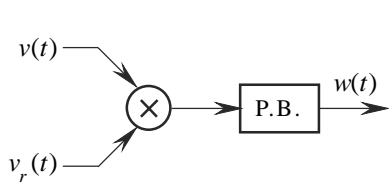


Fig. II.8 – Rivelatore di fase.

$$(II.4.14) \quad w(t) = \frac{V_0 V_r}{2} \sin[\phi(t) - \vartheta(t)]$$

in quanto il filtro passa-basso, supposto ideale, presenta una caratteristica spettrale tale da lasciare inalterata la componente a frequenza zero ma da impedire il transito alla componente di frequenza $2f_0$. La caratteristica del rivelatore di fase si presenta come è mostrato in Fig. III.9 in cui si è denotata con

$$(II.4.15) \quad \psi(t) = \phi(t) - \vartheta(t)$$

la differenza fra le fasi.

Il blocco denotato con VCO (**V**oltage **C**ontrolled **O**scillator) è denominato oscillatore controllato in tensione il cui funzionamento è assimilabile a quello di un modulatore di frequenza. Esso cioè fornisce in uscita il segnale (II.4.13) dove $\vartheta(t)$ è dato dalla:

$$(II.4.16) \quad \vartheta(t) = 2\pi k_r \int_{t_0}^t s_u(\tau) d\tau + \vartheta_0$$

in cui k_r denota un coefficiente denotato *sensibilità in frequenza del VCO* le cui dimensioni sono Hz/Volt.

Tenendo conto delle (II.4.14) e (II.4.15), l'uscita del filtro passa basso potrà pertanto essere espressa dalla:

$$(II.4.17) \quad s_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) h(t - \tau) d\tau = \frac{V_0 V_r}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[\psi(\tau)] h(t - \tau) d\tau$$

Derivando la (II.4.15) rispetto al tempo e tenendo conto delle (II.4.16) e (II.4.17) si ottiene:

$$(II.4.18) \quad \begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= \frac{d\phi(t)}{dt} - \frac{d\vartheta(t)}{dt} = \frac{d\phi(t)}{dt} - 2\pi k_r s_u(t) = \\ &= \frac{d\phi(t)}{dt} - 2\pi k_r \frac{V_0 V_r}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[\psi(\tau)] h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

cui se i segnali in ingresso sono della forma:

$$(II.4.12) \quad v(t) = V_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$$

$$(II.4.13) \quad v_r(t) = V_r \sin[2\pi f_0 t + \vartheta(t)]$$

il segnale in uscita vale:

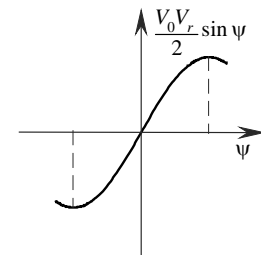


Fig. III.9 – Caratteristica del rivelatore di fase.

la quale, ponendo

$$(II.4.19) \quad K = k_r \frac{V_0 V_r}{2}$$

può essere scritta nella forma:

$$(II.4.20) \quad \frac{d\psi(t)}{dt} + 2\pi K \int_{-\infty}^{\infty} \sin[\psi(\tau)] h(t-\tau) d\tau = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

che rappresenta l'equazione che descrive il comportamento del rivelatore.

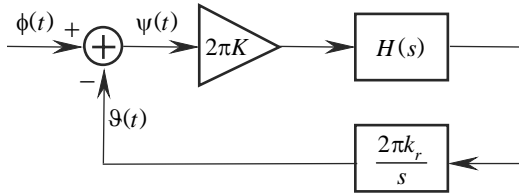


Fig. II.10 – Schema a blocchi del PLL linearizzato.

Tale equazione però è del tipo non lineare a causa della presenza del termine $\sin[\psi(\tau)]$; tuttavia, se l'errore di fase si mantiene abbastanza piccolo (o, come suol dirsi, il rivelatore funziona in regime di aggancio o di lock-in), la funzione $\sin[\psi(\tau)]$ può approssimarsi

con il suo argomento. La (II.4.20) pertanto si riduce alla:

$$(II.4.21) \quad \frac{d\psi(t)}{dt} + 2\pi K \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) h(t-\tau) d\tau = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

che dà luogo allo schema riportato in Fig. III.10.

Trasformando secondo Fourier la (II.4.21) e denotando con le lettere maiuscole le corrispondenti trasformate, si ha:

$$(II.4.22) \quad (j2\pi f)\Psi(f) + 2\pi K\Psi(f)H(f) = (j2\pi f)\Phi(f)$$

da cui:

$$(II.4.23) \quad \Psi(f) = j2\pi f \frac{\Phi(f)}{j2\pi f + 2\pi KH(f)}$$

In regime di aggancio la (II.4.17) diviene:

$$(II.4.24) \quad s_u(t) = \frac{V_0 V_r}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

che, trasformata, fornisce:

$$(II.4.25) \quad S_u(f) = \frac{V_0 V_r}{2} \Psi(f) H(f) = \frac{K}{k_r} \Psi(f) H(f)$$

Tenendo conto della (II.4.23) risulta infine:

$$(II.4.26) \quad S_u(f) = j2\pi f \frac{K}{k_r} \frac{H(f)}{j2\pi f + 2\pi KH(f)} \Phi(f)$$

Se entro la banda del sistema, che coincide con la banda f_m del segnale in uscita la quantità $H(f)$ possa ritenersi tale da risultare:

$$(II.4.27) \quad |H(f)| \gg 2\pi f_m \quad |f| \leq f_m$$

la (II.4.26) può essere approssimata dalla:

$$(II.4.28) \quad S_u(f) = \frac{j2\pi f}{2\pi k_r} \Phi(f)$$

che, nel dominio del tempo corrisponde alla:

$$(II.4.29) \quad s_u(t) = \frac{1}{2\pi k_r} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Se il segnale in ingresso è un segnale modulato in frequenza, essendo:

$$(II.4.30) \quad \phi(t) = 2\pi k_F \int_{t_0}^t s(\tau) d\tau$$

la (II.4.30) diventa:

$$(II.4.31) \quad s_u(t) = \frac{k_F}{k_r} s(t)$$

e pertanto il segnale in uscita dal sistema è proporzionale al segnale modulante. Il sistema quindi si comporta come un rivelatore di frequenza.

APPENDICE

Potenza specifica del segnale modulato in angolo.

Poiché il segnale modulato è manifestamente a potenza finita, la sua potenza specifica vale:

$$(1) \quad P_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v^2(t) dt$$

e cioè:

$$(2) \quad \begin{aligned} P_v &= V_0^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \cos^2(2\pi f_0 t + \beta m(t) + \varphi_0) dt = \\ &= \frac{V_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\beta m(t) + 2\varphi_0)] dt = \\ &= \frac{V_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt + \frac{V_0^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\beta m(t) + 2\varphi_0)] dt \end{aligned}$$

D'altra parte, ponendo $T = \frac{N}{f_0} = NT_0$ si può scrivere:

$$(3) \quad \int_{-T}^T \cos(4\pi f_0 t + 2\beta m(t) + 2\varphi_0) dt = \sum_{i=-N}^{N-1} \int_{iT_0}^{(i+1)T_0} \cos(4\pi f_0 t + 2\beta m(t) + 2\varphi_0) dt \cong 0$$

dove si è supposto che è $f_m \ll f_0$; in questo modo si può ritenere trascurabile la variazione della la funzione $\beta m(t)$ in un intervallo di ampiezza T_0 . Pertanto in $I_i \equiv [iT_0, (i+1)T_0)$ si può porre $\beta m(t) \cong \beta m(t_i)$ dove t_i denota un opportuno valore contenuto in I_i . In queste ipotesi si ha:

$$(4) \quad P_v = \frac{V_0^2}{2}$$

La potenza specifica di un segnale modulato in angolo non dipende dal segnale modulante e si riduce alla sola potenza della portante non modulata.