

LA RIVELAZIONE DEI SEGNALI MODULATI

In questo Capitolo sono studiate le prestazioni dei sistemi di modulazione presentati nei Capitoli precedenti in presenza di canali corrotti da rumore additivo. È introdotto il cosiddetto rapporto segnale-rumore definito come il rapporto tra la potenza specifica del segnale rivelato e quella del rumore in uscita dal ricevitore. In taluni casi, quali la rivelazione AM non coerente e la rivelazione di segnali modulati di angolo, è necessario individuare le condizioni che consentano di poter definire in modo univoco le componenti di “segnale” e di “rumore” presenti nel segnale in uscita dal rivelatore.

III.1 - Generalità.

Uno degli aspetti fondamentali della Teoria della modulazione consiste nella valutazione delle prestazioni dei rivelatori quando il segnale modulato è corrotto da rumore. In quel che segue si considera il caso in cui il segnale ricevuto $v_i(t)$ all'ingresso del ricevitore sia composto dalla somma del segnale modulato $v(t)$ e dal rumore $n(t)$:

$$(III.1.1) \quad v_i(t) = v(t) + n(t)$$

dove il rumore (additivo) $n(t)$ si suppone gaussiano a media nulla e con densità spettrale uniforme (rumore bianco almeno entro la banda del segnale modulato) ed indipendente dal segnale modulante $s(t)$. Se all'ingresso del rivelatore è presente un filtro di tipo passa-banda, la cui ampiezza di banda è pari a quella del segnale modulato, il rumore $n(t)$ è allora un segnale aleatorio di tipo passa-banda e pertanto può rappresentarsi in termini delle componenti in fase $n_f(t)$ e in quadratura $n_q(t)$ come segue:

$$(III.1.2) \quad n(t) = n_f(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - n_q(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

o in funzione dell'ampiezza $r(t)$ e della fase $\vartheta(t)$ istantanei nella forma:

$$(III.1.3) \quad n(t) = r(t) \cos[2\pi f_0 t + \vartheta(t) + \varphi_0]$$

dove f_0 e φ_0 denotano la frequenza e la fase propria della portante non modulata. Le componenti in fase ed in quadratura $n_f(t)$ e $n_q(t)$ sono entrambi gaussiani ed incorrelati.



Fig.III.1 - Schema di principio del rivelatore.

Se l'amplificazione degli stadi a monte del rivelatore risulta sufficientemente elevata è lecito trascurare il rumore introdotto dal rivelatore; il che equivale ad ammettere ideale il processo di rivelazione. Di conseguenza lo schema del rivelatore che

sarà preso in esame si presenta come è indicato in Fig. III.1 in cui il filtro passa-banda, supposto ideale, di banda pari a quella del segnale modulato, schematizza gli stadi amplificatori a monte del rivelatore.

È importante osservare infine che l'entità del rumore in uscita dal rivelatore dipende dal dispositivo di rivelazione adoperato. È opportuno, al fine di un efficace confronto fra i vari metodi di modulazione, definire una cifra di merito che tenga conto della degradazione del se-

gnale indotta dal rumore.

Se il segnale in uscita $v_u(t)$ si presenta nella forma:

$$(III.1.4) \quad v_u(t) = s_u(t) + n_u(t)$$

cioè come somma del segnale modulante $s_u(t)$ e del rumore $n_u(t)$ con esso incorrelato è naturale assumere come cifra di merito la quantità:

$$(III.1.5) \quad z_u = \frac{E\left\{\left(s_u(t) - E\{s_u(t)\}\right)^2\right\}}{E\left\{\left(n_u(t) - E\{n_u(t)\}\right)^2\right\}}$$

denotata come rapporto segnale rumore.

In caso contrario è difficile procedere al calcolo delle quantità che intervengono nella (III.1.5) poiché non sono facilmente individuabili le componenti di “segnale” e di “rumore” contenute nel segnale $v_u(t)$.

III.2 – Caratterizzazione statistica del rumore.

Sia $n(t, \zeta)$ un segnale aleatorio di tipo passa-banda che si suppone stazionario (in senso lato fino al secondo ordine almeno) e a media nulla. La sua densità spettrale pertanto è supposta localizzata attorno alle frequenze $\pm f_0$ ed occupa una banda (monolaterale) di ampiezza B . La generica manifestazione di $n(t, \zeta)$, con probabilità 1, può essere posta nella forma:

$$(III.2.1) \quad n(t, \zeta) = n_f(t, \zeta) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - n_q(t, \zeta) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

in cui $n_f(t, \zeta)$ e $n_q(t, \zeta)$ sono due segnali di tipo passa-basso con densità spettrali confinate in $(-\frac{B}{2}, \frac{B}{2})$ denominati *componente in fase* e *componente in quadratura* di $n(t, \zeta)$ e la fase φ_0 si considera una variabile aleatoria, indipendente dalle componenti in fase ed in quadratura, che si suppone uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 2\pi)$.

Se le componenti in fase ed in quadratura sono gaussiane anche $n(t, \zeta)$ lo è in quanto combinazione lineare di segnali gaussiani. Viceversa è facile dimostrare che se $n(t, \zeta)$ è gaussiano anche $n_f(t, \zeta)$ e $n_q(t, \zeta)$ lo sono.

Infatti sia $n_C(t, \zeta)$ il segnale definito dalla:

$$(III.2.2) \quad n_C(t, \zeta) = 2n(t, \zeta) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

Tenendo conto della (III.2.1) si ha:

$$(III.2.3) \quad \begin{aligned} n_C(t, \zeta) &= 2\left\{n_f(t, \zeta) \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi_0) - n_q(t, \zeta) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)\right\} = \\ &= n_f(t, \zeta) [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)] - n_q(t, \zeta) \sin(4\pi f_0 t + 2\varphi_0) \end{aligned}$$

dalla quale si riconosce che la componente in fase di $n(t, \zeta)$ può essere ricostruita considerando la porzione dello spettro di $n_C(t, \zeta)$ contenuta $(-\frac{B}{2}, \frac{B}{2})$ dal momento che i segnali $n_f(t, \zeta) \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)$ e $n_q(t, \zeta) \sin(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)$ hanno contenuti spettrali in bande di ampiezza B e posizionate attorno alle frequenze $\pm 2f_0$.

In modo analogo definendo $n_S(t, \zeta)$:

$$(III.2.4) \quad n_S(t, \zeta) = -2n(t, \zeta) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

risulta:

$$(III.2.5) \quad \begin{aligned} n_S(t, \zeta) &= -2\left\{n_f(t, \zeta) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - n_q(t, \zeta) \sin^2(2\pi f_0 t + \varphi_0)\right\} = \\ &= -n_f(t, \zeta) \sin(4\pi f_0 t + 2\varphi_0) + n_q(t, \zeta) [1 - \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)] \end{aligned}$$

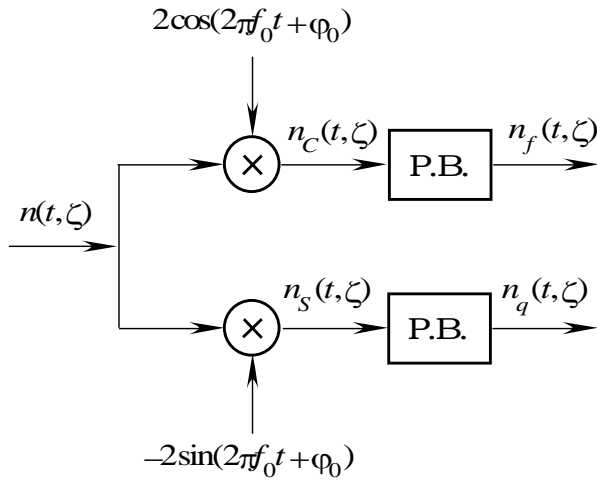


Fig.1 - Componenti in fase e in quadratura di un segnale di tipo passa-banda

dalla quale si evince che la componente in quadratura di $n(t, \zeta)$ può essere ricostruita considerando la porzione dello spettro di $n_s(t, \zeta)$ che è compresa in $(-\frac{B}{2}, \frac{B}{2})$. Le componenti in fase ed in quadratura di $n(t, \zeta)$ possono essere ottenute come mostra la Fig. 1 dove i filtri passa-basso si suppongono ideali e di banda pari a $\frac{B}{2}$.

Denotando con $h(t)$ la risposta impulsiva del filtro passa basso si

ha:

$$(III.2.6) \quad n_f(t, \zeta) = n_c * h = 2 \int_{\mathbf{R}} n(\tau, \zeta) \cos(2\pi f_0 \tau + \varphi_0) h(t - \tau) d\tau$$

e

$$(III.2.7) \quad n_q(t, \zeta) = n_s * h = -2 \int_{\mathbf{R}} n(\tau, \zeta) \sin(2\pi f_0 \tau + \varphi_0) h(t - \tau) d\tau$$

Dalle (III.2.6) e (III.2.7) si deduce che $n_f(t, \zeta)$ e $n_q(t, \zeta)$ dipendono linearmente da $n(t, \zeta)$ per cui se $n(t, \zeta)$ è gaussiano anche tali sono le sue componenti in fase ed in quadratura.

Per determinare la statistica di $n_f(t, \zeta)$ basta osservare che essa ha valor medio nullo. Per dedurre la funzione di autocorrelazione occorre innanzi tutto determinare la funzione di autocorrelazione di $n_c(t, \zeta)$. Si ha:

$$(III.2.8) \quad R_C(t, \tau) = E \{ n_c(t, \zeta) n_c(t + \tau, \zeta) \}$$

dove $E \{ \cdot \}$ deve intendersi l'operatore di media congiunta rispetto alle quantità n_f , n_q e φ_0 .

Per le ipotesi fatte riguardo all'indipendenza della variabile aleatoria φ_0 rispetto alle grandezze n_f e n_q , la (III.2.8) diviene:

$$(III.2.9) \quad \begin{aligned} R_C(t, \tau) &= 4E \{ n(t, \zeta) n(t + \tau, \zeta) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \cos[2\pi f_0 (t + \tau) + \varphi_0] \} = \\ &= 2E \{ n(t, \zeta) n(t + \tau, \zeta) \} E_{\varphi_0} \{ \cos 2\pi f_0 \tau + \cos[2\pi f_0 (2t + \tau) + 2\varphi_0] \} = \\ &= 2R_n(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau \end{aligned}$$

essendo manifestamente

$$(III.2.10) \quad E_{\varphi_0} \{ \cos[2\pi f_0 (2t + \tau) + 2\varphi_0] \} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[2\pi f_0 (2t + \tau) + 2\varphi_0] d\varphi_0 = 0$$

In modo analogo è:

$$(III.2.11) \quad \begin{aligned} R_S(t, \tau) &= 4E \{ n(t, \zeta) n(t + \tau, \zeta) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \sin[2\pi f_0 (t + \tau) + \varphi_0] \} = \\ &= 2E \{ n(t, \zeta) n(t + \tau, \zeta) \} E_{\varphi_0} \{ \cos 2\pi f_0 \tau - \cos[2\pi f_0 (2t + \tau) + 2\varphi_0] \} = \\ &= 2R_n(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau \end{aligned}$$

I segnali $n_c(t, \zeta)$ e $n_s(t, \zeta)$ sono entrambi stazionari e sono caratterizzati da una medesima funzione di autocorrelazione. Essi pertanto sono caratterizzati da una stessa densità spettrale che vale:

$$(III.2.12) \quad W_C(f) = W_S(f) = W_n(f - f_0) + W_n(f + f_0)$$

dove $W_n(f)$ rappresenta la densità spettrale di $n(t, \zeta)$. La densità spettrale delle componenti in fase ed in quadratura è la stessa e vale (cfr. Fig. 1):

$$(III.2.13) \quad W_f(f) = W_q(f) = [W_n(f - f_0) + W_n(f + f_0)] \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

Se $n(t, \zeta)$ è un rumore bianco con densità spettrale pari a $\frac{N_0}{2}$, com'è mostrato in Fig. 2, si ottiene:

$$(III.2.14) \quad W_f(f) = W_q(f) = N_0 \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

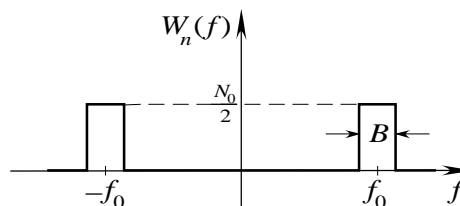


Fig.2 - Rumore bianco di tipo passa-banda.

Per caratterizzare completamente la coppia delle componenti in fase ed in quadratura occorre valutare la loro mutua correlazione.

Con riferimento ai segnali $n_c(t, \zeta)$ e $n_s(t, \zeta)$, la loro correlazione incrociata vale:

$$(III.2.15) \quad \begin{aligned} R_{CS}(t, \tau) &= E\{n_c(t, \zeta)n_s(t + \tau, \zeta)\} = \\ &= -4E\{n(t, \zeta)n(t + \tau, \zeta)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)\sin[2\pi f_0(t + \tau) + \varphi_0]\} = \\ &= -2E\{n(t, \zeta)n(t + \tau, \zeta)\}E_{\varphi_0}\{\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)\sin[2\pi f_0(t + \tau) + \varphi_0]\} = \\ &= -2R_n(\tau)\sin 2\pi f_0 \tau \end{aligned}$$

È dunque:

$$(III.2.16) \quad W_{CS}(f) = \mathbf{F}\{R_{CS}(\tau)\} = j[W_n(f - f_0) - W_n(f + f_0)]$$

Nell'ipotesi di rumore bianco, la densità spettrale incrociata nella banda $(-\frac{B}{2}, \frac{B}{2})$ è nulla e quindi è

$$(III.2.17) \quad R_{fq}(\tau) = 0$$

Le componenti in fase ed in quadratura di un rumore passa-banda e bianco sono incorrelate e quindi, essendo gaussiane, sono anche statisticamente indipendenti.

III.3 - Modulazione d'ampiezza.

In tal caso il segnale modulato all'ingresso del ricevitore vale:

$$(III.3.1) \quad v_i(t) = V_0 [v_f(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - v_q(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)]$$

in cui le quantità $v_f(t)$ e $v_q(t)$ dipendono dal segnale modulante $s(t)$. Com'è noto un tale tipo di modulazione può essere rivelato in modo coerente o non coerente a seconda se al ricevitore è disponibile o meno la portante.

III.3.1 - Rivelazione coerente.

Nel caso di rivelazione coerente il segnale $v_i(t)$ è moltiplicato per la portante locale:

$$(III.3.2) \quad v_r(t) = V_r \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

ottenendosi così:

$$(III.3.3) \quad \begin{aligned} v_i(t)v_r(t) &= \\ &= V_0 V_r [v_f(t)\cos^2(2\pi f_0 t + \varphi_0) - v_q(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)] + \\ &+ V_r n_f(t)\cos^2(2\pi f_0 t + \varphi_0) + V_r n_q(t)\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \end{aligned}$$

per cui il segnale in uscita dal filtro passa-basso è:

$$(III.3.4) \quad s_u(t) = \frac{V_0 V_r}{2} v_f(t) + \frac{V_r}{2} n_f(t)$$

Il rapporto segnale rumore in uscita vale pertanto:

$$(III.3.5) \quad z_u = \frac{\frac{V_0^2 V_r^2}{4} E\left\{\left(v_f - E\{v_f\}\right)^2\right\}}{\frac{V_r^2}{4} E\{n_f^2\}} = V_0^2 \frac{E\left\{\left(v_f - E\{v_f\}\right)^2\right\}}{E\{n_f^2\}}$$

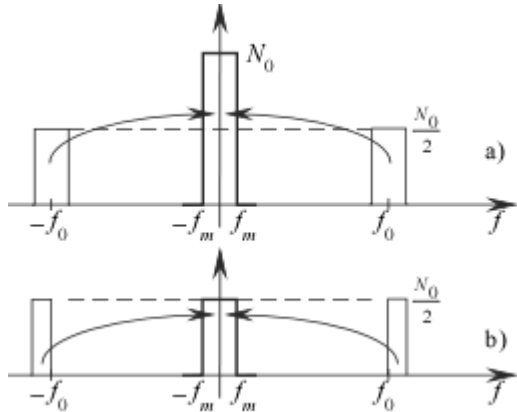


Fig. 3 - Densità spettrali della componente in fase del rumore nel caso a) di modulazione AM o DSB e b) di modulazione SSB.

Se il rumore passa-banda di ingresso presenta una densità spettrale pari a $\frac{N_0}{2}$, le densità spettrali della componente in fase $n_f(t)$ valgono (v.

Fig. 3):

$$(III.3.6) \quad W_f(f) = \begin{cases} N_0 \text{rect}\left(\frac{f}{2f_m}\right) & \text{AM o DSB} \\ \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2f_m}\right) & \text{SSB} \end{cases}$$

Di conseguenza, le potenze specifiche del rumore $n_f(t)$ valgono:

$$(III.3.7) \quad E\{n_f^2(t)\} = \begin{cases} 2N_0 f_m & \text{AM o DSB} \\ N_0 f_m & \text{SSB} \end{cases}$$

Per quanto riguarda la potenza del segnale, supposto a media nulla e a potenza specifica P_s ($E\{s(t)\} = 0$ e $E\{s^2(t)\} = P_s$) si ha:

a) modulazione AM

$$(III.3.8) \quad E\left\{\left(v_f - E\{v_f\}\right)^2\right\} = E\left\{\left(1 + k_A s - 1 - k_A E\{s\}\right)^2\right\} = k_A^2 P_s$$

b) modulazione DSB

$$(III.3.9) \quad E\left\{\left(v_f - E\{v_f\}\right)^2\right\} = E\left\{\left(k_A s - k_A E\{s\}\right)^2\right\} = k_A^2 P_s$$

c) modulazione SSB

$$(III.3.10) \quad E\left\{\left(v_f - E\{v_f\}\right)^2\right\} = E\left\{\left(\frac{1}{2} k_A s - \frac{1}{2} k_A E\{s\}\right)^2\right\} = \frac{k_A^2}{4} P_s$$

La quantità z_u , nei tre casi considerati, vale:

$$(III.3.11) \quad z_u = \begin{cases} V_0^2 \frac{k_A^2 P_s}{2N_0 f_m} = \frac{k_A^2 P_0 P_s}{N_0 f_m} & \text{AM} \\ V_0^2 \frac{k_A^2 P_s}{2N_0 f_m} = \frac{k_A^2 P_0 P_s}{N_0 f_m} & \text{DSB} \\ V_0^2 \frac{k_A^2 P_s}{4N_0 f_m} = \frac{k_A^2 P_0 P_s}{2N_0 f_m} & \text{SSB} \end{cases}$$

essendo $P_0 = \frac{V_0^2}{2}$. Per quanto riguarda il rapporto segnale rumore all'ingresso, basta ricordare

l'espressione della potenza specifica del segnale modulato riportata nella Tab. I.1 del Cap. I.

Si ottiene dunque:

$$(III.3.12) \quad z_i = \begin{cases} \frac{V_0^2 [1+k_A^2 P_s]}{2N_0 f_m} = \frac{P_0 [1+k_A^2 P_s]}{N_0 f_m} & \text{AM} \\ \frac{V_0^2 k_A^2 P_s}{2N_0 f_m} = \frac{k_A^2 P_0 P_s}{N_0 f_m} & \text{DSB} \\ \frac{V_0^2 k_A^2 P_s}{N_0 f_m} = \frac{2k_A^2 P_0 P_s}{N_0 f_m} & \text{SSB} \end{cases}$$

Il guadagno del rivelatore vale:

$$(III.3.13) \quad \gamma = \frac{z_u}{z_i} = \begin{cases} \frac{k_A^2 P_s}{1+k_A^2 P_s} & \text{AM} \\ 1 & \text{DSB} \\ \frac{1}{4} & \text{SSB} \end{cases}$$

III.3.2 - Rivelazione non coerente.

Com'è noto dal Cap. I, la rivelazione non coerente è effettuata, nel caso della modulazione AM, per mezzo del rivelatore ad involuppo. Limitando l'analisi alla sola modulazione AM, il segnale in ingresso al rivelatore può essere scritto come segue:

$$(III.3.14) \quad v_i(t) = \{V_0 [1+k_A s(t)] + n_f(t)\} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - \{n_q(t)\} \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

al quale corrisponde l'involuppo:

$$(III.3.15) \quad V(t) = \left\{ \left[V_0 (1+k_A s) + n_f \right]^2 + [n_q]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

che è manifestamente un'espressione non lineare sia del segnale che del rumore.

Per ridurre $R(t)$ a una forma lineare occorre introdurre alcune semplificazioni. Più precisamente si supponga che le probabilità che $|n_f(t)|$ e $|n_q(t)|$ siano molto minori di V_0 sia molto prossima all'unità:

$$(III.2.18) \quad \Pr\{|n_f(t)| \ll V_0\} \cong 1 \quad ; \quad \Pr\{|n_q(t)| \ll V_0\} \cong 1$$

Ciò comporta che nella (III.2.17) si può ritenere $V_0 [1+k_A s(t)]$ grande rispetto a $|n_f(t)|$ e a $|n_q(t)|$, cosicché $V(t)$ si può approssimare nel modo seguente:

$$(III.3.16) \quad \begin{aligned} V(t) &= V_0 [1+k_A s(t)] \sqrt{1 + \frac{2n_f(t)}{V_0 [1+k_A s(t)]} + \frac{n_f^2(t) + n_q^2(t)}{V_0^2 [1+k_A s(t)]^2}} \cong \\ &\cong V_0 [1+k_A s(t)] \left\{ 1 + \frac{n_f(t)}{V_0 [1+k_A s(t)]} \right\} \cong V_0 [1+k_A s(t)] + n_f(t) \end{aligned}$$

e, di conseguenza, l'uscita del rivelatore è:

$$(III.3.17) \quad v_u(t) = V_0 [1+k_A s(t)] + n_f(t)$$

È da osservare che, essendo $n_f(t)$ e $n_q(t)$ distribuite con legge gaussiana di valor medio nullo e varianza $\sigma_n^2 = 2N_0 f_m$, le probabilità (III.2.18) si esprimono come segue:

$$(III.3.18) \quad \Pr\{|n| \leq V_0\} = \int_{-V_0}^{V_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-n^2/2\sigma_n^2} dn = 1 - Q \left\{ \sqrt{\frac{V_0^2}{\sigma_n^2}} \right\}$$

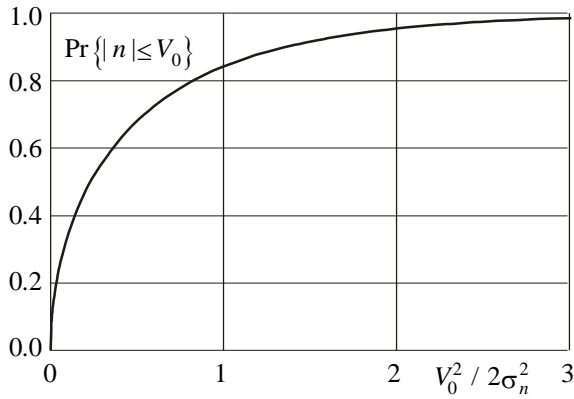


Fig. III.4 - $\Pr \{n | \leq V_0\}$ in funzione di $\frac{V_0^2}{2\sigma_n^2}$

Una rappresentazione della (II.2.21) in termini di $\frac{V_0^2}{2\sigma_n^2}$, data dalla Fig. III.4, rivela che per elevati valori di $\frac{V_0^2}{2\sigma_n^2}$ la probabilità che $n(t)$ sia contenuto in $(-V_0, V_0)$ è praticamente unitaria cosicché le (III.2.18) equivalgono all'unica condizione:

$$(III.3.19) \quad \frac{V_0^2}{2\sigma_n^2} \gg 1$$

e cioè alla:

$$(III.3.20) \quad z_i \gg 1$$

Il rapporto segnale rumore in uscita è per la (III.3.16):

$$(III.3.21) \quad z_u = \frac{V_0^2 k_A^2 P_s}{2N_0 f_m} = \frac{P_0}{N_0 f_m} k_A^2 P_s$$

e quindi il guadagno del ricevitore è:

$$(III.3.22) \quad \gamma = 2 \frac{k_A^2 P_s}{1 + k_A^2 P_s} \quad \text{per} \quad \frac{V_0^2}{2\sigma_n^2} \gg 1$$

Paragonando la (III.3.21) con la (III.3.11) si deduce che nei confronti del rumore la rivelazione coerente e quella a involuppo presentano le medesime caratteristiche purché, in quest'ultimo caso, la condizione (III.2.22) risulti soddisfatta.

Al crescere di $n(t)$ il segnale ricevuto è sempre più corrotto dal rumore. Di conseguenza c'è una perdita rilevante d'informazione in uscita e cioè il messaggio è alquanto incomprensibile. Tale notevole perdita d'informazione è denominata "effetto di soglia", in quanto si può determinare un valore di z_i al di sopra del quale il messaggio risulta rivelato in maniera accettabile, mentre al di sotto si deteriora notevolmente.

III.4 - Modulazione d'angolo.

Nella modulazione d'angolo il segnale in ingresso $v_i(t)$ può essere posto nella forma:

$$(III.4.1) \quad v_i(t) = V_0 \cos[2\pi f_0 t + \beta m(t)] + r(t) \cos[2\pi f_0 t + \vartheta(t)]$$

Ricorrendo alla rappresentazione fasoriale delle grandezze sinusoidali, il segnale $v_i(t)$ può essere rappresentato come è indicato in Fig. III.5. La deviazione di fase del segnale $v_i(t)$ può allora essere approssimata dalla (si fa riferimento al triangolo OAB rettangolo in A):

$$(III.4.2) \quad \varphi(t) = \beta m(t) + \arctg \frac{r(t) \sin[\vartheta(t) - \beta m(t)]}{V_0 + r(t) \cos[\vartheta(t) - \beta m(t)]}$$

Supponendo inoltre che la quantità $r(t)$ sia, con probabilità molto prossima all'unità, piccola rispetto a V_0 ; cosa che si verifica quando è:

$$(III.4.3) \quad \frac{V_0^2}{2\sigma_n^2} \gg 1$$

la (III.4.2) può essere semplificata nel modo seguente:

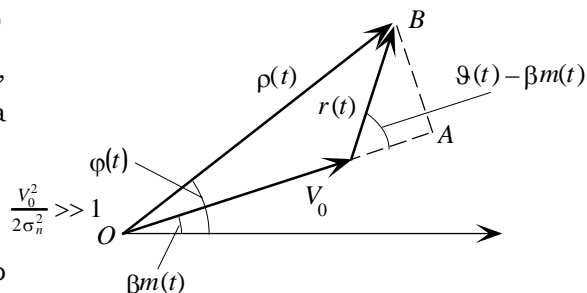


Fig. III.5 - Rappresentazione vettoriale del segnale $v_i(t)$

$$(III.4.4) \quad \varphi(t) \cong \beta m(t) + \arctg \frac{r(t)}{V_0} \sin[\vartheta(t) - \beta m(t)] \cong \beta m(t) + \frac{r(t)}{V_0} \sin[\vartheta(t) - \beta m(t)]$$

e cioè:

$$(III.4.5) \quad \varphi(t) \cong \beta m(t) + \frac{r(t)}{V_0} \{ \sin[\vartheta(t)] \cos[\beta m(t)] - \cos[\vartheta(t)] \sin[\beta m(t)] \}$$

che, introducendo le componenti in fase ed in quadratura del rumore:

$$(III.4.6) \quad n_f(t) = r(t) \cos \vartheta(t) \quad ; \quad n_q(t) = r(t) \sin \vartheta(t)$$

può essere scritta come segue:

$$(III.4.7) \quad \varphi(t) = \beta m(t) + \psi(t)$$

essendo

$$(III.4.8) \quad \psi(t) = \frac{n_q(t)}{V_0} \cos \beta m(t) - \frac{n_f(t)}{V_0} \sin \beta m(t)$$

III.4.1 - Modulazione di fase.

Nel caso della modulazione di fase, il segnale in uscita dal rivelatore è pari alla fase istantanea del segnale in ingresso dato dalla (III.4.1). Tenendo conto della (III.4.7), si ha:

$$(III.4.9) \quad v_u(t) = \beta m(t) + \frac{n_q(t)}{V_0} \cos \beta m(t) - \frac{n_f(t)}{V_0} \sin \beta m(t) = k_p s(t) + \frac{n_q(t)}{V_0} \cos \beta m(t) - \frac{n_f(t)}{V_0} \sin \beta m(t)$$

che presenta un termine che contiene l'informazione a cui si somma il disturbo che dipende oltre che dal rumore anche dal segnale modulante.

Per valutare il rapporto segnale rumore in uscita occorre procedere alla determinazione della potenza specifica della quantità $\psi(t)$. A tale scopo, detta R_ψ la funzione di autocorrelazione di $\psi(t)$, si ha:

$$(III.4.10) \quad \begin{aligned} R_\psi = E \{ \psi(t) \psi(t + \tau) \} = & \frac{1}{V_0^2} \{ E \{ n_f(t) n_f(t + \tau) \} \cdot E \{ \sin \beta m(t) \sin \beta m(t + \tau) \} + \\ & - E \{ n_f(t) n_q(t + \tau) \} \cdot E \{ \sin \beta m(t) \cos \beta m(t + \tau) \} + \\ & - E \{ n_f(t + \tau) n_q(t) \} \cdot E \{ \cos \beta m(t) \sin \beta m(t + \tau) \} + \\ & + E \{ n_q(t) n_q(t + \tau) \} \cdot E \{ \cos \beta m(t) \cos \beta m(t + \tau) \} \} \end{aligned}$$

avendo supposto il segnale indipendente dal rumore.

Osservando che, essendo il rumore all'ingresso gaussiano e a banda stretta risulta:

$$(III.4.11) \quad \begin{aligned} E \{ n_f(t) n_f(t + \tau) \} = E \{ n_q(t) n_q(t + \tau) \} & \cong \tilde{R}(\tau) \\ E \{ n_f(t) n_q(t + \tau) \} = E \{ n_f(t + \tau) n_q(t) \} & = 0 \end{aligned}$$

la precedente diviene:

$$(III.4.12) \quad R_\psi(\tau) = \frac{\tilde{R}(\tau)}{V_0^2} \cdot E \{ \cos \beta [m(t) - m(t + \tau)] \}$$

Se il segnale $m(t)$ è stazionario la quantità $E \{ \cos \beta [m(t) - m(t + \tau)] \}$ dipende solo da τ per cui, ponendo

$$(III.4.13) \quad g(\tau) = E \{ \cos \beta [m(t) - m(t + \tau)] \}$$

si può scrivere:

$$(III.4.14) \quad R_\psi(\tau) = \frac{1}{V_0^2} \tilde{R}(\tau) g(\tau)$$

Denotando con $\tilde{W}(f)$ e con $G(f)$ le trasformate di Fourier di $\tilde{R}(\tau)$ e di $g(\tau)$ rispettivamente,

la densità spettrale di $\psi(t)$ vale dunque:

$$(III.4.15) \quad W_{\psi}(f) = \frac{1}{V_0^2} \tilde{W}(f) * G(f)$$

D'altra parte, se il rumore in ingresso è bianco con densità spettrale pari a $\frac{N_0}{2}$ è:

$$(III.4.16) \quad \tilde{W}(f) = N_0 \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

e quindi è:

$$(III.4.17) \quad W_{\psi}(f) = \frac{N_0}{V_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} G(f-y) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{B}\right) dy = \frac{N_0}{V_0^2} \int_{f-\frac{B}{2}}^{f+\frac{B}{2}} G(x) dx$$

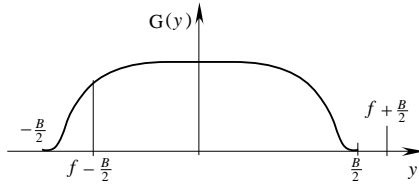


Fig. III.6 - Determinazione della funzione $W_{\psi}(f)$.

dalla quale si deduce che se la banda B del segnale modulato è molto maggiore di f_m (modulazione ad alto indice), la $W_{\psi}(f)$, quando f cade nell'intervallo $(-f_m, f_m)$, può essere approssimata come segue (cfr. Fig. III.6):

$$(III.4.18) \quad W_{\psi}(f) \cong \frac{N_0}{V_0^2} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} G(x) dx \cong \frac{N_0}{V_0^2} g(0) = \frac{N_0}{V_0^2}$$

poiché l'area della curva $G(y)$ nelle regioni $(-\infty, f - \frac{B}{2})$ e $(f + \frac{B}{2}, \infty)$ può ritenersi trascurabile rispetto all'area sottesa dalla curva in $(-f_m, f_m)$.

La potenza specifica del rumore in uscita vale dunque:

$$(III.4.19) \quad N_u = \int_{-f_m}^{f_m} W_{\psi}(f) df = \frac{2N_0 f_m}{V_0^2}$$

e quella del segnale:

$$(III.4.20) \quad P_u = k_p^2 P_s$$

e di conseguenza il rapporto segnale rumore in uscita è:

$$(III.4.21) \quad z_u = \frac{V_0^2 k_p^2 P_s}{2N_0 f_m} = k_p^2 P_s \frac{P_0}{N_0 f_m}$$

dove, come prima, P_0 denota la potenza specifica della portante non modulata.

III.4.2 - Modulazione di frequenza.

Nel caso della modulazione di frequenza, l'uscita dal rivelatore è pari alla deviazione istantanea della frequenza del segnale $v_i(t)$ e cioè:

$$(III.4.22) \quad v_u(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\beta m(t) + \psi(t)] = k_F s(t) + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left[\frac{n_q(t)}{V_0} \cos \beta m(t) - \frac{n_f(t)}{V_0} \sin \beta m(t) \right]$$

essendo $\beta \frac{d}{dt} m(t) = 2\pi k_F s(t)$.

Tenendo conto della (III.4.18) la densità spettrale del rumore in uscita vale:

$$(III.4.23) \quad W_{n_u}(f) = \frac{1}{4\pi^2} (2\pi f)^2 W_{\psi}(f) \cong \frac{N_0}{V_0^2} f^2 \operatorname{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

e presenta un andamento parabolico come è mostrato in Fig. III.7.

La potenza specifica del rumore in uscita è allora:

$$(III.4.24) \quad N_u = \int_{-f_m}^{f_m} W_{n_u}(f) df = \frac{N_0}{V_0^2} \int_{-f_m}^{f_m} f^2 df = \frac{2N_0}{3V_0^2} f_m^3$$

e quella del segnale:

$$(III.4.25) \quad P_u = k_F^2 P_s$$

Il rapporto segnale rumore è:

$$(III.4.26) \quad z_u = \frac{3V_0^2 k_F^2 P_s}{2N_0 f_m^3} = 3 \left(\frac{k_F}{f_m} \right)^2 P_s \left(\frac{P_0}{N_0 f_m} \right)$$

D'altra parte, picchè il rapporto segnale rumore in ingresso vale:

$$(III.4.27) \quad z_i = \frac{S_i}{N_i} = \frac{V_0^2}{2N_0 B} = \frac{P_0}{N_0 B}$$

il guadagno del rivelatore è:

$$(III.4.28) \quad \gamma = \begin{cases} k_P^2 P_s \frac{B}{f_m} & \text{PM} \\ 3k_F^2 P_s \frac{B}{f_m^3} & \text{FM} \end{cases}$$

Usando per B la formula di Carson:

$$(III.4.29) \quad B = 2(1 + \Delta) f_m \cong 2\Delta f_m$$

si ottiene:

$$(III.4.30) \quad \gamma = \begin{cases} 2k_P^2 P_s \Delta & \text{PM} \\ 6k_F^2 P_s \frac{\Delta}{f_m^2} & \text{FM} \end{cases}$$

dalla quale si deduce che il guadagno di rivelazione cresce al crescere della quantità Δ ma, al tempo stesso, aumenta l'ampiezza di banda del segnale modulato.

Nel caso di modulante sinusoidale $s(t) = V_m \cos 2\pi f_m t$ è:

$$(III.4.31) \quad P_s = \frac{V_m^2}{2}$$

per cui, ricordando le espressioni di β riportate al par. del Cap. II, dalle (III.3.32) si deduce:

$$(III.4.32) \quad \gamma = \begin{cases} \beta^3 & \text{PM} \\ 3\beta^3 & \text{FM} \end{cases}$$

La modulazione di frequenza presenta un guadagno di 3 (4,7 dB) rispetto a quella di fase.

Dal confronto della (III.3.23) con la (III.3.28) discende che la modulazione di frequenza si comporta meglio di quella di fase nei confronti del rumore poiché il rapporto segnale rumore nella FM può essere reso grande quanto si vuole incrementando la quantità $\frac{k_F}{f_m}$, mentre nella PM questo incremento è limitato dalla condizione $k_P |s(t)|_x = \pi$. Si deve tuttavia tener presente che un aumento dell'indice di modulazione $\frac{k_F}{f_m}$ nella FM comporta un aumento della banda occupata; in altri termini buone prestazioni nei confronti del rumore sono ottenute a scapito di un'ampia estensione dello spettro del segnale modulato. È per questo motivo che in molte applicazioni è preferita la modulazione WBFM.

III.5 - Pre-enfasi e de-enfasi.

Le caratteristiche del rivelatore in FM possono essere migliorate con l'impiego dei cosiddetti filtri di pre-enfasi e di de-enfasi disposti il primo all'ingresso del trasmettitore ed il secondo all'uscita del rivelatore come è schematicamente indicato in Fig. III.8.

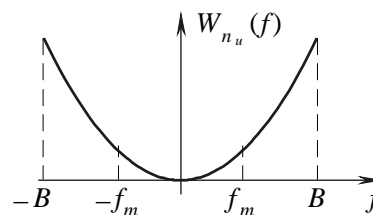


Fig. III.7 - Densità spettrale del rumore in uscita dal rivelatore.

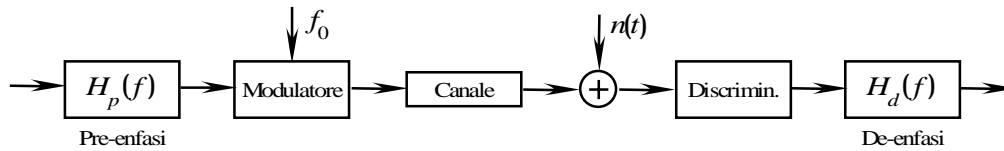


Fig. III.8 - Sistema FM con filtri di pre-enfasi e di de-enfasi.

Naturalmente per non introdurre distorsioni dovrà aversi:

$$(III.5.1) \quad H_p(f)H_d(f) = e^{-j2\pi f T_d}$$

dove T_d denota il ritardo di trasmissione.

Con la presenza del filtro di de-enfasi, tenendo conto della (III.3.25) il rumore diventa:

$$(III.5.2) \quad N_{ud} = \frac{N_0}{V_0^2} \int_{-f_m}^{f_m} f^2 |H_d(f)|^2 df$$

Il vantaggio conseguente all'introduzione dei filtri di pre- e de-enfasi può essere valutato mediante il rapporto fra N_u e N_{ud} che vale:

$$(III.5.3) \quad \xi = \frac{N_{ud}}{N_u} = \frac{\int_{-f_m}^{f_m} f^2 |H_d(f)|^2 df}{\int_{-f_m}^{f_m} f^2 df}$$

e risulta $\xi < 1$ se è:

$$(III.5.4) \quad |H_d(f)| < 1 \quad (-f_m \leq f \leq f_m)$$

Per la scelta dei filtri di pre-enfasi e di de-enfasi si impone inoltre che la potenza del segnale enfatizzato si mantenga inalterata. Ciò significa che se $W_m(f)$ denota la densità spettrale del messaggio $m(t)$ si dovrà avere:

$$(III.5.5) \quad \int_{-f_m}^{f_m} W_m(f) df = \int_{-f_m}^{f_m} W_m(f) |H_p(f)|^2 df$$