

TRASMISSIONE NUMERICA IN BANDA BASE

In questo Capitolo si prende in esame la trasmissione numerica dei segnali in banda base (segnalazione PAM) affrontando, in particolare, il problema della rivelazione in presenza di rumore allo scopo di dedurre lo schema del ricevitore ottimo. Le prestazioni del ricevitore, in termini della probabilità di errore per simbolo, sono dedotte nel caso di segnalazione binaria e di segnalazione M -aria. Infine sono discussi i comportamenti spettrali del segnale PAM in funzione dell'impulso di segnalazione e della codifica adottata.

I.1 – Generalità.

Nella trasmissione numerica binaria il messaggio inviato dalla sorgente è costituito da una sequenza ordinata di cifre

$$\dots, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \dots$$

appartenenti all'alfabeto binario i cui elementi si denotano con 0 e 1. Nel caso di trasmissione **sincrona** le cifre d_n sono emesse dalla sorgente con cadenza regolare; detto allora T_0 il periodo di cifra, la quantità:

$$(I.1.1) \quad r = \frac{1}{T_0}$$

costituisce il **ritmo binario (bit rate)** e rappresenta il numero di cifre che la sorgente emette nell'unità di tempo.

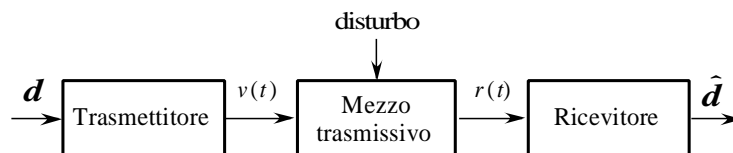


Fig. I.1 - Schema di principio di un sistema di trasmissione numerica.

Un sistema di trasmissione numerica può essere schematizzato come mostra la Fig. I.1.

In essa si distinguono i seguenti blocchi:

- un **trasmettitore** che associa alla sequenza di cifre binarie del messaggio una successione di forme d'onda, dette **forme di segnalazione**, appartenenti ad un insieme $S_M = \{s_n(t)\}_{n=0}^{M-1}$ di M segnali distinti.
- un **mezzo trasmissivo** la cui uscita $r(t)$ è, in generale, una replica poco fedele del segnale in ingresso $v(t)$ per effetto delle distorsioni, delle interferenze e dei disturbi prodotti dal canale;
- un **ricevitore** il quale, a partire da $r(t)$, fornisce in uscita il messaggio

$$\dots, \hat{d}_{-2}, \hat{d}_{-1}, \hat{d}_0, \hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots$$

in genere diverso da quello originario.

I.2 – Struttura del segnale numerico.

Nel caso di trasmissione in banda base, cui si fa riferimento in questo Capitolo, il se-

segnale numerico $v(t)$ in uscita dal modulatore è costituito da una sequenza di forme di segnalazione traslate nel tempo; esso quindi può essere espresso nella forma:

$$(I.2.1) \quad v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n(t-nT)$$

dove $s_n(t)$ rappresenta un elemento dell'insieme delle forme di segnalazione S_M che si suppone sia caratterizzato da una trasformata di Fourier concentrata attorno alla frequenza zero.

In quel che segue, si suppone che le segnalazioni $s_n(t)$ siano confinate nell'intervallo $[0, T)$ e che pertanto costituiscono dei segnali ad energia finita.

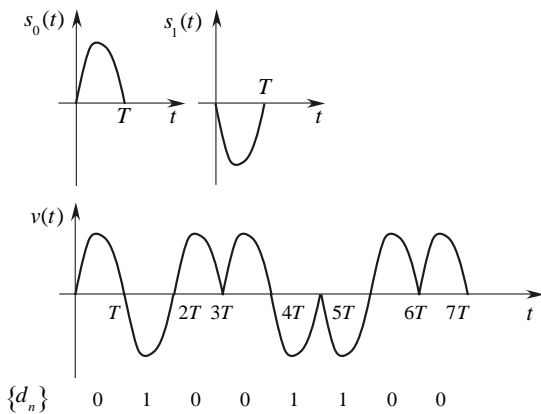


Fig. I.2 - Segnale numerico in banda base.

Nel caso di segnalazione binaria l'insieme S_M contiene solo due elementi ($M=2$) che sono associati ai simboli binari secondo la seguente regola:

$$(I.2.2) \quad \begin{aligned} d = 0 &\Rightarrow s_0(t) \\ d = 1 &\Rightarrow s_1(t) \end{aligned}$$

In Fig. I.2 è riportato un esempio di segnale numerico in corrispondenza della sequenza dati $\{d_n\}$ in cui ai simboli binari sono associate le forme di segnalazione $s_0(t)$ e $s_1(t)$ e rappresentate nella stessa figura.

Nel caso più generale di trasmissione M -aria, le forme di segnalazione sono poste in corrispondenza a gruppi di k simboli (parole). In altri termini, la sequenza dei dati emessa dalla sorgente è dapprima raggruppata in parole di k elementi e poi a ogni configurazione di k cifre si associa una forma di segnalazione $s_n(t)$. Naturalmente poiché esistono 2^k distinte parole di lunghezza m si dovrà avere:

$$(I.2.3) \quad M = 2^k$$

La quantità T , in genere diversa da T_0 , costituisce il periodo di simbolo. Il suo inverso

$$(I.2.4) \quad R = \frac{1}{T}$$

prende il nome di **velocità di modulazione** e individua il numero di simboli M -ari trasmessi nell'unità di tempo. La sua unità di misura è il *baud* o *simboli/sec*.

Una particolare forma di segnalazione è data dalla:

$$(I.2.5) \quad s_n(t) = a_n p(t)$$

dove a_n rappresenta un simbolo numerico appartenente ad un alfabeto di M elementi e $p(t)$ il cosiddetto **impulso di segnalazione**, supposto confinato in $[0, T)$. Un segnale di questo tipo è denominato **segnale PAM (Pulse Amplitude Modulation) multilivello** o **segnale PAM M-ario**. L'espressione del segnale PAM è quindi:

$$(I.2.6) \quad v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p(t-nT)$$

Nella segnalazione PAM in genere i simboli a_n sono distribuiti simmetricamente rispetto allo zero e si ha (v. Fig. I.3):

(I.2.7)
$$a_n = 2n - (M + 1) \quad n = 1, 2, \dots, M$$

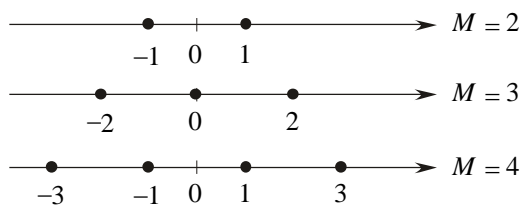


Fig. I.3 - Simboli numerici.

Nel caso di segnale PAM binario si ha la seguente corrispondenza:

(I.2.8)
$$\begin{aligned} d = 0 &\Rightarrow a = -1 \\ d = 1 &\Rightarrow a = +1 \end{aligned}$$

meglio nota come **codifica bipolare**.

Nel caso di segnalazione binaria si può adoperare la seguente corrispondenza

(**codifica unipolare**):

(I.2.9)
$$\begin{aligned} d = 0 &\Rightarrow a = 0 \\ d = 1 &\Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

che corrisponde ad adottare le segnalazioni $s_0(t) = 0$ e $s_1(t) = p(t)$.

Un'ulteriore alternativa è costituita dal **codice bipolare alternato** definito dalla:

(I.2.10)
$$\begin{aligned} d = 0 &\Rightarrow a = 0 \\ d = 1 &\Rightarrow a = \pm 1 \end{aligned}$$

dove la scelta del segno è fatta imponendo che nella sequenza dei simboli $\{a_n\}$ i simboli +1 e -1 si alternino. In tal caso i simboli a_n appartengono all'alfabeto ternario composto dagli elementi $\{-1, 0, 1\}$. Per questo motivo quest'ultimo codice è denominato anche **codice pseudo-ternario** giacchè i simboli +1 e -1 assumono lo stesso significato informativo. Si osservi che in questo caso la codifica della cifra $d_n = 1$ può essere effettuata solo se si conosce il valore del simbolo corrispondente alla cifra $d = 1$ precedente. Un tale tipo di codifica

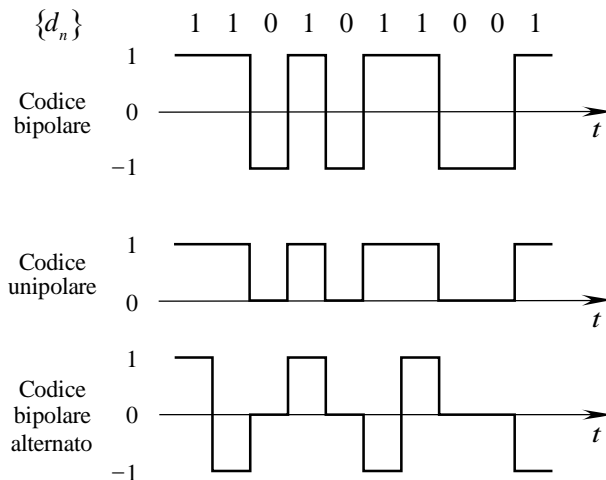


Fig I.4 - Struttura del segnale modulato per segnalazione PAM binaria.

costituisce un esempio di codifica con memoria a differenza dei codici bipolare ed unipolare che possono essere classificati come codici privi di memoria o istantanei.

In Fig. I.4 è rappresentato il segnale PAM binario $v(t)$ in corrispondenza delle codifiche sopra presentate e nel caso in cui l'impulso di segnalazione sia un rettangolo di durata T .

I.3 - La rivelazione del segnale numerico.

Con riferimento allo schema di Fig. I.1, ci si rende facilmente conto che il segnale ricevuto è una versione distorta del segnale prodotto dal trasmettitore e corrotta da disturbi. Se in quel che segue il mezzo di trasmissione si schematizza come un sistema lineare e tempo invariante, caratterizzato cioè da una risposta impulsiva pari a $h_t(t)$, la sola causa di disturbo che è presa in considerazione è costituita da un rumore additivo che si suppone di tipo gaussiano, a valor medio nullo, ed indipendente dalla sequenza dei simboli

trasmessi. In tale circostanza il segnale in arrivo al ricevitore è pertanto espresso dalla:

$$(I.3.1) \quad r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}_n(t-nT) + n(t)$$

dove

$$(I.3.2) \quad \tilde{s}_n(t) = s_n(t) * h_i(t)$$

rappresenta la forma di segnalazione in uscita dal canale quando al suo ingresso è presente il segnale $s_n(t)$.

La decisione sul simbolo trasmesso può essere eseguita leggendo il segnale ricevuto all'istante $t_k = kT + \tau$, dove è $\tau \in [0, T)$. Risulta:

$$(I.3.3) \quad r(t_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}_n((k-n)T + \tau) + n(t_k) = \tilde{s}_k(\tau) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{\infty} \tilde{s}_n((k-n)T + \tau) + n(t_k)$$

Nella precedente si distinguono tre termini:

- la quantità $\tilde{s}_k(\tau)$ che costituisce il segnale utile dato che è posta in corrispondenza con la segnalazione $s_k(t)$ trasmessa all'istante kT ;
- la quantità $\sum_{n \neq k} \tilde{s}_n((k-n)T + \tau)$ che tiene conto della trasmissione di tutti i dati emessi dalla sorgente eccetto il k -esimo e che pertanto costituisce la cosiddetta **interferenza d'intersimbolo (ISI InterSymbol Interference)**;
- la quantità $n(t_k)$ che costituisce il rumore prodotto dal mezzo di trasmissione.

È da notare che se le forme di segnalazione sono confinate nell'intervallo $[0, T)$ ed il mezzo di trasmissione è schematizzato come un canale ideale di banda sufficientemente ampia da accomodare completamente il segnale numerico, si ha:

$$(I.3.4) \quad \tilde{s}_n(t) = A s_n(t - t_d)$$

dove A denota l'attenuazione o il guadagno (a seconda se è $A < 1$ o $A > 1$) del mezzo di trasmissione e t_d il ritardo di propagazione. In tali condizioni l'interferenza di intersimbolo è nulla e la (I.3.3), tenendo conto della (I.3.4), si riduce alla:

$$(I.3.5) \quad r = s(\tau) + n$$

dove si è posto, per comodità di scrittura, $r \equiv r(t_k)$, $s(\tau) \equiv s_k(\tau)$, $n \equiv n(t_k)$ e, per semplicità, $A \equiv 1$ e $t_d = 0$ (¹).

I.4 - Probabilità di errore.

Lo scopo del ricevitore è di estrarre l'informazione trasmessa dal segnale in arrivo; esso deve quindi stimare il simbolo emesso dalla sorgente a partire dai valori del campione del segnale ricevuto. È ovvio che, in dipendenza dai valori assunti dal rumore, si possono commettere errori nella stima; nasce pertanto spontaneo valutare le prestazioni del ricevitore in termini della probabilità di errore definita dalla:

$$(I.4.1) \quad P_e = \Pr\{\hat{d}_k \neq d_k\}$$

e cioè alla probabilità che si verifichi l'evento $\{\hat{d}_k \neq d_k\}$ che corrisponde alla circostanza che il simbolo rivelato \hat{d}_k risulti diverso da quello d_k trasmesso.

(¹) È da notare che tale condizione comporta che il ricevitore conosca esattamente il valore del ritardo di propagazione o, detto in altri termini, che esso sia in grado di produrre un perfetto sincronismo.

A tale scopo è opportuno prendere qui in considerazione solo il caso di segnale numerico PAM. Si suppone inoltre il mezzo di trasmissione ideale cosicché l'impulso di segnalazione all'ingresso del ricevitore è dato da $p(t)$; inoltre si considera nulla l'interferenza di intersimbolo (cosa che si verifica se l'impulso di segnalazione è confinato nell'intervallo $[0, T)$). Il segnale letto all'istante generico di lettura vale quindi:

$$(I.4.2) \quad r = \alpha a + n$$

dove si è posto $r \equiv r(t_k)$, $a \equiv a_k$, $\alpha \equiv p(\tau)$ e $n \equiv n(t_k)$.

In termini generali il problema è alquanto complesso. Tuttavia se ci si limita a considerare soltanto codifiche di tipo istantaneo, la decisione sulla cifra trasmessa può essere effettuata simbolo per simbolo.

Nel caso di trasmissione binaria, considerata in questo paragrafo, lo schema del ricevitore si presenta come è indicato in Fig. I.5. Il valore campionato del segnale all'istante t_k è comparato con una soglia λ e, secondo il segno della quantità $r - \lambda$, è presa una decisione sul dato d da rivelare.

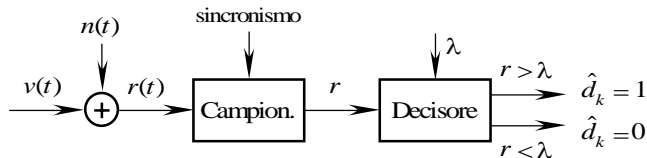


Fig. I.5 – Struttura del ricevitore per trasmissione binaria.

Il valore campionato del segnale all'istante t_k è comparato con una soglia λ e, secondo il segno della quantità $r - \lambda$, è presa una decisione sul dato d da rivelare.

Se $p_{r|0}(r|0)$ e $p_{r|1}(r|1)$ denotano le densità di probabilità di r , atteso che la sorgente abbia emesso le cifre $d_k = 0$ e $d_k = 1$ rispettivamente, le probabilità di errore condizionate valgono:

$$(I.4.3) \quad P_{e|0}(\lambda) = \Pr\{r > \lambda | d_k = 0\} = \int_{\lambda}^{\infty} p_{r|0}(r|0)dr$$

$$P_{e|1}(\lambda) = \Pr\{r < \lambda | d_k = 1\} = \int_{-\infty}^{\lambda} p_{r|1}(r|1)dr$$

Poiché gli eventi $\{d_k = 0\}$ e $\{d_k = 1\}$ sono disgiunti, denotando con $P_0 = \Pr\{d_k = 0\}$ e $P_1 = \Pr\{d_k = 1\}$ le probabilità ad essi associate, la probabilità di errore non condizionata è:

$$(I.4.4) \quad P_e = P_0 P_{e|0} + P_1 P_{e|1}$$

che, tenendo conto delle (I.4.3), diventa:

$$(I.4.5) \quad P_e = P_0 \int_{\lambda}^{\infty} p_{r|0}(r|0)dr + P_1 \int_{-\infty}^{\lambda} p_{r|1}(r|1)dr$$

Tale quantità dipende dal valore della soglia λ ; di conseguenza può determinarsi il valore ottimo λ_0 di λ che rende minimo la P_e imponendo la condizione:

$$(I.4.6) \quad \left. \frac{\partial P_e}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = 0$$

e cioè

$$(I.4.7) \quad P_0 p_{r|0}(\lambda_0 | 0) = P_1 p_{r|1}(\lambda_0 | 1)$$

I.4.1 – Caso del rumore gaussiano.

Se il rumore $n(t)$ si suppone gaussiano a valor medio nullo e varianza σ^2 , risulta:

$$(I.4.8) \quad p_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}$$

Di conseguenza sulla base della (I.4.2), si deduce:

$$(I.4.9) \quad \begin{aligned} p_{r|0}(r|0) &= p_n(r - \alpha a_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(r - \alpha a_0)^2}{2\sigma^2}\right] \\ p_{r|1}(r|1) &= p_n(r - \alpha a_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(r - \alpha a_1)^2}{2\sigma^2}\right] \end{aligned}$$

per cui la condizione (I.4.7) conduce alla

$$(I.4.10) \quad \lambda_0 = \alpha \frac{a_0 + a_1}{2} - \frac{\sigma^2}{\alpha(a_1 - a_0)} \log\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$$

Se i simboli trasmessi si suppongono equiprobabili ($P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$), si ottiene:

$$(I.4.11) \quad \lambda_0 = \alpha \frac{a_0 + a_1}{2}$$

In tale ipotesi, le probabilità di errore condizionate valgono:

$$(I.4.12) \quad \begin{aligned} P_{e|0} &= \int_{\alpha \frac{a_0+a_1}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(r-\alpha a_0)^2}{2\sigma^2}} dr \\ P_{e|1} &= \int_{-\infty}^{\alpha \frac{a_0+a_1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(r-\alpha a_1)^2}{2\sigma^2}} dr \end{aligned}$$

che, introducendo la funzione $Q(x)$ definita dalla:

$$(I.4.13) \quad Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

assumono la forma:

$$(I.4.14) \quad \begin{aligned} P_{e|0} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha a_1 - a_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = Q\left(\frac{\alpha a_1 - a_0}{\sigma}\right) \\ P_{e|1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\alpha a_1 - a_0}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha a_1 - a_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = Q\left(\frac{\alpha a_1 - a_0}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

La probabilità di errore è pertanto

$$(I.4.15) \quad P_e = Q\left(\frac{\alpha a_1 - a_0}{\sigma}\right)$$

Se i simboli emessi dalla sorgente non sono equiprobabili, è facile verificare che la probabilità di errore vale:

$$(I.4.16) \quad P_e(\lambda_0) = P_0 \cdot Q\left[\frac{a_1 - a_0}{2} \frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\sigma}{\alpha(a_1 - a_0)} \log\left(\frac{P_1}{P_0}\right)\right] + P_1 \cdot Q\left[\frac{a_1 - a_0}{2} \frac{\alpha}{\sigma} + \frac{\sigma}{\alpha(a_1 - a_0)} \log\left(\frac{P_1}{P_0}\right)\right]$$

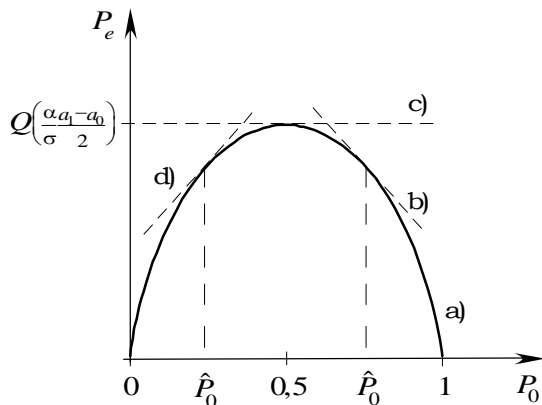


Fig. I.6 - Probabilità di errore in funzione di P_0 .

il cui andamento in funzione di P_0 è rappresentato in Fig. I.6 (curva a).

Nella maggior parte dei casi, non sono note le probabilità P_0 e P_1 associate ai simboli della sorgente; di conseguenza la soglia ottima data dalla (I.4.10), non può essere determinata. In questi casi è conveniente stimare le probabilità dei simboli della sorgente e valutare la soglia ottima:

$$(I.4.17) \quad \hat{\lambda}_0 = \alpha \frac{a_1 + a_0}{2} - \frac{\sigma^2}{\alpha(a_1 - a_0)} \log\left(\frac{\hat{P}_1}{\hat{P}_0}\right)$$

sulla base di una stima \hat{P}_0 e \hat{P}_1 delle suddette probabilità. Dette allora P_0 e P_1 le effettive

probabilità associate alla sorgente, la probabilità di errore diventa:

$$(I.4.18) \quad P_e = P_0 \cdot Q \left\{ \frac{\alpha(a_1 - a_0)}{2\sigma} - \frac{\sigma}{\alpha(a_1 - a_0)} \log \left(\frac{\hat{P}_1}{\hat{P}_0} \right) \right\} + P_1 \cdot Q \left\{ \frac{\alpha(a_1 - a_0)}{2\sigma} + \frac{\sigma}{\alpha(a_1 - a_0)} \log \left(\frac{\hat{P}_1}{\hat{P}_0} \right) \right\}$$

che nel piano (P_0, P_e) della Fig. I.6, è rappresentata da una retta con pendenza positiva (curva d) o negativa (curva b) a seconda se è $\hat{P}_0 < \frac{1}{2}$ o $\hat{P}_0 > \frac{1}{2}$. Una tale scelta potrebbe produrre un degrado inaccettabile delle prestazioni del sistema in termini di probabilità di errore specie quando la probabilità P_0 è prossima ai suoi valori estremi. Se la stima della probabilità dei simboli della sorgente è fatta scegliendo $\hat{P}_0 = \hat{P}_1 = \frac{1}{2}$, la probabilità di errore assume l'espressione (I.4.15) e risulta indipendente da P_0 (curva c). Una tale situazione costituisce un accettabile compromesso dal momento che non pregiudica eccessivamente le prestazioni del sistema. In un sistema di trasmissione binaria, quindi, il ricevitore posiziona la soglia al valore λ_0 dato dalla (I.4.10), indipendentemente dal valore delle probabilità associate ai simboli di sorgente; in corrispondenza a tale situazione la probabilità di errore risulta data dalla (I.4.15) ed è indipendente dai valori di P_0 e P_1 .

I.5 - Il ricevitore ottimo.

Come si deduce dalle (I.4.15) e (I.4.16), la probabilità di errore dipende, a parità di forma di segnalazione, dalla quantità $\frac{\alpha}{\sigma}$ attraverso la funzione $Q(\cdot)$. Poiché tale funzione è strettamente decrescente all'aumentare del suo argomento, si conclude che la massimizzazione della quantità $\frac{\alpha}{\sigma}$ conduce ad un ricevitore che fornisce le migliori prestazioni in termini di probabilità di errore.

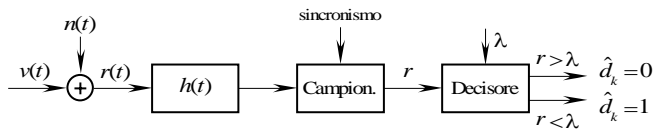


Fig. I.7 - Struttura del ricevitore ottimo.

Limitandosi a considerare la classe dei ricevitori la cui struttura è riportata in Fig. I.7 comprendente in particolare un filtro in ingresso, supposto lineare e tempo invariante,

caratterizzato da una risposta impulsiva pari ad $h(t)$, il problema del ricevitore ottimo consiste nel determinare la forma $h_o(t)$ della risposta impulsiva del filtro che renda minima la probabilità di errore. Supponendo che il segnale numerico all'uscita del filtro $h(t)$, letto all'istante di campionamento $t_k = kT + \tau$ ($\tau \in [0, T)$), non presenti interferenza d'intersimbolo, la condizione di minima probabilità di errore si raggiunge quando è massima la quantità $\frac{\alpha}{\sigma}$, in cui le grandezze che in essa compaiono sono valutate all'uscita del filtro $h(t)$.

Si ha:

$$(I.5.1) \quad \tilde{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau - \lambda) h(\lambda) d\lambda$$

D'altra parte, se il rumore $n(t)$ in ingresso è stazionario, a valor medio nullo e bianco, la varianza del rumore in uscita vale:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}^2 &= E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau - \lambda_1) n(\tau - \lambda_2) h(\lambda_1) h(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \right\} = \\
 (I.5.2) \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E \{ n(\tau - \lambda_1) n(\tau - \lambda_2) \} h(\lambda_1) h(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \delta(\lambda_2 - \lambda_1) h(\lambda_1) h(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\lambda) d\lambda
 \end{aligned}$$

avendo denotato con $\frac{N_0}{2}$ la densità spettrale di $n(t)$. La quantità $\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\sigma}}$ allora diviene:

$$(I.5.3) \quad \gamma = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\sigma}} = \sqrt{\frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau - \lambda) h(\lambda) d\lambda}{N_0 \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\lambda) d\lambda}}}$$

Per determinare il valore ottimo di $h(t)$ basta far riferimento alla disuguaglianza di Schwarz secondo la quale se $x(t)$ e $y(t)$ denotano due funzioni reali di variabile reale t , a quadrato integrabile in \mathbb{R} , si ha:

$$(I.5.4) \quad \left| \int_{\mathbb{R}} x(t) y(t) dt \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} x^2(t) dt \cdot \int_{\mathbb{R}} y^2(t) dt$$

dove il segno di uguaglianza vale solo se è

$$(I.5.5) \quad y(t) = k \cdot x(t)$$

e cioè se le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono proporzionali. Ponendo nella (I.5.3)

$$(I.5.6) \quad x(t) = p(\tau - t) \quad ; \quad y(t) = h(t)$$

si ottiene

$$(I.5.7) \quad \gamma \leq \sqrt{\frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} p^2(\tau - t) dt}{N_0}} = \sqrt{\frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} p^2(t) dt}{N_0}} = \sqrt{\frac{2E}{N_0}} \equiv \gamma_o$$

essendo E l'energia dell'impulso di segnalazione. Ciò significa che al variare di $h(t)$ la quantità γ non supera il limite γ_o che costituisce per-

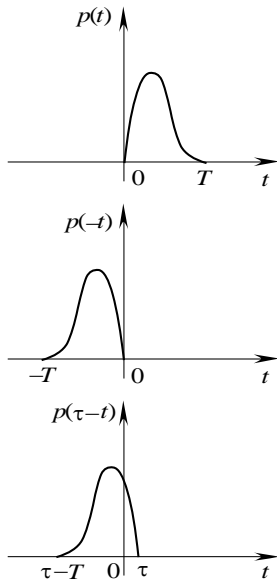


Fig. I.8 - Condizioni di causalità per il filtro adattato.

tanto il suo valore massimo. Tale massimo si raggiunge quando è verificata la condizione (I.5.5) che, tenendo conto delle posizioni fatte, consente di dedurre l'espressione della caratteristica del filtro ottimo:

$$(I.5.8) \quad h_o(t) = kp(\tau - t)$$

dipendente dall'impulso di segnalazione. Per questo motivo il filtro in questione prende il nome di **filtro adattato**.

Si noti che la costante k non influenza il valore ottimo γ_o della quantità γ e per questo motivo può essere considerata unitaria nella (I.5.8).

È bene osservare che non sempre il filtro, definito dalla (I.5.8), risulta fisicamente realizzabile, giacché la funzione $h_o(t)$ può violare la condizione di causalità e-

spressa dalla

$$(I.5.9) \quad h_o(t) \equiv 0 \quad \text{per } t < 0$$

Tuttavia, se l'impulso di segnalazione $p(t)$ è di durata T , $h_o(t)$ risulta fisicamente realizzabile solo se (v. Fig. I.8) è $\tau = T$. Allora $h_o(t)$ vale:

$$(I.5.10) \quad h_o(t) = k \cdot p(T - t)$$

Esempio I.1

Nel caso particolare in cui $p(t)$ sia un impulso rettangolare unitario, confinato nell'intervallo $[0, T)$, risulta (con $k = 1$):

$$h_o(t) = \text{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right)$$

per cui la risposta del filtro adattato quando al suo ingresso è presente l'impulso di segnalazione $p(t)$ è:

$$q(t) = p(t) * h_o(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) h_o(t - \tau) d\tau = \int_0^T \text{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right) d\tau = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 \leq t \leq T \\ T-t & T \leq t \leq 2T \\ 0 & t \geq 2T \end{cases}$$

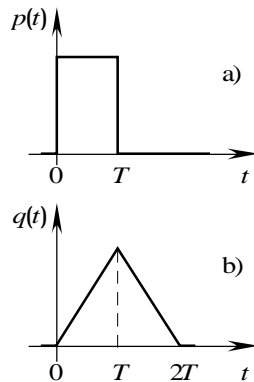


Fig. E.1

Con riferimento alla Fig.E.1 che rappresenta l'impulso $q(t)$ è evidente che nell'istante di lettura T il valore $r(T)$ può essere ottenuto integrando l'impulso in ingresso $p(t)$. Un tale filtro può essere quindi realizzato da un integratore, il quale è azzerato negli istanti $t_k = (k + 1)T$, provenienti dal sincronismo generato al ricevitore, come è mostrato in Fig. E.2.

Se $p(t)$ ha una forma diversa dalla rettangolare ma pur sempre confinata nell'intervallo $[0, T)$ il segnale in uscita dal filtro adattato, quando al suo ingresso è applicato il segnale $x(t)$ e valutato all'istante T , vale:

$$(I.5.11) \quad y(T) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h_o(T - \lambda) d\lambda = k \int_0^{T_0} x(\lambda) p(\lambda) d\lambda$$

Dalla (I.5.11) si deduce che lo schema del ricevitore ottimo può assumere la struttura a **correlatore** riportata in Fig. I.9, che comporta le operazioni di prodotto e successiva integrazione.

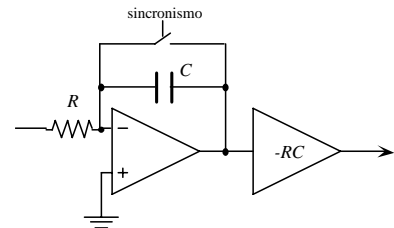


Fig. E.2

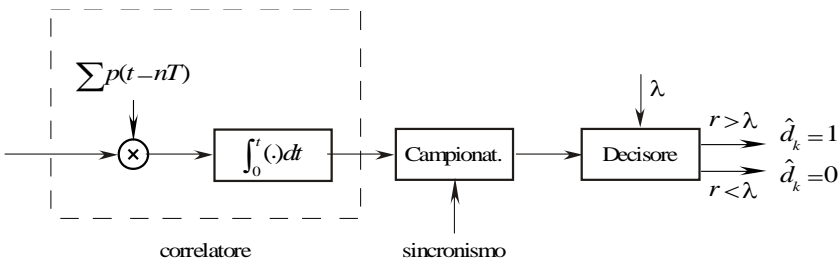


Fig. I.9 - Ricevitore ottimo a correlazione.

basta infatti generare al ricevitore la sequenza $\sum p(t - kT_0)$ senza dover sostituire il filtro come nel caso di ricevitore a filtro adattato.

In presenza di filtro adattato la probabilità di errore, supposti i simboli equiprobabili, diviene:

$$(I.5.12) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}} \frac{a_1 - a_0}{\sqrt{2}}\right)$$

Nel caso di codifica bipolare ($a_0 = -1; a_1 = 1$), la (I.5.12) fornisce:

$$(I.5.13) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

Nel caso di codifica unipolare, essendo $a_0 = 0 a_1 = 1$, si ha:

Rispetto alla struttura a filtro adattato lo schema a correlatore è più flessibile quando occorre variare la forma dell'impulso di segnalazione; in tal caso

$$(I.5.14) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

Al fine di paragonare i due sistemi di segnalazione è opportuno introdurre l'energia media per simbolo E_m definita dalla:

$$(I.5.15) \quad E_m = E\{a^2\} \int_T p^2(t) dt = E\{a^2\} E$$

che vale:

$$(I.5.16) \quad E_m = \begin{cases} E & \text{cod. bipolare} \\ \frac{1}{2} E & \text{cod. unipolare} \end{cases}$$

e quindi la probabilità di errore P_e , in termini del rapporto $\frac{E_m}{N_0}$, diventa:

$$(I.5.17) \quad P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{\frac{2E_m}{N_0}}\right) & \text{cod. bipolare} \\ Q\left(\sqrt{\frac{E_m}{N_0}}\right) & \text{cod. unipolare} \end{cases}$$

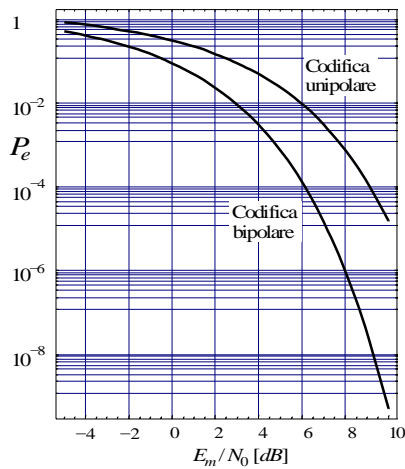


Fig. I.10 - Probabilità di errore in funzione di E_m/N_0 .

In Fig. I.10 sono riportati gli andamenti della probabilità di errore in funzione del rapporto segnale rumore $\frac{E_m}{N_0}$ per i due tipi di codifica esaminati. È evidente che a parità di $\frac{E_m}{N_0}$ la probabilità di errore è minore nel caso di codifica bipolare rispetto a quella che si ottiene con codifica unipolare; per ottenere lo stesso valore di P_e , infatti, la codifica bipolare comporta una riduzione del rapporto $\frac{E_m}{N_0}$ di 2 che espresso in dB vale circa 3 dB ($=10 \log_{10} 2$).

I.6 - Densità spettrale del segnale numerico.

La densità spettrale del segnale numerico PAM, definito dalla (I.2.6), dipende, oltre che dalla forma dell'impulso di segnalazione $p(t)$, anche dalle proprietà statistiche della sequenza dei simboli a_n a loro volta dipendenti dal tipo di codifica adottata.

In quel che segue, la sequenza di cifre $\{d_n\}$ si suppone stazionaria e costituita da elementi incorrelati ed equiprobabili. Per contro i simboli a_n possono essere correlati, dipendentemente dalla struttura del codice adottato; la sequenza $\{a_n\}$ è comunque stazionaria e pertanto caratterizzata dalla funzione di autocorrelazione discreta:

$$(I.6.1) \quad R_a(k) = E\{a_n a_{n+k}\}$$

Com'è noto, la densità spettrale può calcolarsi trasformando secondo Fourier la media temporale della funzione di autocorrelazione $R_v(t, \tau)$ del segnale numerico $v(t)$ e cioè:

$$(I.6.2) \quad W_v(f) = F\{<R_v(t, \tau)>\}$$

Di conseguenza, per valutare la $W_v(f)$ occorre innanzi tutto determinare l'espressione della funzione $R_v(t, \tau)$.

I.6.1 - Autocorrelazione $R_v(t, \tau)$.

Ricordando l'espressione (I.2.6) del segnale $v(t)$, la $R_v(t, \tau)$ diviene:

$$(I.6.3) \quad R_v(t, \tau) = E\{v(t)v(t+\tau)\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{a_m a_n\} p(t-mT)p(t+\tau-nT)$$

che, tenendo presente la (I.6.1), si scrive:

$$(I.6.4) \quad R_v(t, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_a(n-m)p(t-mT)p(t+\tau-nT)$$

Effettuando nella (I.6.4) la seguente trasformazione di indici $r = n - m$ e $s = m$, si ottiene:

$$(I.6.5) \quad R_v(t, \tau) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} R_a(r) \sum_{s=-\infty}^{\infty} p(t-sT)p[t+\tau-(r+s)T]$$

Poiché risulta:

$$(I.6.6) \quad \begin{aligned} & \sum_{s=-\infty}^{\infty} p(t+T-sT)p[t+T+\tau-(r+s)T] = \\ & = \sum_{s=-\infty}^{\infty} p[t-(s-1)T]p[t+\tau-(r+s-1)T] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} p(t-sT)p[t+\tau-(r+s)T] \end{aligned}$$

la funzione $R_v(t, \tau)$ è periodica in t di periodo T . Il segnale $v(t)$ è pertanto ciclostazionario. Ciò comporta che la media temporale della funzione $R_v(t, \tau)$ si riduce alla:

$$(I.6.7) \quad \langle R_v(t, \tau) \rangle = \sum_{r=-\infty}^{\infty} R_a(r) \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t-sT)p[t+\tau-(r+s)T]dt$$

che, con un'opportuna trasformazione di variabili, assume la forma:

$$(I.6.8) \quad \begin{aligned} \langle R_v(t, \tau) \rangle &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} R_a(r) \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}-sT}^{\frac{T}{2}-sT} p(t)p(t+\tau-rT)dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} R_a(r) \int_{-\infty}^{\infty} p(t)p(t+\tau-rT)dt \end{aligned}$$

Denotando pertanto con $\gamma_p(\tau)$ la funzione di autocorrelazione associata all'impulso di segnalazione, supposto ad energia finita:

$$(I.6.9) \quad \gamma_p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)p(t+\tau)dt$$

la precedente diviene:

$$(I.6.10) \quad \langle R_v(t, \tau) \rangle = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} R_a(r)\gamma_p(\tau-rT)$$

I.6.2 - Densità spettrale $W_v(f)$.

In base alla (I.6.2) si ottiene:

$$(I.6.11) \quad W_v(f) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} R_a(r)F\{\gamma_p(\tau-rT)\}$$

dalla quale, ricordando che per il teorema di Wiener è:

$$(I.6.12) \quad F\{\gamma_p(\tau)\} = |P(f)|^2$$

avendo denotato con $P(f)$ la trasformata di Fourier dell'impulso di segnalazione $p(t)$, discende:

$$(I.6.13) \quad W_v(f) = \frac{|P(f)|^2}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} R_a(r)e^{-j2\pi frT}$$

a) Codice bipolare

Essendo, per le ipotesi fatte $E\{a_n\} = 1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 0$, risulta:

$$(I.6.14) \quad \begin{aligned} R_a(0) &= E\{a_n^2\} = 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 1 \\ R_a(r) &= E\{a_n a_{n+r}\} = E\{a_n\}E\{a_{n+r}\} = 0 \end{aligned}$$

e quindi la (I.6.13) vale:

$$(I.6.15) \quad W_v(f) = \frac{|P(f)|^2}{T}$$

b) **Codice unipolare**

Essendo $E\{a_n\} = 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, si ha:

$$(I.6.16) \quad \begin{aligned} R_a(0) &= 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ R_a(r) &= E\{a_n a_{n+r}\} = E\{a_n\} E\{a_{n+r}\} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

per cui la (I.6.13), ricordando la formula di Poisson $\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi frT} = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{r}{T})$, diviene:

$$(I.6.17) \quad \begin{aligned} W_v(f) &= \frac{|P(f)|^2}{T} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq 0}}^{\infty} e^{-j2\pi frT} \right] = \frac{|P(f)|^2}{T} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi frT} \right] = \\ &= \frac{|P(f)|^2}{T} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{r}{T}) \right] \end{aligned}$$

che si può porre nella forma:

$$(I.6.18) \quad W_v(f) = \frac{|P(f)|^2}{4T} + \frac{1}{4T^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} |P(\frac{r}{T})|^2 \delta(f - \frac{r}{T})$$

c) **Codice bipolare alternato**

L'autocorrelazione $R_a(r)$, associata alla sequenza $\{a_n\}$, vale:

$$(I.6.19) \quad \begin{aligned} R_a(0) &= E\{a_n^2\} = 1 \cdot \Pr\{a_n = 1\} + 1 \cdot \Pr\{a_n = -1\} \\ R_a(1) &= E\{a_n a_{n+1}\} = -1 \cdot \Pr\{a_n = 1, a_{n+1} = -1\} - 1 \cdot \Pr\{a_n = -1, a_{n+1} = 1\} \\ R_a(r) &= E\{a_n a_{n+r}\} = -1 \cdot \Pr\{a_n = 1, a_{n+r} = -1\} + 1 \cdot \Pr\{a_n = 1, a_{n+r} = 1\} + \\ &\quad -1 \cdot \Pr\{a_n = -1, a_{n+r} = 1\} + 1 \cdot \Pr\{a_n = -1, a_{n+r} = -1\} \quad | r | \geq 2 \end{aligned}$$

D'altra parte si ha:

$$(I.6.20) \quad \begin{aligned} \Pr\{a_n = 0\} &= \frac{1}{2} \\ \Pr\{a_n = 1\} &= \Pr\{a_n = -1\} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

e per la formula di Bayes

$$(I.6.21) \quad \begin{aligned} \Pr\{a_n = 1, a_{n+1} = -1\} &= \Pr\{a_{n+1} = -1 | a_n = 1\} \Pr\{a_n = 1\} = \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \\ \Pr\{a_n = -1, a_{n+1} = 1\} &= \Pr\{a_{n+1} = 1 | a_n = -1\} \Pr\{a_n = -1\} = \frac{1}{2} \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

e analogamente per $r \geq 2$:

$$(I.6.22) \quad \begin{aligned} \Pr\{a_n = 1, a_{n+r} = 1\} &= \Pr\{a_{n+r} = 1 | a_n = 1\} \Pr\{a_n = 1\} = \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \\ \Pr\{a_n = 1, a_{n+r} = -1\} &= \Pr\{a_{n+r} = -1 | a_n = 1\} \Pr\{a_n = 1\} = \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \\ \Pr\{a_n = -1, a_{n+r} = 1\} &= \Pr\{a_{n+r} = 1 | a_n = -1\} \Pr\{a_n = -1\} = \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \\ \Pr\{a_n = -1, a_{n+r} = -1\} &= \Pr\{a_{n+r} = -1 | a_n = -1\} \Pr\{a_n = -1\} = \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Risulta allora:

$$(I.6.23) \quad \begin{aligned} R_a(0) &= 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ R_a(1) &= -1\frac{1}{8} - 1\frac{1}{8} = -\frac{1}{4} = R_a(-1) \\ R_a(r) &= -1\frac{1}{16} + 1\frac{1}{16} - 1\frac{1}{16} + 1\frac{1}{16} = 0 = R_a(-r) \quad | r | \geq 2 \end{aligned}$$

per cui:

$$(I.6.24) \quad W_a(f) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (e^{j2\pi fT} + e^{-j2\pi fT}) = \frac{1 - \cos(2\pi fT)}{2} = \sin^2(\pi fT)$$

e quindi la $W_v(f)$ vale:

$$(I.6.25) \quad W_v(f) = \frac{|P(f)|^2}{T} \sin^2(\pi fT)$$

Le densità spettrali così ottenute sono composte da una componente continua e da una componente discreta; quest'ultima è presente solo nel caso di codifica unipolare.

Se l'impulso di segnalazione assume la forma rettangolare e cioè $p(t) = \text{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right)$, si ha:

$$(I.6.26) \quad |P(f)|^2 = T^2 \text{sinc}^2(fT)$$

Risulta in definitiva:

a) per il **codice bipolare**:

$$(I.6.27) \quad W_v(f) = T \text{sinc}^2(fT)$$

b) per il **codice unipolare**:

$$(I.6.28) \quad W_v(f) = \frac{T}{4} \text{sinc}^2(fT) + \frac{1}{4} \delta(f)$$

c) per il **codice bipolare alternato**:

$$(I.6.29) \quad W_v(f) = T \text{sinc}^2(fT) \sin^2(\pi fT)$$

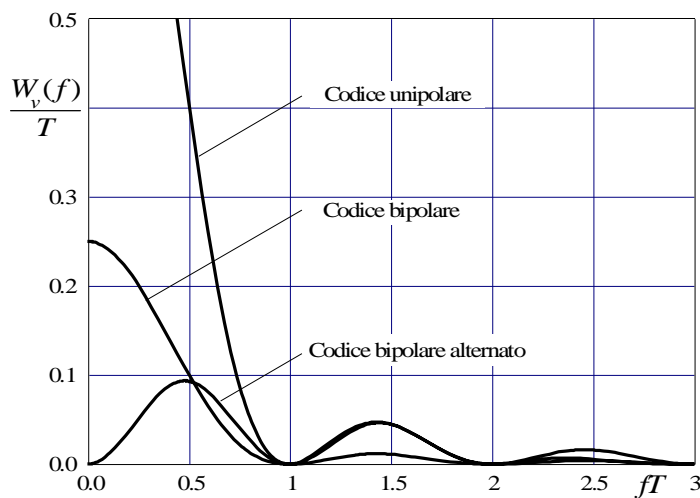


Fig. I.12 - Densità spettrale del segnale numerico PAM per vari tipi di codifica e con impulso di segnalazione rettangolare.

Le componenti continue delle densità spettrali così ottenute sono rappresentate in Fig. I.12. Dalla stessa figura si rileva che i codici bipolari ed unipolari presentano componenti spettrali elevati alle basse frequenze. Per questo motivo il segnale può subire forti degradazioni se il mezzo di trasmissione presenta una frequenza di taglio inferiore non nulla.

I.7 - Codifica PAM multilivello.

I.7.1- Caratteristiche del segnale numerico.

Nel caso di codifica multilivello i simboli a_n possono assumere valori appartenenti ad un alfabeto composto da M elementi distinti che, come espresso dalla (I.2.7) si suppongono distribuiti simmetricamente attorno allo zero.

Nella modulazione PAM multilivello le cifre d_n del messaggio sono raggruppate in blocchi di m elementi ed ad ogni configurazione di cifre si fa corrispondere un valore a_n scelto fra

$$(I.7.1) \quad M = 2^m$$

possibili secondo opportune regole all'uso stabilite. Così ad esempio nel caso di codifica a $M = 4$ livelli, adottando lo schema di codifica riportato nella Tab. I.1, il segnale numerico assume la forma indicata in Fig. I.13.

Codici di questo tipo sono detti **codici di Gray**. Essi sono caratterizzati dal fatto che sequenze binarie corrispondenti a due livelli contigui differiscono solo per un bit.

Per costruire un codice di Gray si può procedere come appresso indicato:

$\{d_n\}$ 01 10 00 11 10 00 11 01 10 01 00 11

Tabella I.1

d_{n-1}	d_n	a_n
0	0	-3
0	1	-1
1	1	1
1	0	3

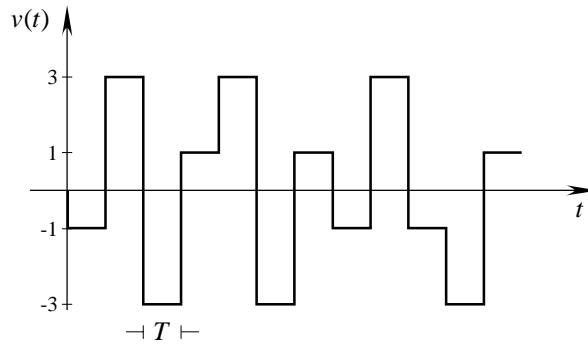


Fig. I.13 - Codifica multilivello.

- si numerino i livelli dal più piccolo al più grande e si associa ad ogni livello un codice binario che corrisponde alla rappresentazione binaria dell'ordine del livello;
- a partire dalla codifica binaria b_1, b_2, \dots, b_n , dove b_1 è la cifra più significativa e b_n quella meno significativa, si costruisce il codice di Gray D_1, D_2, \dots, D_n operando secondo la seguente regola:

$$(I.7.2) \quad \begin{aligned} D_1 &= b_1 \\ D_i &= b_i + b_{i-1} \pmod{2} \quad (i \geq 2) \end{aligned}$$

dove la somma "modulo 2" è definita in accordo al seguente schema

	0	1
0	0	1
1	1	0

Con $M = 8$ si ottiene la codifica di Gray come è indicato nella Tab. I.2

Tabella I.2

Numero d'ordine del livello	0	1	2	3	4	5	6	7
Rappresentazione binaria	000	001	010	011	100	101	110	111
Codifica di Gray	000	001	011	010	110	111	101	100

Si noti che, se con T_0 si denota il periodo di cifra, con $m = 4$ risulta $T = 2T_0$. Più in generale è $T = mT_0$ e di conseguenza la velocità di modulazione vale:

$$(I.7.3) \quad R = \frac{1}{T} = \frac{1}{T_0 \log_2 M} = \frac{r}{\log_2 M}$$

e risulta inferiore al ritmo binario r . È da osservare, però, che se i livelli a_n sono equiprobabili, l'informazione media associata ad ogni simbolo a_n è $\log_2 M$, cosicché la velocità d'informazione risulta pari a $R \cdot \log_2 M = r$ come nel caso della trasmissione binaria.

I.7.2 - Densità spettrale.

Se le cifre d_n emesse dalla sorgente possono ritenersi indipendenti ed equiprobabili, i livelli a_n saranno anch'essi indipendenti ed equiprobabili e ad ognuno di essi può essere associata una probabilità pari a $\frac{1}{M}$. Di conseguenza la densità spettrale del segnale mo-

dulato $v(t)$ può essere calcolata per mezzo della (I.6.13) dove è ora:

$$(I.7.4) \quad R_a(r) = E\{a_n a_{n+r}\} = \begin{cases} E\{a_n^2\} & r = 0 \\ E\{a_n\} \cdot E\{a_{n+r}\} & r \neq 0 \end{cases}$$

Tenendo conto delle relazioni:

$$(I.7.5) \quad \sum_{n=1}^M n = \frac{M(M+1)}{2} \quad \sum_{n=1}^M n^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}$$

si ottiene

$$(I.7.6) \quad R_a(0) = \sum_{n=1}^M \frac{1}{M} [2n - (M+1)]^2 = \frac{4}{M} \sum_{n=1}^M n^2 - \frac{4(M+1)}{M} \sum_{n=1}^M n + \frac{(M+1)^2}{M} M = \frac{M^2 - 1}{3}$$

e

$$(I.7.7) \quad R_a(r) = \left[\sum_{n=1}^M \frac{1}{M} [2n - (M+1)] \right]^2 = 0 \quad (r \neq 0)$$

La (I.6.13) pertanto diventa:

$$(I.7.8) \quad W_v(f) = \frac{M^2 - 1}{3} \frac{|P(f)|^2}{T}$$

che, supponendo $p(t)$ costituito da un impulso rettangolare di durata $T = T_0 \log_2 M$

$$(I.7.9) \quad |P(f)| = T_0 \log_2 M |\text{sinc}(fT_0 \log_2 M)|$$

vale

$$(I.7.10) \quad W_v(f) = T_0 \log_2 M \frac{M^2 - 1}{3} \text{sinc}^2(fT_0 \log_2 M)$$

che per $M=2$ coincide con l'espressione già ricavata nel caso di codifica bipolare.

In Fig. I.14 è riportato l'andamento di $W_v(f)$ per diversi valori di M . Dalla stessa figura si rivela che, all'aumentare di M , la banda occupata dal segnale diminuisce; in particolare, detta B_2 la banda relativa alla codifica binaria, quando si adotta un codice multilivello si ha:

$$(I.7.11) \quad B_M = \frac{B_2}{m} = \frac{B_2}{\log_2 M}$$

Per contro l'energia specifica media del segnale ricevuto con codifica multilivello, a parità di energia dell'impulso di segnalazione, vale:

$$(I.7.12) \quad E_M = \frac{1}{M} \left[\sum_{n=1}^M a_n^2 \right] E = \frac{M^2 - 1}{3} E$$

essendo E l'energia specifica dell'impulso di segnalazione.

Nel caso bipolare la (I.7.11) vale

$$(I.7.13) \quad E_2 = E$$

cosicché, dal confronto fra la (I.7.12) e (I.7.13) si deduce che la codifica multilivello comporta un impegno maggiore di energia di $\frac{M^2 - 1}{3}$.

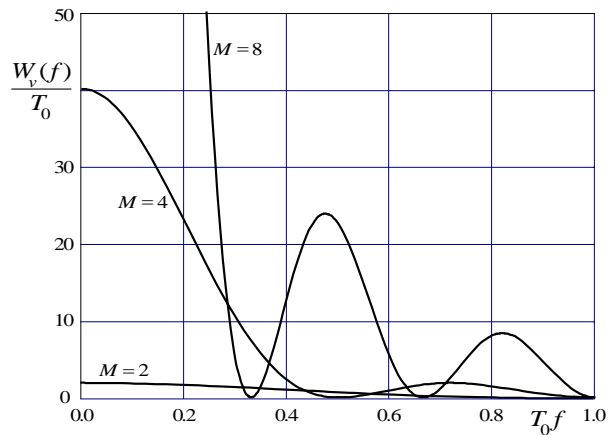


Fig. I.14 - Densità spettrale del segnale multilivello.

I.7.3 - Probabilità di errore.

Per valutare la probabilità di errore basta ricordare che, nell'ipotesi che il canale di trasmissione sia ideale, il segnale in ingresso al demodulatore è

$$(I.7.14) \quad r = \alpha a + n$$

essendo, come prima, r ed n i valori dei campioni del segnale ricevuto e del rumore nell'istante di campionamento $t_k = kT_0 + \tau$. L'attenuazione di canale α , come precedentemente, è pari a $p(\tau)$ ed a denota il generico simbolo M -ario trasmesso.

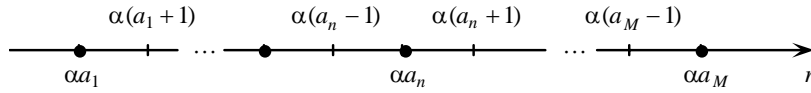


Fig. I.15 - Regioni di decisione.

Seguendo lo stesso criterio di decisione adottato per il caso binario, il ricevitore

decide sul simbolo a_n trasmesso secondo il valore assunto dal segnale ricevuto $r = \alpha a + n$. Se i livelli trasmessi sono equiprobabili la decisione sul livello a_n è presa se r cade nell'intervallo $I_n \equiv [\alpha(a_n - 1), \alpha(a_n + 1)]$, per i livelli intermedi; per i livelli terminali, si decide a favore del livello a_1 se r cade nell'intervallo $I_1 \equiv [-\infty, \alpha(a_1 + 1)]$ e del livello a_M se r è contenuto nell'intervallo $I_M \equiv [\alpha(a_M - 1), +\infty]$ (v. Fig. I.15).

Denotando con $P_{e|a_n}$ la probabilità di errore condizionata dalla trasmissione del simbolo a_n , la probabilità di errore non condizionata può esprimersi con la

$$(I.7.15) \quad P_e = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M P_{e|a_n}$$

in cui, essendo gli eventi $\{r < \alpha(a_n - 1)\}$ e $\{r > \alpha(a_n + 1)\}$ disgiunti, è:

$$(I.7.16) \quad \begin{aligned} P_{e|a_n} &= \Pr\{r \notin I_n \mid a = a_n\} = \\ &= \Pr\{r < \alpha(a_n - 1) \mid a = a_n\} + \Pr\{r > \alpha(a_n + 1) \mid a = a_n\} = \\ &= \Pr\{n < -\alpha\} + \Pr\{n > \alpha\} \quad 2 \leq n \leq M-1 \end{aligned}$$

e, analogamente

$$(I.7.17) \quad \begin{aligned} P_{e|a_1} &= \Pr\{r \notin I_1 \mid a = a_1\} = \Pr\{r > \alpha(a_1 + 1) \mid a = a_1\} = \Pr\{n > \alpha\} \\ P_{e|a_M} &= \Pr\{r \notin I_M \mid a = a_M\} = \Pr\{r < \alpha(a_M - 1) \mid a = a_M\} = \Pr\{n < -\alpha\} \end{aligned}$$

Se il rumore $n(t)$ è un processo stazionario gaussiano a media nulla e varianza σ^2 si ha

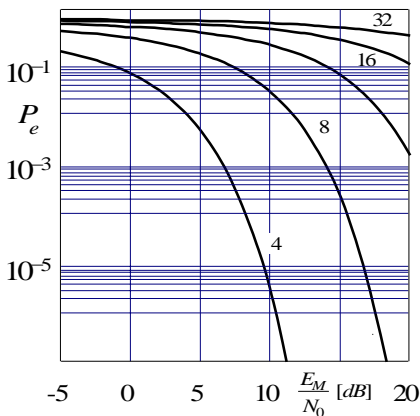


Fig. I.16 - Probabilità di errore per segnali multilivello in funzione di E_M / N_0 .

$$(I.7.18) \quad \Pr\{n > \alpha\} = \Pr\{n < -\alpha\} = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn = Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$$

Tenendo conto delle (I.7.16) e (I.7.17), la (I.7.15) diventa

$$(I.7.19) \quad P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$$

che, quando si pone $M=2$, coincide con l'espressione già ottenuta nel caso binario.

Come nel caso binario la P_e dipende dal rapporto $\frac{\alpha}{\sigma}$ cosicché il minimo di tale quantità si ottiene in presenza di filtro adattato. Supponendo che il rumore introdotto dal canale sia bianco e con densità

spettrale pari a $\frac{N_0}{2}$, il minimo della P_e è dato dalla:

$$(I.7.20) \quad P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right)$$

Introducendo anche in questo caso l'energia media per simbolo, definita dalla (I.7.12), la (I.7.20) diventa:

$$(I.7.21) \quad P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q \left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1} \frac{E_M}{N_0}} \right)$$

La probabilità di errore per simbolo è rappresentata in Fig. I.16, in funzione del rapporto segnale rumore E_M/N_0 per diversi valori di M .

Allo scopo di paragonare i sistemi multilivello con quelli binari è più significativo introdurre la probabilità di errore per bit P_{eb} . Mentre nel caso binario la P_{eb} coincide con la P_e , nel caso di codifica multilivello non esistono relazioni semplici fra queste quantità. Tuttavia ammettendo che la codifica multilivello sia effettuata in modo tale che le sequenze binarie corrispondenti a due livelli contigui differiscono solo per la posizione di un bit (come nel caso del codice di Gray) e supponendo inoltre che il valore del rapporto segnale rumore sia talmente elevato da considerare trascurabile la probabilità che si rilevi un livello non adiacente da quello trasmesso, la probabilità di errore per bit sarà allora data dalla

$$(I.7.22) \quad P_{eb} = \frac{P_e}{m} = \frac{P_e}{\log_2 M}$$

Nella Tab. I.3 sono riassunte le principali caratteristiche della codifica multilivello rispetto a quella binaria. Dalla Tabella si deduce che le prestazioni della codifica M -aria in termini di energia specifica e di probabilità di errore sono peggiori rispetto a quelli che si ottengono nella codifica binaria; per contro il sistema multilivello richiede una banda di ampiezza minore. I sistemi di codifica M -ari sono allora impiegati in tutti quei casi in cui la riduzione di banda costituisce il principale obiettivo. In tali casi la diminuzione della probabilità di errore è compensata da un aumento della potenza del segnale trasmesso.

Tabella I.3

	Codifica binaria	Codifica M-aria
Banda del segnale modulato	B	$\frac{B}{\log_2 M}$
Energia specifica media del segnale modulato	E	$\frac{M^2-1}{3} E$
Probabilità di errore per bit (con codifica Gray)	$Q \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right)$	$2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}} \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right)$