

Capitolo II

TRASMISSIONE NUMERICA SU CANALI A BANDA LIMITATA

Quando la banda del mezzo di trasmissione è limitata si crea un'interferenza fra i simboli trasmessi (ISI Interferenza intersimbolica). In questo Capitolo, nel caso di modulazione PAM, sono dette le condizioni cui deve soddisfare l'impulso di segnalazione, all'ingresso del ricevitore, perché tale interferenza sia nulla (condizioni di Nyquist). In particolare è discussa la forma detta a *coseno rialzato* con cui normalmente è sagomato l'impulso di segnalazione all'ingresso del ricevitore. Infine sono studiati i segnali a risposta parziale che consentono la trasmissione dell'informazione alla massima velocità consentita dal canale seppur introducono una quantità controllata di ISI.

II.1 - Generalità.

Nei casi reali il canale di trasmissione introduce distorsioni ed il segnale è corrotto da disturbi ed interferenze provenienti da altre trasmissioni; cosicché, supponendo il canale lineare e tempo invariante e il rumore introdotto di tipo additivo, si può scrivere:

$$(II.1.1) \quad r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q(t - nT - t_d) + n(t)$$

in cui $q(t)$ denota la risposta del canale all'impulso di segnalazione $p(t)$ ed $n(t)$ il rumore in uscita. Nella (II.1.1) t_d denota il ritardo introdotto dal canale, $\frac{1}{T}$ la velocità di modulazione e $\{a_n\}$ la sequenza numerica trasmessa in cui le cifre a_n appartengono ad un alfabeto ad M dimensioni. Supponendo che il ricevitore si avvalga di un perfetto sincronismo, il valore r_k di $r(t)$ all'istante $t_k = kT + t_d + \tau$ si può porre nella forma:

$$(II.1.2) \quad r_k = a_k q(\tau) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq k)}}^{\infty} a_n q[(k-n)T + \tau] + n(t_k)$$

Nella (II.1.2) si distinguono tre termini:

- la quantità $a_k q(\tau)$ che costituisce il segnale utile dato che essa è proporzionale al valore a_k del simbolo che si vuole rivelare;
- la quantità $\sum_{n \neq k} a_n q[(k-n)T + \tau]$ che tiene conto della presenza di tutti i simboli a_k della sequenza trasmessa, eccetto il k -esimo, e che pertanto costituisce la cosiddetta **interferenza d'intersimbolo** (ISI *InterSymbol Interference*);

$$(II.1.3) \quad i(t_k) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} a_n q[(k-n)T + \tau] = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} a_{k-m} q(mT + \tau)$$

- la quantità $n(t_k)$ che tiene conto del rumore introdotto dal canale.

Se l'impulso di segnalazione $p(t)$ si suppone nullo per $t < 0$, la condizione di causalità imposta al canale comporta che $q(t) = 0$ per $t < 0$ cosicché l'interferenza d'intersimbolo diventa $\sum_{n=-\infty}^{k-1} a_n q[(k-n)T + \tau]$ dato che tiene conto soltanto di tutti gli elementi della sequenza $\{a_n\}$ che precedono quello di posto k . Poiché il termine $i(t_k)$ può ritenersi indipendente dal rumore additivo $n(t_k)$, il segnale utile è allora corrotto da un disturbo equivalente $i(t_k) + n(t_k)$ la cui potenza specifica risulta maggiore di quella del solo rumore $n(t_k)$; ciò comporta quindi un incremento della probabilità di errore P_e .

II.2 – Caratteristiche statistiche dell'ISI.

L'interferenza di intersimbolo, definita dalla (II.1.2), è una variabile aleatoria, dipendendo dalla sequenza dei dati $\{a_n\}$ che, in quel che segue, si suppone costituita da elementi indipendenti ed equiprobabili. Essa pertanto può essere caratterizzata dal valore medio e dalla varianza. Nel calcolo di tali parametri è opportuno distinguere il caso di codifica binaria dal caso di codifica multilivello.

II.2.1 – Codifica binaria.

In questo caso i dati appartengono all'alfabeto $\{-1,1\}$ e si ha:

a) *Valore medio*

Si ha:

$$(II.2.1) \quad E\{i\} = E\left\{\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} a_{k-m} q(mT + \tau)\right\} = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} E\{a_{k-m}\} q(mT + \tau)$$

che poiché è $E\{a_n\} = 0$, comporta $E\{i\} = 0$.

b) *Varianza*

Si ha:

$$(II.2.2) \quad E\{i^2\} = E\left\{\left[\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} a_{k-m} q(mT + \tau)\right]^2\right\} = E\left\{\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_{k-m} a_{k-n} q(mT + \tau) q(nT + \tau)\right\} = \\ = \left\{\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} E\{a_{k-m} a_{k-n}\} q(mT + \tau) q(nT + \tau)\right\} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} q^2(nT + \tau)$$

poiché risulta

$$(II.2.3) \quad E\{a_{k-m} a_{k-n}\} = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}$$

c) *Valore massimo*

Una particolare caratteristica dell'interferenza di intersimbolo è costituita dal suo valore massimo. Si ha.

$$(II.2.4) \quad |i_{\max}| = \left|\sum_{\substack{n=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} a_{k-m} q(mT + \tau)\right| \leq \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} |a_{k-m}| |q(mT + \tau)| = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} |q(mT + \tau)|$$

II.2.2 – Codifica multilivello.

Nel caso di codifica multilivello, i dati appartengono all'alfabeto $A \equiv \{a_n = 2n - M - 1\}_{n=1}^M$ per cui ricordando le relazioni notevoli:

$$(II.2.5) \quad \sum_{n=1}^M n = \frac{M(M+1)}{2} \\ \sum_{n=1}^M n^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6}$$

si possono dedurre le espressioni del valor media della varianza e del valore massimo dell'interferenza di intersimbolo.

a) *Valore medio*

Si ha:

$$(II.2.6) \quad E\{i\} = E\left\{\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} a_{k-m} q(mT + \tau)\right\} = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} E\{a_{k-m}\} q(mT + \tau)$$

che poiché è

$$(II.2.7) \quad E\{a_n\} = E\{2n - M - 1\} = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M (2n - M - 1) = \frac{1}{M} \left[2 \frac{M(M+1)}{2} - M(M+1) \right] = 0$$

comporta $E\{i\} = 0$.

b) *Varianza*

Si ha:

$$(II.2.8) \quad E\{i^2\} = \left\{ \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} E\{a_{k-m} a_{k-n}\} q(mT + \tau) q(nT + \tau) \right\}$$

Poiché risulta

$$(II.2.9) \quad E\{a_n a_m\} = \begin{cases} E\{a_n\} E\{a_m\} = 0 & (m \neq n) \\ E\{a_n^2\} & (m = n) \end{cases}$$

con

$$(II.2.10) \quad \begin{aligned} E\{a_n^2\} &= \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M (2n - M - 1)^2 = \frac{1}{M} \left[4 \sum_{n=1}^M n^2 - 4(M+1) \sum_{n=1}^M n + M(M+1)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{M} \left\{ 4 \left[\frac{M(M+1)(2M+1)}{6} \right] - 4(M+1) \frac{M(M+1)}{2} + M(M+1)^2 \right\} = \\ &= \frac{M(M+1)}{M} \left\{ \frac{2}{3} (2M+1) - 2(M+1) + (M+1) \right\} = (M+1) \left\{ \frac{M}{3} - \frac{1}{3} \right\} = \\ &= \frac{M^2 - 1}{3} \end{aligned}$$

È dunque:

$$(II.2.11) \quad E\{i^2\} = \frac{M^2 - 1}{3} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} q^2(nT + \tau)$$

c) *Valore massimo*

Si ha.

$$(II.2.12) \quad |i_{\max}| \leq \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} |a_{k-m}| |q(mT + \tau)| = |a_n|_{m \max} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} |q(mT + \tau)|$$

che essendo $|a_n|_{m \max} = M - 1$, diviene:

$$(II.2.13) \quad |i_{\max}| \leq (M - 1) \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} |q(mT + \tau)|$$

II.3 - Condizione di Nyquist.

Allo scopo di migliorare le prestazioni è opportuno realizzare le condizioni che consentono di annullare l'interferenza d'intersimbolo; supponendo, per semplicità, che sia $\tau = 0$, tale condizione può essere realizzata solo se l'impulso ricevuto $q(t)$ sia tale da aversi:

$$(II.3.1) \quad q(mT) = \begin{cases} \alpha & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

Nel dominio della frequenza le (II.3.1) corrispondono alle

$$(II.3.2) \quad q(mT) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(f) e^{j2\pi f m T} df = \begin{cases} \alpha & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

dove $Q(f)$ denota la trasformata di Fourier dell'impulso $q(t)$.

Poiché il termine esponenziale che compare nella (II.3.2) è una funzione di f periodica di periodo $\frac{1}{T}$, conviene segmentare l'intervallo di integrazione nell'insieme numerabile di intervalli contigui del tipo $[\frac{k}{T} - \frac{1}{2T}, \frac{k}{T} + \frac{1}{2T}]$ di ampiezza $\frac{1}{T}$. Si ha allora:

$$(II.3.3) \quad \begin{aligned} q(mT) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{k}{T} - \frac{1}{2T}}^{\frac{k}{T} + \frac{1}{2T}} Q(f) e^{j2\pi f m T} df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} Q(f + \frac{k}{T}) e^{j2\pi(f + \frac{k}{T})mT} df = \\ &= \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q(f + \frac{k}{T}) e^{j2\pi f m T} df = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} Q_{eq}(f) e^{j2\pi f m T} df \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della trasformazione $f \rightarrow f - \frac{k}{T}$ e si è posto:

$$(II.3.4) \quad Q_{eq}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q(f + \frac{k}{T})$$

Poiché, come è facile riconoscere, la funzione $Q_{eq}(f)$ è una funzione periodica in f con periodo $\frac{1}{T}$ essa pertanto potrà essere espansa nella seguente serie di Fourier:

$$(II.3.5) \quad Q_{eq}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f T}$$

il cui generico coefficiente C_n vale:

$$(II.3.6) \quad C_n = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} Q_{eq}(f) e^{-j2\pi n f T} df$$

che, tenendo conto delle (II.3.1) e (II.3.3) si riduce alla

$$(II.3.7) \quad C_n = \begin{cases} \alpha T & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Di conseguenza, per la (II.3.5), la $Q_{eq}(f)$ diventa:

$$(II.3.8) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q(f + \frac{k}{T}) = \alpha T$$

che costituisce la cosiddetta **condizione di Nyquist**.

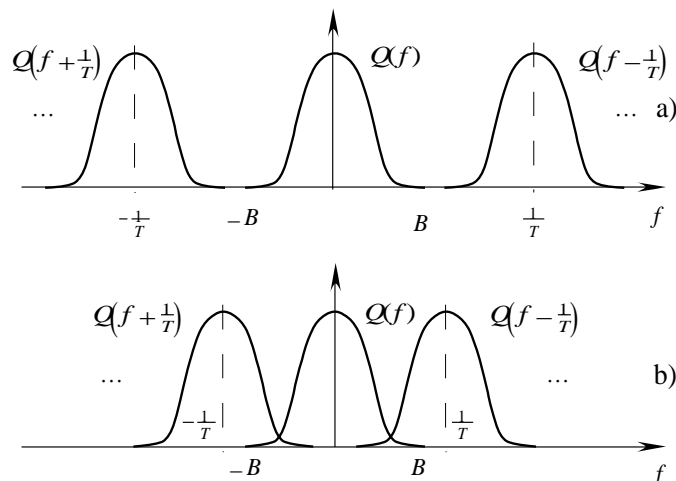


Fig. II.1 - Condizioni per l'annullamento dell'interferenza d'intersimbolo

Se il canale di trasmissione si suppone a banda limitata, la funzione $Q(f)$ deve essere tale da aversi:

$$(II.3.9) \quad Q(f) \equiv 0 \text{ per } |f| > B$$

essendo B l'ampiezza di banda del canale. Di conseguenza, come si rileva dalla (II.3.8) la possibilità di annullamento dell'interferenza d'intersimbolo dipende dai valori della banda B del canale e dalla velocità di modulazione $R = \frac{1}{T}$. Si deduce infatti dalla Fig. II.1,a) che se risulta $\frac{1}{T} > 2B$ la condizione (II.3.8) non può essere soddisfatta. Se è:

$$(II.3.10) \quad \frac{1}{T} \leq 2B$$

è possibile rendere $Q_{eq}(f)$ costante a patto di sagomare la forma di $Q(f)$ in modo tale da aversi:

$$(II.3.11) \quad \begin{aligned} Q\left(f + \frac{1}{T}\right) + Q(f) &= \alpha T & -\frac{1}{T} \leq f \leq 0 \\ Q(f) + Q\left(f - \frac{1}{T}\right) &= \alpha T & 0 \leq f \leq \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Ponendo $f = \varphi - \frac{1}{2T}$ nella prima delle (II.3.11) e $f = \varphi + \frac{1}{2T}$ nella seconda, le precedenti si riducono alle (scrivendo f al posto di φ):

$$(II.3.12) \quad Q\left(\frac{1}{2T} + f\right) + Q\left(f - \frac{1}{2T}\right) = Q\left(\frac{1}{2T} + f\right) + Q^*\left(\frac{1}{2T} - f\right) = \alpha T \quad \left(-\frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T}\right)$$

che costituisce la cosiddetta condizione di **simmetria vestigiale**.

Denotando con $\vartheta(f)$ l'argomento della $Q(f)$, dalla precedente si ottiene:

$$(II.3.13) \quad \left|Q\left(\frac{1}{2T} + f\right)\right| e^{j\vartheta\left(\frac{1}{2T} + f\right)} + \left|Q\left(\frac{1}{2T} - f\right)\right| e^{-j\vartheta\left(\frac{1}{2T} - f\right)} = \alpha T$$

che è soddisfatta quando è:

$$(II.3.14) \quad \begin{aligned} \vartheta\left(\frac{1}{2T} + f\right) &= \vartheta\left(\frac{1}{2T} - f\right) = 2k\pi \\ \left|Q\left(\frac{1}{2T} + f\right)\right| + \left|Q\left(\frac{1}{2T} - f\right)\right| &= \alpha T \end{aligned}$$

In conclusione se tra i valori di B e T sussiste la disuguaglianza (II.3.10) è possibile

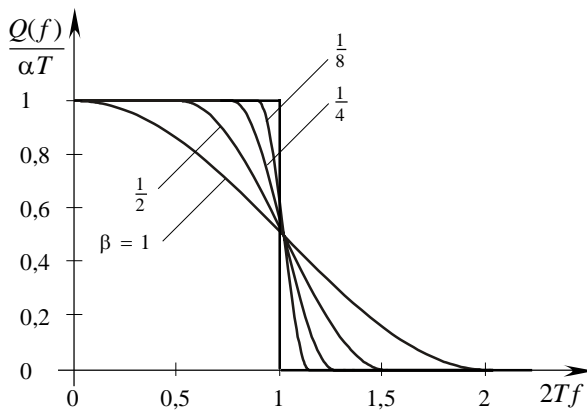


Fig. II.2 - Caratteristiche a coseno rialzato per diversi valori di β .

trasmettere su canali a banda limitata in assenza di interferenza d'intersimbolo; occorre in tal caso inserire all'uscita del canale un filtro opportuno detto **filtro equalizzatore** tale che l'impulso di segnalazione $q(t)$, in uscita dalla cascata canale-filtro equalizzatore, soddisfi le condizioni (II.3.14).

Normalmente le condizioni (II.3.14) sono ottenute sagomando $Q(f)$

secondo la forma detta **a coseno rialzato**

$$(II.3.15) \quad Q(f) = \begin{cases} \alpha T & |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \alpha T \cos^2 \frac{\pi T}{2\beta} \left(|f| - \frac{1-\beta}{2T} \right) & \frac{1-\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & \frac{1+\beta}{2T} \leq |f| \end{cases}$$

in cui la quantità β che compare nella (II.3.15), nota come coefficiente di **roll-off**, può assumere valori compresi fra 0 e 1.

In Fig. II.2 sono riportati gli andamenti di $\frac{Q(f)}{\alpha T}$ per alcuni valori di β . La banda del segnale $Q(f)$ è in tal caso pari a $B = \frac{1+\beta}{2T}$. Per $\beta=0$ la (II.3.15) si riduce ad un rettangolo con $B = \frac{1}{2T}$ mentre per $\beta=1$, la banda B vale $\frac{1}{T}$.

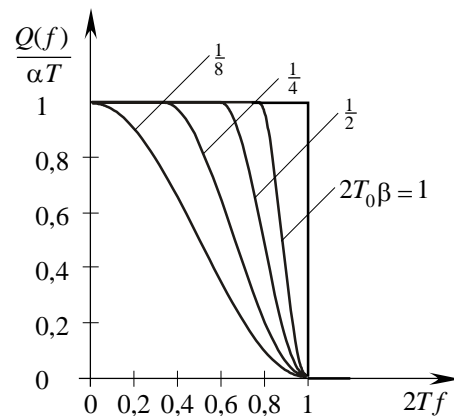


Fig. II.3 - Caratteristiche a coseno rialzato a parità di banda

Se si riguardano tali caratteristiche mantenendo costante la banda B del segnale si ottengono le curve di Fig. II.3 in cui il parametro di roll-off misura lo scostamento di $\frac{1}{T}$ da B . Dalla Fig. II.3 si rileva allora che è possibile trasmettere un segnale numerico in modo da annullare l'interferenza d'intersimbolo finché si ha $\frac{1}{2T} \leq B$. La massima

velocità di trasmissione si ottiene con caratteristiche di forma rettangolare e risulta $R = 2B$.

Nel dominio del tempo, gli impulsi a coseno rialzato assumono la forma:

$$(II.3.16) \quad q(t) = \alpha \frac{\cos\left(\frac{2\pi\beta t}{T}\right)}{1 - \left(\frac{2\beta t}{T}\right)^2} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

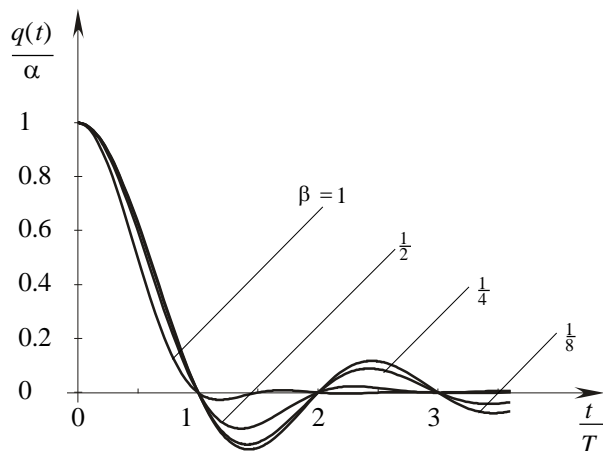


Fig. II.4 - Impulsi $q(t)$ corrispondenti a caratteristiche a coseno rialzato.

e sono rappresentati in Fig. II.4 dalla quale si deduce infine che al tendere di t all'infinito la $q(t)$ va a zero secondo la legge $\frac{T}{\pi t} \frac{1}{1 - \left(\frac{2\beta t}{T}\right)^2}$. Ne consegue che

un'incertezza sul sincronismo induce un'interferenza che è tanto limitata quanto maggiore è il parametro β . Per $\beta=0$, l'interferenza può assumere valori inaccettabili. La segnalazione con impulsi $q(t)$ sagomati secondo la funzione sinc consente pertanto la massima velocità di trasmissione ma risulta particolarmente critica riguardo a possibili errori nella ricostruzione del sincronismo.

II. 4 - Segnali a risposta parziale.

Uno dei risultati più rilevanti della teoria di Nyquist per l'eliminazione dell'interferenza di intersimbolo è che se si vuole trasmettere su un canale a banda limitata una sequenza numerica alla velocità di $\frac{1}{T}$ simboli/sec è necessario che la banda del canale sia alquanto più grande. Ad esempio adottando una caratteristica a coseno rialzato la banda del canale deve valere $\frac{1+\beta}{2T} = \frac{1}{T} + \frac{\beta}{2T}$.

Un modo per superare tale ostacolo è offerto dai cosiddetti **segnali a risposta parziale** (**PRS Partial Response Signals**), i quali, se da un canto consentono la trasmissione dell'informazione alla massima velocità compatibile con la banda del canale, introducono una quantità *controllata* di interferenza di intersimbolo, che può pertanto essere facilmente eliminata al momento della rivelazione.

Sia $q(t)$ l'impulso di segnalazione all'uscita di un canale supposto di tipo passa basso. Esso, in virtù del teorema del campionamento può essere espresso in termini dei suoi campioni nella forma:

$$(II.4.1) \quad q(t) = \sum_n q\left(\frac{n}{2B}\right) \text{sinc}\left[2B\left(t - \frac{n}{2B}\right)\right]$$

dove B denota l'ampiezza di banda del segnale (che si identifica con l'ampiezza di banda del canale di trasmissione). Nel dominio della frequenza la (II.4.1) corrisponde alla:

$$(II.4.2) \quad Q(f) = \frac{1}{2B} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \cdot \sum_n q\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-j\pi n \frac{f}{B}}$$

Se è:

$$(II.4.3) \quad q\left(\frac{n}{2B}\right) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

le (II.4.1) e (II.4.2) si riducono rispettivamente alle

$$(II.4.4) \quad q(t) = \text{sinc}(2Bt)$$

e

$$(II.4.5) \quad Q(f) = \frac{1}{2B} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

che corrispondono agli impulsi di segnalazione che, in ossequio al criterio di Nyquist, riescono a trasmettere l'informazione alla velocità massima di $2B$ simboli/sec. Se, invece di annullare completamente l'interferenza di intersimbolo, si consente che solo N campioni dell'impulso di segnalazione risultino non nulli e cioè:

$$(II.4.6) \quad q\left(\frac{n}{2B}\right) = \begin{cases} h_n & n = 0, 1, 2, \dots, N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

la (II.4.2) così diviene:

$$(II.4.7) \quad Q(f) = \frac{1}{2B} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \cdot \sum_{n=0}^N h_n e^{-j\pi n \frac{f}{B}}$$

Nel caso di segnali a risposta parziale si ha $h_0 = 1$ e gli altri coefficienti o sono nulli o assumono valori ± 1 .

È naturale che al crescere del numero dei campioni non nulli dell'impulso di segnalazione aumentano le difficoltà di rivelazione dei dati cosicché normalmente nei sistemi a risposta parziale di comune impiego il numero N è dell'ordine di qualche unità.

Antitrasformando la (II.4.7) si ottiene:

$$(II.4.8) \quad q(t) = \sum_{i=0}^N h_i \text{sinc}\left[2B\left(t - \frac{i}{2B}\right)\right]$$

per cui il segnale trasmesso, in assenza di rumore, vale:

$$(II.4.9) \quad v(t) = \sum_n a_n q\left(t - \frac{n}{2B}\right) = \sum_n a_n \sum_{i=0}^N h_i \text{sinc}\left[2B\left(t - \frac{n+i}{2B}\right)\right]$$

che, ponendo $n+i = k$, diventa:

$$(II.4.10) \quad v(t) = \sum_k \left[\sum_{i=0}^N a_{k-i} h_i \right] \text{sinc} \left[2B \left(t - \frac{k}{2B} \right) \right] = \sum_k A_k \text{sinc} \left[2B \left(t - \frac{k}{2B} \right) \right]$$

la quale corrisponde ad una trasmissione con impulsi di segnalazione di tipo sinc i cui dati A_n si ottengono dai dati a_n operando la codifica definita dalla seguente trasformazione:

$$(II.4.11) \quad A_k = \sum_{i=0}^N a_{k-i} h_i$$

Se i dati $a_k \in \{-1,1\}$ sono equiprobabili ed indipendenti, la correlazione $R_A(m)$ della sequenza $\{A_n\}$ è:

$$(II.4.12) \quad R_A(m) = E \{ A_n A_{n+m} \} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N E \{ a_{n-i} a_{n+m-j} \} h_i h_j = \sum_{i=0}^{N-1} h_i h_{i+m}$$

La trasformazione (II.4.11) quindi modifica l'autocorrelazione della sequenza dati; infatti da una sequenza bianca $\{a_n\}$ si perviene ad una sequenza colorata $\{A_n\}$. Per questo motivo la codifica definita dalla (II.4.11) prende anche il nome di **codifica correlativa**.

II.5 - Rivelazione del segnale PRS.

Tenendo conto delle posizioni (II.4.10) e (II.4.11) il generico campione del segnale ricevuto vale:

$$(II.5.1) \quad r_k = \sum_{n=0}^N a_{k-n} h_n + n_k = a_k + \sum_{n=1}^N a_{k-n} h_n + n_k$$

Nasce così un'interferenza d'intersimbolo che dipende dai campioni dell'impulso di segnalazione. In base alla (II.5.1) è possibile operare la rivelazione del dato a_k sottraendo alla quantità r_k il valore dell'interferenza $\sum a_{k-n} h_n$ valutata però sulla base delle stime \hat{a}_{k-n} dei dati in precedenza rivelati. Di conseguenza la struttura del ricevitore si presenta alloca come è mostrato in Fig. II.5.

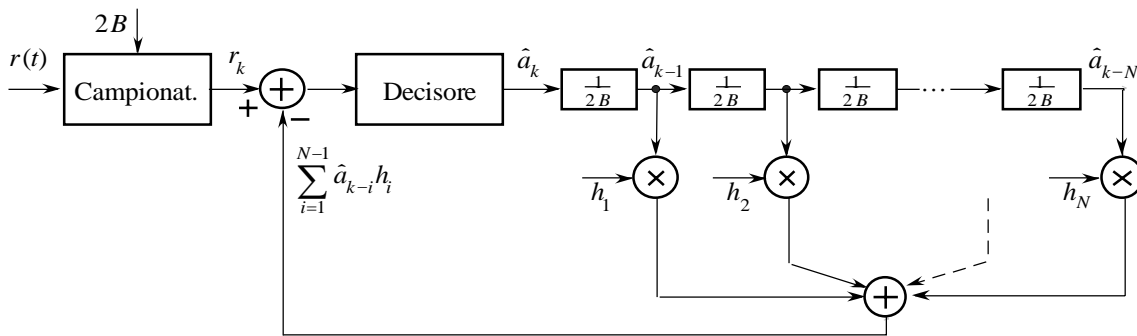


Fig. II.5 – Struttura del ricevitore per segnalazioni PRS.

È evidente che un errore commesso in una precedente decisione influenza la decisione attuale ottenendosi così un effetto di propagazione dell'errore. Ciò dipende dalla codifica correlativa e può essere evitato se si procede a un'opportuna precodifica come appresso illustrato.

I dati binari d_n provenienti dalla sorgente sono trasformati in una nuova sequenza D_n secondo la seguente regola (si ricordi che i pesi h_i , con $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ valgono ± 1):

$$(II.5.2) \quad d_n = \sum_{i=0}^N D_{n-i} h_i \pmod{2}$$

effettuata in un precodificatore. Essi si ottengono riducendo mod 2 il secondo membro della (II.5.2). Le corrispondenti cifre bipolari $\{-1,1\}$ si ottengono dalla:

$$(II.5.3) \quad a_n = 2D_n - 1$$

cosicché il valore del segnale ricevuto, letto al generico istante di lettura, vale, per le (II.5.1) e (II.5.3), in assenza di rumore:

$$(II.5.4) \quad r_k = A_k = \sum_{i=0}^N a_{k-i} h_i = \sum_{i=0}^N (2D_{k-i} - 1) h_i = 2 \sum_{i=0}^N D_{k-i} h_i - \sum_{i=0}^N h_i$$

che, tenendo conto della (II.5.2) diventa:

$$(II.5.5) \quad A_k = 2d_k - \sum_{i=0}^N h_i$$

Il segnale letto all'istante t_k dipende esclusivamente dal corrispondente dato trasmesso d_k .

I segnali PRS sono distinti in diverse classi. La Tabella II.1 presenta le caratteristiche dei primi cinque schemi di segnalazione PRS

Tabella II.1 – Classi dei segnali a risposta parziale

Clas- se	Valori dei coefficienti h_i					Note
	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	
I	2	1	1			Codifica duobinaria
II	3	1	2	1		
III	3	2	1	-1		
IV	3	1	0	-1		Codifica duobinaria modificata
V	5	-1	0	2	0	-1

II.6 - Esempi.

II.6.1 - Sistemi PRS con codifica duobinaria.

Un tale tipo di sistema è caratterizzato dai seguenti valori dei parametri h_i

$$(II.6.1) \quad h_0 = h_1 = 1 \quad (N = 1)$$

per cui la trasformazione (II.4.11) diventa:

$$(II.6.2) \quad A_k = a_k + a_{k-1}$$

Se i simboli a_n appartengono all'insieme $\{-1,1\}$, i simboli trasformati A_n compongono l'alfabeto $\{-2,0,2\}$.

L'impulso di segnalazione assume, nel dominio del tempo, la forma:

$$(II.6.3) \quad q(t) = \text{sinc}[2Bt] + \text{sinc}\left[2B\left(t - \frac{1}{2B}\right)\right]$$

che, nel dominio della frequenza, diventa:

$$(II.6.4) \quad Q(f) = \frac{1}{2B} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \left(1 + e^{-j2\pi\frac{f}{2B}}\right) = \frac{e^{-j\pi\frac{f}{2B}}}{B} \cos\left(\frac{\pi f}{2B}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Gli andamenti di $q(t)$ e di $|Q(f)|$ sono riportati nella Fig. II.6 a) e b) rispettivamente.

La precodifica (II.5.2) è data dalla:

$$(II.6.5) \quad d_n = D_n + D_{n-1} \pmod{2}$$

che corrisponde alla:

$$(II.6.6) \quad D_n = d_n + D_{n-1} \pmod{2}$$

giacché nell'aritmetica binaria le operazioni di somma e di differenza sono equivalenti.

Essendo:

$$(II.6.7) \quad \sum_{i=0}^1 h_i = 2$$

la (II.5.5) diventa:

$$(II.6.8) \quad d_k = \frac{A_k}{2} + 1 \pmod{2}$$

Nella Tab. II.2 sono riportate le operazioni di precodifica di codifica su una sequenza dati $\{d_n\}$.

Tabella II.2

d_k		0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
D_k	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
a_k	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	1
A_k		-2	-2	0	2	0	0	2	2	0	0
\hat{d}_k		0	0	1	0	1	1	0	0	1	1

Con riferimento alla stessa Tabella può dedursi che al valore 0 del simbolo A_k si associa $\hat{d}_k = 1$; mentre quando è $A_k = \pm 2$ si associa $\hat{d}_k = 0$. Questo corrisponde ad adottare, in presenza di rumore, la seguente regola di decisione:

$$(II.6.9) \quad \hat{d}_k = \begin{cases} 1 & \text{se } |r_k| < 1 \\ 0 & \text{se } |r_k| > 1 \end{cases}$$

dove la decisione è presa sulla base dei valori $|r_k|$ ottenuti per rettificazione del valore del campione r_k .

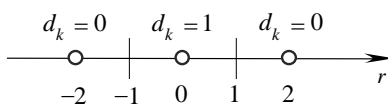


Fig. II.7- Regioni di decisione

Il segnale all'uscita del campionatore vale:

$$(II.6.10) \quad r_k = A_k + n_k$$

che si esplicita nella:

$$(II.6.11) \quad r_k = \begin{cases} \pm 2 + n_k & \text{se } d_k = 0 \\ n_k & \text{se } d_k = 1 \end{cases}$$

Se i simboli d_k sono equiprobabili, è facile riconoscere che i livelli $A_k = \pm 2$ si presentano con probabilità $\frac{1}{4}$, mentre il livello $A_k = 0$ si presenta con probabilità $\frac{1}{2}$.

Con riferimento alla Fig. II.7 è evidente che un errore può verificarsi nei seguenti casi:

$$(II.6.12) \quad \begin{aligned} d = 0 &\Rightarrow \begin{cases} -1 < 2 + n_k < 1 & \circ & -3 < n_k < -1 \\ -1 < -2 + n_k < 1 & \circ & 1 < n_k < 3 \end{cases} \\ d = 1 &\Rightarrow |n_k| > 1 \end{aligned}$$

La probabilità di errore è pertanto:

$$(II.6.13) \quad P_e = \frac{1}{4} \Pr \{-3 < n < -1\} + \frac{1}{2} \Pr \{|n| > 1\} + \frac{1}{4} \Pr \{1 < n < 3\}$$

dove, per semplicità di scrittura, si è ommesso il pedice k al simbolo n .

Se il campione del rumore presenta una densità di probabilità del primo ordine gaussiana a media nulla e varianza σ^2 , si ottiene:

$$(II.6.14) \quad \begin{aligned} P_e = \frac{1}{4} \int_{-3}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn + \frac{1}{4} \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn + \\ + \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn \right] \end{aligned}$$

che può essere semplificata nella:

$$(II.6.15) \quad P_e = \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} Q\left(\frac{3}{\sigma}\right)$$

II.6.2 - Sistemi PRS con codifica duobinaria modificata.

Per tali sistemi risulta:

$$(II.6.16) \quad \begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_1 &= 0 \quad (N = 2) \\ h_2 &= -1 \end{aligned}$$

e quindi la trasformazione (II.4.11) diventa:

$$(II.6.17) \quad A_k = a_k - a_{k-2}$$

Se i dati a_n sono bipolari, i simboli trasformati A_k compongono l'alfabeto $\{-2, 0, 2\}$.

L'impulso di segnalazione è:

$$(II.6.18) \quad q(t) = \text{sinc}[2Bt] + -\text{sinc}\left[2B\left(t - \frac{1}{B}\right)\right]$$

e la sua trasformata di Fourier vale:

$$(II.6.19) \quad Q(f) = \frac{1}{2B} \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) \left(1 - e^{-j2\pi\frac{f}{B}}\right) = \frac{je^{-j\pi\frac{f}{B}}}{B} \sin\left(\frac{\pi f}{2B}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

Gli andamenti di $q(t)$ e di $|Q(f)|$ sono riportati nella Fig. II.8 a) e b) rispettivamente.

La precodifica (II.5.2) vale:

$$(II.6.20) \quad d_n = D_n - D_{n-2} \pmod{2}$$

od anche:

$$(II.6.21) \quad D_n = d_n + D_{n-2} \pmod{2}$$

Poiché è:

$$(II.6.22) \quad \sum_{i=0}^2 h_i = 0$$

la (II.5.5) diventa:

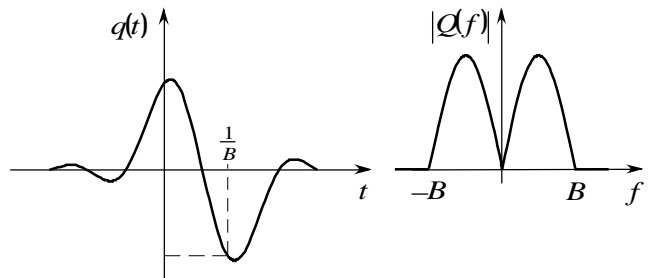


Fig. II.8- Impulso di segnalazione a) nel dominio del tempo e b) nel dominio della frequenza

$$(II.6.23) \quad d_k = \frac{A_k}{2} \pmod{2}$$

Le operazioni di precodifica e di codifica su una sequenza dati $\{d_n\}$ sono riportati nella Tabella II.3. Dalla stessa Tabella si deduce che al valore 0 del simbolo A_k si associa $\hat{d}_k = 0$; mentre quando è $A_k = \pm 2$ si associa $\hat{d}_k = 1$.

Tabella II.3

d_k			0	0	1	0	1	1	0	0	1
D_k	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
a_k	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
A_k			0	0	2	0	-2	2	0	0	2
\hat{d}_k			0	0	1	0	1	1	0	0	1

Questo conduce alla seguente regola di decisione:

$$(II.6.24) \quad \hat{d}_k = \begin{cases} 1 & \text{se } |r_k| > 1 \\ 0 & \text{se } |r_k| < 1 \end{cases}$$

Il segnale in uscita dal campionatore vale:

$$(II.6.25) \quad r_k = \begin{cases} \pm 2 + n_k & \text{se } d_k = 1 \\ n_k & \text{se } d_k = 0 \end{cases}$$

Si può presentare un errore solo nei seguenti due casi:

$$(II.6.26) \quad \begin{aligned} d_k = 0 &\Rightarrow |n_k| > 1 \\ d_k = 1 &\Rightarrow \begin{cases} -1 < 2 + n_k < 1 & \text{o} & -3 < n_k < -1 \\ -1 < -2 + n_k < 1 & \text{o} & 1 < n_k < 3 \end{cases} \end{aligned}$$

La probabilità di errore è pertanto:

$$(II.6.27) \quad P_e = \frac{1}{4} \Pr\{-3 < n < -1\} + \frac{1}{2} \Pr\{|n| \geq 1\} + \frac{1}{4} \Pr\{1 < n < 3\}$$

essendo $\Pr\{A_k = \pm 2\} = \frac{1}{4}$ e $\Pr\{A_k = 0\} = \frac{1}{2}$.

Risulta infine:

$$(II.6.28) \quad P_e = \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} Q\left(\frac{3}{\sigma}\right)$$