

LA MODULAZIONE NUMERICA

Quando l'informazione numerica deve attraversare canali di tipo passa banda, come nel caso dei collegamenti wireless, è necessario ricorrere al processo di modulazione. In questo capitolo sono presentate le forme che assume il segnale modulato nel caso delle segnalazioni più comunemente adoperate che sono quelle denominate con le sigle ASK, PSK, FSK e QAM. Sono infine dedotte le caratteristiche spettrali del segnale modulato nel caso di segnalazioni prive di memoria.

III.1- Generalità.

Quando un segnale numerico deve essere trasmesso su canali di tipo passa banda (come ad es. nel caso di collegamenti wireless, comunicazioni su fibre ottiche o su guide d'onda, etc.) è necessario ricorrere al processo di modulazione. Nella sua forma più generale il segnale modulato è un segnale passa banda del tipo:

$$(III.1.1) \quad v(t) = \text{Re} \left[\tilde{s}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right]$$

in cui f_0 rappresenta la frequenza della portante e l'involuppo complesso $\tilde{s}(t)$ è definito dalla:

$$(III.1.2) \quad \tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}_n(t - nT)$$

e cioè dalla successione di forme d'onda $\tilde{s}_n(t)$ prese da un insieme di M elementi $\{\tilde{s}_n(t)\}_{n=1}^M$.

Sostituendo la (III.1.2) nella (III.1.1) si ha:

$$(III.1.3) \quad v(t) = \text{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}_n(t - nT) e^{j2\pi f_0 t} \right]$$

che, se si suppone $f_0 T$ intero, può essere riscritta come segue:

$$(III.1.4) \quad v(t) = \text{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}_n(t - nT) e^{j2\pi f_0 (t - nT)} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Re} \left[\tilde{s}_n(t - nT) e^{j2\pi f_0 (t - nT)} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n(t - nT)$$

dove si sono definite con

$$(III.1.5) \quad s_m(t) = \text{Re} \left[\tilde{s}_m(t) e^{j2\pi f_0 t} \right] \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

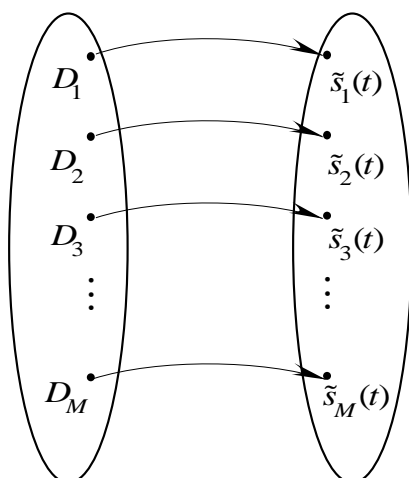


Fig. III.1 - Corrispondenza simbolo M -ario segnalazione.

le forme di segnalazione.

Come nel caso della trasmissione in banda base, anche qui, può essere impiegato, per trasmettere simboli provenienti da una sorgente binaria, uno schema di modulazione M -ario. Basta infatti suddividere i dati della sorgente in blocchi composti da k elementi e far corrispondere ad ogni configurazione di k simboli una forma d'onda scelta in un insieme assegnato. In queste condizioni risulta:

$$(III.1.6) \quad M = 2^k$$

In altre parole in ogni intervallo di segnalazione, di durata T , si associa ad ogni simbolo $D_n \equiv \{d_n, d_{n-1}, \dots, d_{n-(k-1)}\}$,

definito da una k -pla di dati binari, una forma d'onda $\tilde{s}_n(t)$ scelta nell'insieme $\{\tilde{s}_n(t)\}_{n=1}^M$ (v: Fig. III.1).

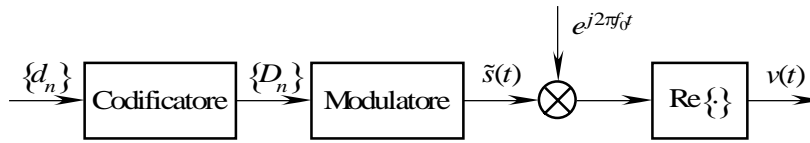


Fig. III.2 – Schema di principio di un modulatore

Lo schema di principio di un modulatore è rappresentato in Fig. III.2; in esso i simboli binari sono convertiti da un codificatore in simboli M -ari. Il modulatore associa ad ogni simbolo M -ario la forma d'onda corrispondente formando l'involuppo complesso $\tilde{s}(t)$.

In generale, la forma d'onda $\tilde{s}_n(t)$ dipende da K simboli D_n precedenti, e cioè:

$$(III.1.7) \quad \tilde{s}_n(t) = \tilde{s}(t, \mathbf{D}_n)$$

dove si è denotato con \mathbf{D}_n il vettore:

$$(III.1.8) \quad \mathbf{D}_n = [D_n \quad D_{n-1} \quad \dots \quad D_{n-(K-1)}]^T$$

e si è indicato con $\tilde{s}(t, \mathbf{D}_n)$ l'involuppo complesso dell'impulso in banda base. In tali condizioni la (III.1.2) diviene:

$$(III.1.9) \quad \tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t-nT, \mathbf{D}_n)$$

Se nel generico intervallo di simbolo la forma di segnalazione dipende solo dal simbolo M -ario corrispondente, la modulazione si dirà **priva di memoria**. In tal caso è:

$$(III.1.10) \quad \tilde{s}_n(t) = \tilde{s}(t, D_n)$$

III.2 – Sistemi di modulazione binari.

In questo paragrafo sono presi in esame i sistemi di modulazione binari in cui cioè l'informazione da trasmettere è costituita da una sequenza di simboli binari $\{d_n\}$, supposti equiprobabili, indipendenti ed emessi con velocità pari a $\frac{1}{T}$ [bit/sec].

III.2.1 – Modulazione ASK binaria.

Nel caso di modulazione ASK (**A**mplitude **S**hift **K**eying) l'involuppo complesso delle forme di segnalazione è definito dalle:

$$(III.2.1) \quad \tilde{s}_m(t) = V_0 a_m e^{j\phi} \text{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) \quad (m = 1, 2)$$

in cui le cifre a_m sono poste in corrispondenza ai simboli binari $d = 0$ e $d = 1$ secondo la regola:

$$\begin{aligned} d = 0 &\Rightarrow a = -1 \\ d = 1 &\Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

III.2.2 - Modulazione PSK binaria.

Nella modulazione PSK (**P**hase **S**hift **K**eying) l'involuppo complesso delle forme di segnalazione è:

$$(III.2.2) \quad \tilde{s}_m(t) = V_0 e^{j(\theta_n + \phi)} \text{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) = V_0 c_m e^{j\phi} \text{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) \quad (m = 1, 2)$$

in cui la corrispondenza tra le cifre $c_m = e^{j\theta_m}$ e i simboli binari $d = 0$ e $d = 1$ segue la regola

$$d = 0 \Rightarrow c = -1$$

$$d = 1 \Rightarrow c = 1$$

Ovviamente questo corrisponde alla

$$d = 0 \Rightarrow \vartheta = \pi$$

$$d = 1 \Rightarrow \vartheta = 0$$

Confrontando la seconda delle (III.2.2) con la (III.2.1) si riconosce immediatamente che, nel caso binario, le modulazioni ASK e PSK sono indistinguibili dato che danno luogo allo stesso segnale modulato.

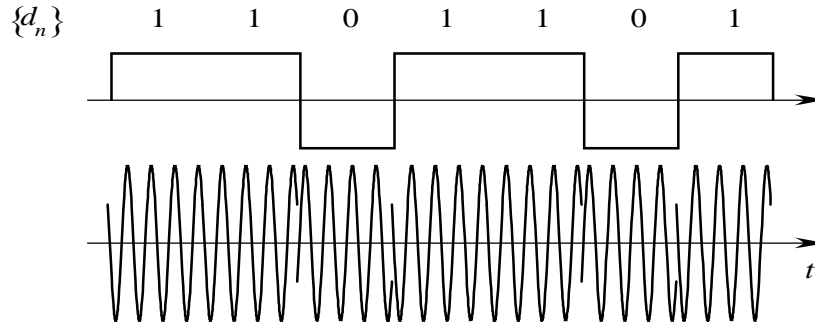


Fig. III.3 - Segnalazione ASK o PSK binaria.

In Fig. III.3 è rappresentato l'andamento del segnale modulato $v(t)$ per un modulazione ASK o PSK binaria. Nella stessa figura è riportato l'andamento del corrispondente segnale in banda base dato dalla $\sum_n a_n \text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}-nT}{T}\right)$.

Con riferimento alla Fig: III.3 si rileva facilmente che il segnale modulato

$$(III.2.3) \quad v(t) = V_0 \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}-nT}{T}\right) \right] \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

può presentare delle discontinuità negli istanti $t_n = nT$ laddove la sequenza dati presenta una transizione $0 \rightarrow 1$ o $1 \rightarrow 0$. L'entità di tali discontinuità vale:

$$(III.2.4) \quad \Delta = |v(t_n^+) - v(t_n^-)| = V_0 |a_n \cos(2\pi n f_0 T + \varphi) - a_{n-1} \cos(2\pi n f_0 T + \varphi)| = V_0 |a_n - a_{n-1}| \cdot |\cos(2\pi n f_0 T + \varphi)|$$

che, essendo $f_0 T$ intero, può essere eliminata se si pone:

$$(III.2.5) \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

III.2.3 - Modulazione FSK binaria.

Nella modulazione FSK (**F**requency **S**hift **K**eying) l'involuppo complesso delle forme di segnalazione è:

$$(III.2.6) \quad \tilde{s}_m(t) = V_0 e^{j(2\pi a_m t \Delta f + \varphi)} \text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 1, 2)$$

dove ai simboli binari $d = 0$ e $d = 1$ sono associate le cifre a come appresso indicato:

$$d = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$d = 1 \Rightarrow a = 1$$

In questo tipo di modulazione la frequenza della portante è aumentata di Δf tutte le volte che è presente il dato $d = 1$ e diminuita di Δf quando è presente il dato $d = 0$.

Il segnale modulato vale:

$$(III.2.7) \quad v(t) = V_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi f_0 t + 2\pi a_n \Delta f (t - nT) + \varphi] \text{rect}\left(\frac{t-nT-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

il cui andamento è riportato in Fig. III.4 in corrispondenza alla stessa sequenza binaria della Fig. III.3.

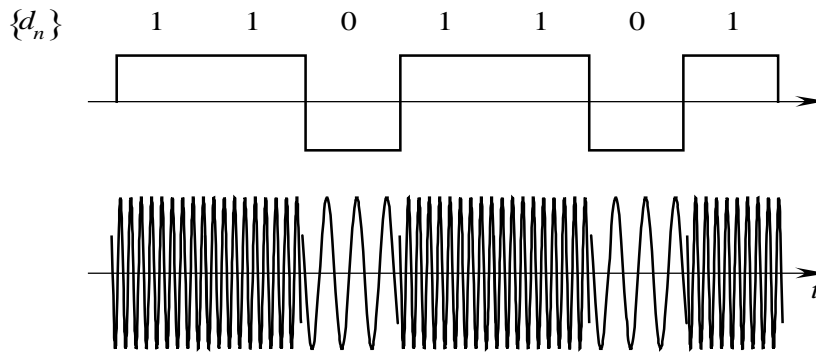


Fig. III.4 - Segnalazione FSK binaria.

Con riferimento alla (III.2.7), in Fig. III.5 è riportata l'andamento della deviazione istantanea di fase del segnale modulato $\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \Delta f (t - nT) \text{rect}\left(\frac{t-nT}{T} - \frac{1}{2}\right)$ (traiettoria di fase) in corrispondenza ad un'assegnata sequenza dati $\{d_n\}$ da trasmettere. Da tale figura è evidente che la $\vartheta(t)$ subisce, nei punti $t_n = nT$, delle discontinuità date da:

$$(III.2.8) \quad \Delta\vartheta = |0 - 2\pi a_{n-1} T \Delta f| = 2\pi T \Delta f$$

In corrispondenza il segnale modulato subisce il salto:

$$(III.2.9) \quad \Delta = |v(t_n^+) - v(t_n^-)| = V_0 |\cos(2\pi n f_0 T + \varphi) - \cos(2\pi n f_0 T + 2\pi a_{n-1} T \Delta f + \varphi)| = 2V_0 |\sin(2\pi n f_0 T + \pi a_{n-1} T \Delta f + \varphi) \cdot \sin(\pi a_{n-1} T \Delta f)|$$

Esso si annulla quando è verificata la condizione:

$$(III.2.10) \quad T \Delta f = k \quad k = 1, 2, \dots$$

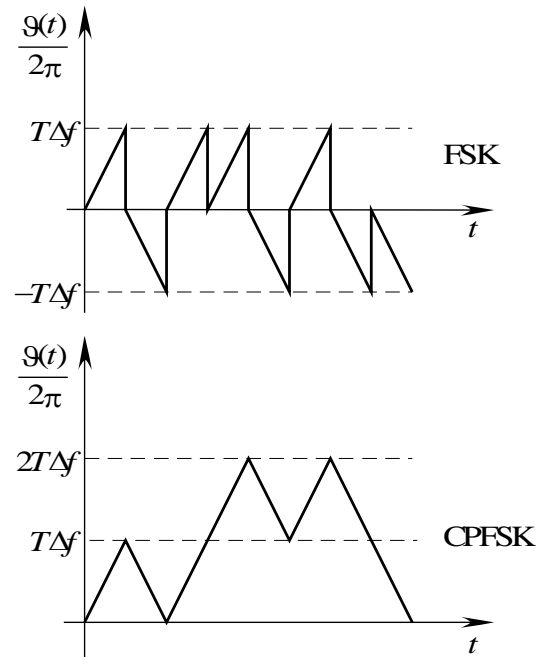


Fig. III.5- Traiettorie di fase per segnali FSK e CPFSK.

III.3 - Modulazione FSK a fase continua.

Un tipo di modulazione direttamente connessa con la FSK è la cosiddetta modulazione FSK a fase continua CPFSK (**C**ontinuous **P**hase **F**requency **S**hift **K**eying) in cui la deviazione di fase istantanea nel generico intervallo $nT \leq t \leq (n+1)T$ vale:

$$(III.3.1) \quad \vartheta(t) = 2\pi \Delta f \left[a_n (t - nT) + T \sum_{k=-\infty}^{n-1} a_k \right]$$

con $a_n \in \{-1, 1\}$ (v. Fig. III.5); essa è ottenuta per integrazione della:

$$(III.3.2) \quad \frac{\dot{\vartheta}(t)}{2\pi} = a_n \Delta f$$

Introducendo l'**indice di modulazione**:

$$(III.3.3) \quad h = 2T \Delta f$$

e l'**accumulo di fase**

$$(III.3.4) \quad \alpha_n = 2\pi T \Delta f \sum_{k=-\infty}^{n-1} a_k = \pi h \sum_{k=-\infty}^{n-1} a_k$$

$\vartheta(t)$ diviene:

$$(III.3.5) \quad \vartheta(t) = \pi h a_n \frac{t-nT}{T} + \alpha_n \quad nT \leq t \leq (n+1)T$$

Il segnale modulato vale:

$$(III.3.6) \quad v(t) = V_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(2\pi f_0 t + \pi h a_n \frac{t-nT}{T} + \alpha_n + \varphi\right) \text{rect}\left[\frac{t-\frac{T}{2}-nT}{T}\right]$$

Il termine α_n tiene conto dei simboli precedentemente trasmessi; esso complica, però, la struttura del ricevitore in quanto introduce una memoria nel processo di modulazione.

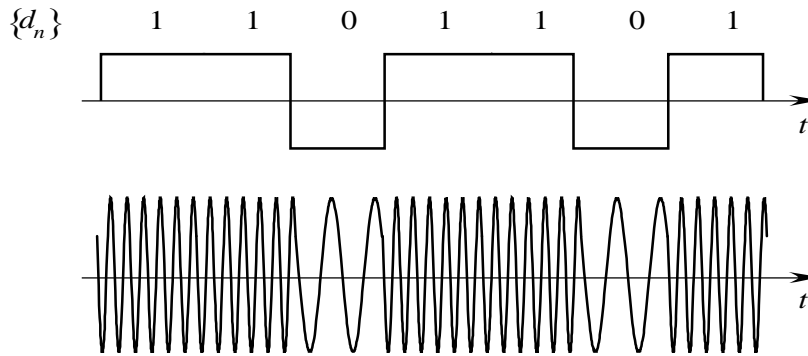


Fig. III.6 – Segnalazione CPFSK binaria.

L'andamento del segnale riportato è riportato in Fig. III.6. Poiché la fase del segnale modulato è continua, in tale tipo di modulazione non si presentano delle discontinuità nel segnale modulato negli istanti $t_n = nT$ e pertanto lo spettro di $v(t)$ è alquanto più concentrato attorno alla frequenza f_0 della portante che quello del segnale FSK.

III.4 - Sistemi di modulazione M -ari.

III.4.1 - Modulazione ASK M -aria.

Nel caso della modulazione ASK M -aria, l'involuppo complesso delle forme di segnalazione è:

$$(III.4.1) \quad \tilde{s}_m(t) = V_0 a_m e^{j\varphi} \text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

in cui le cifre M -arie a_m sono scelte nell'insieme:

$$(III.4.2) \quad a_m = 2m - (M + 1) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

La generica forma di segnalazione $s_m(t)$ è quindi:

$$(III.4.3) \quad s_m(t) = V_0 a_m \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

L'insieme delle forme di segnalazione può essere rappresentato per mezzo di un'unica funzione di base $u(t)$ ottenuta normalizzando il segnale $s(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$. Poiché l'energia specifica di $s(t)$, tenendo conto che è $f_0 T = k$, vale:

$$(III.4.4) \quad E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \frac{1}{2} \int_0^T [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)] dt = \frac{T}{2}$$

la funzione di base è:

$$(III.4.5) \quad u(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \operatorname{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

Quanto detto comporta che le forme di segnalazione $\{s_m(t)\}_{m=1}^M$ possono essere rappresentate in un spazio monodimensionale S_1 definito dalla funzione di base $u(t)$ e si ha.

$$(III.4.6) \quad s_m = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cdot a_m \mathbf{u} \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

in cui s_m e \mathbf{u} denotano i vettori rappresentativi dei segnali $s_m(t)$ e $u(t)$ rispettivamente.

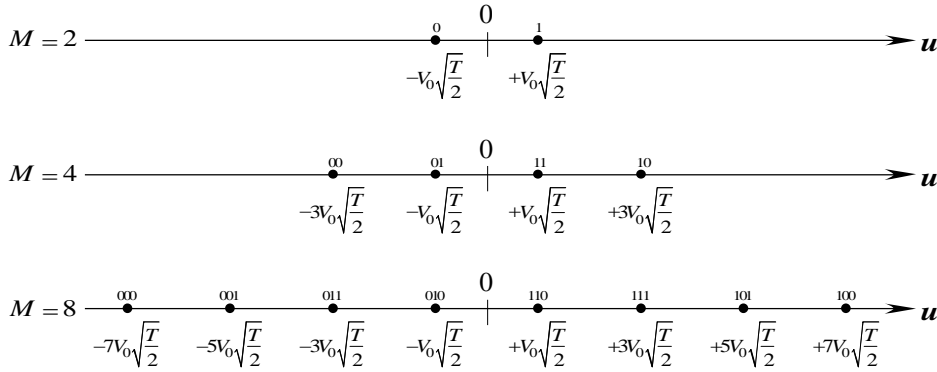


Fig. III.7 - Rappresentazione vettoriale delle forme di segnalazione per modulazioni ASK M-arie ($M=2$, $M=4$ e $M=8$).

In Fig. III.7 è riportata la rappresentazione vettoriale dell'insieme dei vettori s_m per diversi valori di M . Nella stessa figura si sono indicati le configurazioni dei simboli binari da associare alle forme di segnalazione nell'ipotesi che si adotti il codice di Gray.

Si deduce inoltre facilmente che l'energia E_m associata alla generica forma di segnalazione segnale $s_m(t)$ vale:

$$(III.4.7) \quad E_m = \frac{V_0^2 T}{2} a_m^2$$

essa dipende dal particolare simbolo trasmesso. Di conseguenza, se i simboli a_m si suppongono equiprobabili, il valore medio di E_m è:

$$(III.4.8) \quad E = \frac{V_0^2 T}{2} E\{a_m^2\} = \frac{V_0^2 T}{2} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M [2m - (M+1)]^2 = V_0^2 T \frac{M^2 - 1}{6}$$

III.4.2 - Modulazione PSK M-aria.

Nel caso della modulazione PSK M-aria, l'involuppo complesso delle forme di segnalazione è:

$$(III.4.9) \quad \tilde{s}_m(t) = V_0 e^{j(\vartheta_m + \phi)} \operatorname{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

in cui

$$(III.4.10) \quad \vartheta_m = 2\pi \frac{m}{M} \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

e cioè.

$$(III.4.11) \quad \tilde{s}_m(t) = V_0 e^{j\varphi} c_m \operatorname{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

con:

$$(III.4.12) \quad c_m = \cos\left(2\pi \frac{m}{M}\right) + j \sin\left(2\pi \frac{m}{M}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

La generica forma di segnalazione $s_m(t)$ è:

$$(III.4.13) \quad s_m(t) = V_0 \cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi \frac{m}{M} + \varphi\right) \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

od anche:

$$(III.4.14) \quad s_m(t) = V_0 \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \left\{ \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \cdot \cos\left(2\pi \frac{m}{M}\right) - \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \cdot \sin\left(2\pi \frac{m}{M}\right) \right\}$$

È opportuno riferire l'insieme dei segnali $s_m(t)$ alle funzioni di base

$$(III.4.15) \quad \begin{cases} u_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \\ u_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \end{cases}$$

ottenute normalizzando i segnali $\text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ e $\text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$ rispettivamente. È utile osservare che le due funzioni di base $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sono ortogonali. Infatti il loro prodotto scalare

$$(III.4.16) \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) u_1(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \sin(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(4\pi f_0 t + 2\varphi) dt = 0$$

è in tal caso nullo, essendo $f_0 T$ intero.

Tenendo conto delle (III.4.15) il vettore s_m rappresentativo del segnale $s_m(t)$ è:

$$(III.4.17) \quad s_m = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \left\{ \mathbf{u}_1 \cos\left(2\pi \frac{m}{M}\right) - \mathbf{u}_2 \sin\left(2\pi \frac{m}{M}\right) \right\}$$

Esso è dunque riferito ad un sistema di coordinate ortonormali $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. I segnali $s_m(t)$ appartengono dunque ad un sottospazio a 2 dimensioni.

Tenendo conto della condizione $\cos^2\left(2\pi \frac{m}{M}\right) + \sin^2\left(2\pi \frac{m}{M}\right) = 1$, la costellazione dei segnali $s_m(t)$, della quale in Fig. III.8 sono riportati tre esempi, è costituita da un insieme di punti uniformemente distribuiti su una circonferenza di raggio $V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}$. Nella stessa figura sono rappresentate le configurazioni dei simboli binari da associare ai vari valori della fase ϑ_m nell'ipotesi che si adotti il codice di Gray

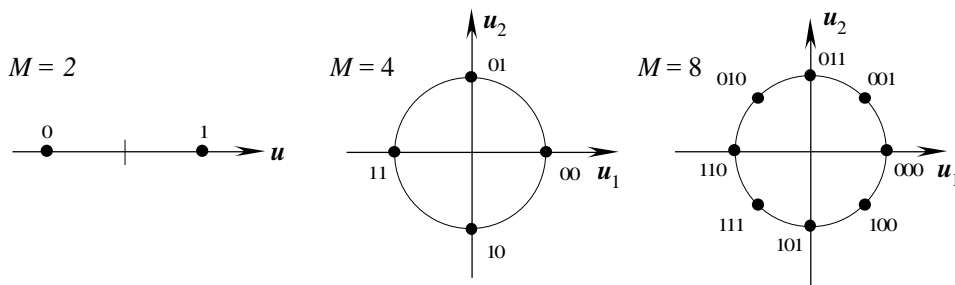


Fig. III.8 - Rappresentazione vettoriale delle forme di segnalazione per modulazioni PSK M -arie ($M=2$, $M=4$ e $M=8$).

Nel caso di modulazione PSK M -aria, l'energia specifica associata a $s_m(t)$ vale, per la (III.4.17):

$$(III.4.18) \quad E_m = \frac{V_0^2 T}{2}$$

ed è indipendente dall'indice m .

III.4.3 - Modulazione FSK M -aria.

Nel caso della modulazione FSK M -aria, l'involuppo complesso delle forme di segnalazione è:

$$(III.4.19) \quad \tilde{s}_m(t) = V_0 e^{j(2\pi\Delta f_m t + \varphi)} \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

in cui

$$(III.4.20) \quad \Delta f_m = [2m - (M + 1)] \Delta f \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

La generica forma di segnalazione $s_m(t)$ è:

$$(III.4.21) \quad s_m(t) = V_0 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f_m)t + \varphi] \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

È evidente dalla (III.4.21) che le forme di segnalazione possono essere riferite al seguente sistema di funzioni di base:

$$(III.4.22) \quad u_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos[2\pi(f_0 + \Delta f_m)t + \varphi] \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

Il prodotto scalare fra due qualsiasi di tali funzioni vale:

$$(III.4.23) \quad \begin{aligned} (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos[2\pi(f_0 + \Delta f_i)t + \varphi] \cos[2\pi(f_0 + \Delta f_j)t + \varphi] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos[2\pi(\Delta f_i - \Delta f_j)t] + \cos[2\pi(2f_0 + \Delta f_i + \Delta f_j)t + 2\varphi] dt = \\ &= \frac{\sin\left[2\pi(\Delta f_i - \Delta f_j)T\right]}{2\pi(\Delta f_i - \Delta f_j)T} + \frac{\sin[2\pi(2f_0 + \Delta f_i + \Delta f_j)T + 2\varphi] - \sin[2\varphi]}{2\pi(2f_0 + \Delta f_i + \Delta f_j)T} \end{aligned}$$

che, se è $f_0 T$ è un intero, si riduce alla:

$$(III.4.24) \quad (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \frac{\sin\left[2\pi(\Delta f_i - \Delta f_j)T\right]}{2\pi(\Delta f_i - \Delta f_j)T} + \frac{\sin[2\pi(\Delta f_i + \Delta f_j)T + 2\varphi] - \sin[2\varphi]}{2\pi(2f_0 + \Delta f_i + \Delta f_j)T}$$

od anche, ricordando la (III.4.20):

$$(III.4.25) \quad (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \frac{\sin\left[4\pi(i - j)T\Delta f\right]}{4\pi(i - j)T\Delta f} + \frac{\sin[4\pi(i + j)T\Delta f + 2\varphi] - \sin[2\varphi]}{2\pi(2f_0 + 2(i + j))T\Delta f}$$

Dalla (III.4.25) è evidente che le funzioni $u_m(t)$ non costituiscono, in generale, un insieme di funzioni ortonormali; tuttavia se Δf si sceglie in modo tale che risulti:

$$(III.4.26) \quad \Delta f = \frac{k}{T}$$

si ha:

$$(III.4.27) \quad (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

La rappresentazione vettoriale delle segnalazioni $\{s_m(t)\}_{m=1}^M$ allora diventa:

$$(III.4.28) \quad s_m = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \mathbf{u}_m \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

L'insieme delle forme di segnalazioni in tal caso appartengono ad un sottospazio a M dimensioni.

Dalla (III.4.28) si deduce che l'energia associata a $s_m(t)$ vale:

$$(III.4.29) \quad E_m = \frac{V_0^2 T}{2}$$

che, come nel caso PSK M -ario, è indipendente dal simbolo trasmesso.

III.4.4 - Sistemi di modulazione QAM.

Una generalizzazione dei sistemi ASK M -ari si ottiene quando la costellazione dei segnali è composta da un insieme di punti disposti lungo un graticcio quadrato come è mostrato in Fig.III.9.

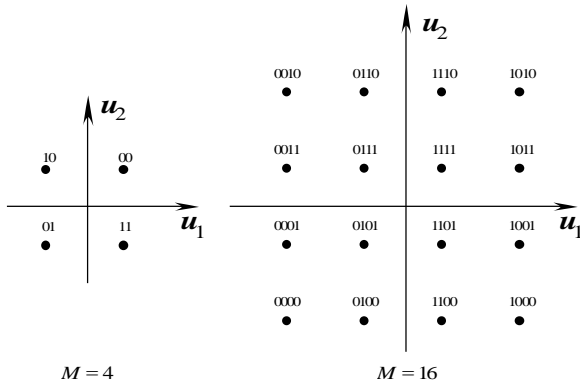


Fig. III.9 - Rappresentazione vettoriale delle forme di segnalazione per modulazioni QAM ($M = 4$ e $M = 16$).

dalla coppia ordinata di valori $(V_0\sqrt{\frac{T}{2}}a_n, V_0\sqrt{\frac{T}{2}}b_m)$ essendo a_n e b_n due simboli M -ari del tipo:

$$(III.4.31) \quad \begin{aligned} a_n &= 2n - (M + 1) & (n = 1, 2, \dots, M) \\ b_m &= 2m - (M + 1) & (m = 1, 2, \dots, M) \end{aligned}$$

Naturalmente il numero dei punti della costellazione è M^2 .

Detta $s_{nm}(t)$ la generica forma di segnalazione risulta:

$$(III.4.32) \quad s_{nm}(t) = V_0 \operatorname{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) [a_n \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) + b_m \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)] \quad \begin{matrix} (n=1,2,\dots,M) \\ (m=1,2,\dots,M) \end{matrix}$$

e la sua rappresentazione vettoriale è data dalla:

$$(III.4.33) \quad s_{nm} = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} [a_n \mathbf{u}_1 + b_m \mathbf{u}_2] \quad \begin{matrix} (n=1,2,\dots,M) \\ (m=1,2,\dots,M) \end{matrix}$$

Un sistema di modulazione di questo tipo prende il nome di modulazione **QAM (Quadrature Amplitude Modulation)**.

Le forme di segnalazione appartengono ad un sottospazio a due dimensioni; esse, se si denotano con

$$(III.4.30) \quad \begin{aligned} u_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \operatorname{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) \\ u_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \operatorname{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) \end{aligned}$$

le funzioni di base, sono individuate

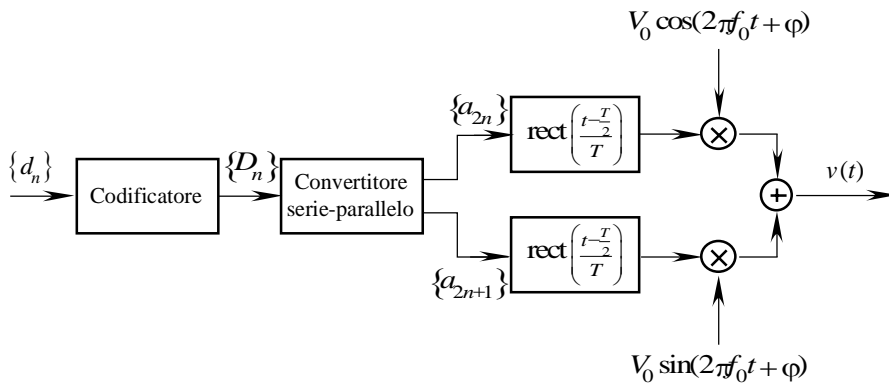


Fig. III.10 - Modulatore QAM.

La modulazione QAM si può intendere come la sovrapposizione di due modulazioni ASK M -arie indipendenti. Essa può essere realizzata secondo lo schema riportato in Fig. III.10. I simboli M -ari $\{D_n\}$ che costituiscono la sequenza d'ingresso subiscono una codifica M -aria a M livelli e i simboli così ottenuti sono distribuiti alternativamente sui due canali in uscita dal convertitore serie-parallelo.

Accanto alle costellazioni QAM fin qui esaminate possono esistere costellazioni di diversa struttura. In Fig. III.11 ne sono presentate alcune particolarmente significative.

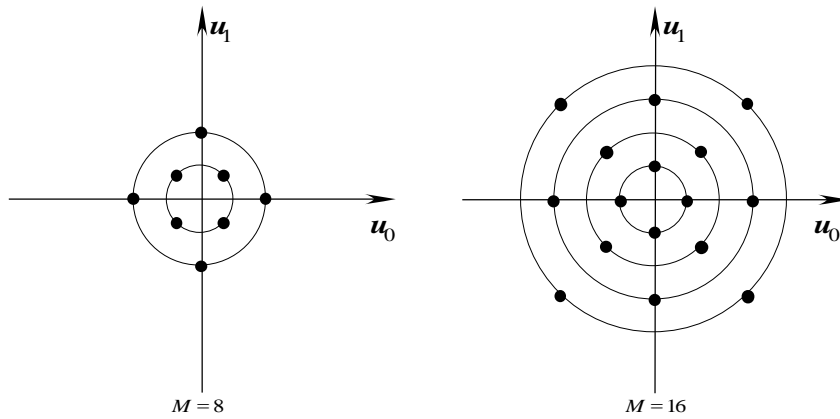


Fig.III.11 – Costellazioni QAM non rettangolari a 8 e a 16 punti.

III.5 - Densità spettrale del segnale modulato.

La densità spettrale del segnale modulato $v(t)$, definito dalla (III.1.1), può essere facilmente determinata solo se ci si limita al caso di modulazioni binarie prive di memoria laddove l'involuppo complesso $\tilde{s}_n(t)$ dipende solo dal simbolo binario corrispondente.

È facile riconoscere che nel caso di modulazioni binarie prive di memoria, le forme complesse di segnalazione sono:

$$(III.5.1) \quad \tilde{s}_n(t) = \begin{cases} V_0 a_n \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) e^{j\varphi} & \text{ASK o PSK} \\ V_0 e^{j2\pi a_n \Delta f t} \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) e^{j\varphi} & \text{FSK} \end{cases}$$

È immediato rendersi conto che le segnalazioni (III.5.1) possono essere scritte nella forma

$$(III.5.2) \quad \tilde{s}_n(t) = V_0 p_n(t) e^{j\varphi}$$

dove $p_n(t)$ denota una funzione complessa definita dalla:

$$(III.5.3) \quad p_n(t) = \alpha_n p_f(t) + j\beta_n p_q(t)$$

in cui i dati α_n e β_n dipendono da a_n secondo quanto riportato in Tabella III.1

Tabella III.1

Modulazione	α_n	β_n	$p_f(t)$	$p_q(t)$
ASK o PSK	a_n	0	$\text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$	0
FSK	1	a_n	$\cos(2\pi t \Delta f) \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$	$\sin(2\pi t \Delta f) \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

Con queste posizioni il segnale modulato diventa:

$$(III.5.4) \quad v(t) = V_0 \text{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(t-nT) e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \right]$$

che, utilizzando la (III.5.3), assume la forma:

$$(III.5.5) \quad \begin{aligned} v(t) &= V_0 \{ v_f(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) - v_q(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \} = \\ &= V_0 \tilde{v}(t) e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} \end{aligned}$$

dove si è posto:

$$(III.5.6) \quad \begin{cases} v_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n p_f(t-nT) \\ v_q(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n p_q(t-nT) \end{cases}$$

e

$$(III.5.7) \quad \tilde{v}(t) = v_f(t) + jv_q(t)$$

La determinazione della densità spettrale di potenza del segnale $v(t)$ è fondata sulla valutazione della sua funzione di autocorrelazione. A tale scopo si suppone che:

- a) i dati $\{a_n\}$ costituiscono una sequenza stazionaria di elementi equiprobabili ed indipendenti;
- b) la fase φ è una variabile aleatoria distribuita uniformemente in $[0, 2\pi)$ ed indipendente dalla sequenza dati $\{a_n\}$.

Tenendo conto della (III.5.5) la funzione di autocorrelazione del segnale $v(t)$ può scriversi allora nel seguente modo:

$$(III.5.8) \quad E\{v(t)v(t+\tau)\} = V_0^2 E\left\{ \operatorname{Re}\left[\tilde{v}(t)e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}\right] \cdot \operatorname{Re}\left[\tilde{v}(t+\tau)e^{j[2\pi f_0(t+\tau) + \varphi]}\right] \right\}$$

D'altra parte si ha:

$$(III.5.9) \quad \operatorname{Re}\left\{\tilde{v}(t)e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\tilde{v}(t)e^{j(2\pi f_0 t + \varphi)} + \tilde{v}^*(t)e^{-j(2\pi f_0 t + \varphi)}\right\}$$

e analogamente:

$$(III.5.10) \quad \operatorname{Re}\left\{\tilde{v}(t+\tau)e^{j[2\pi f_0(t+\tau) + \varphi]}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\tilde{v}(t+\tau)e^{j[2\pi f_0(t+\tau) + \varphi]} + \tilde{v}^*(t+\tau)e^{-j[2\pi f_0(t+\tau) + \varphi]}\right\}$$

e quindi

$$(III.5.11) \quad v(t)v(t+\tau) = \frac{V_0^2}{4}\left\{\tilde{v}(t)\tilde{v}(t+\tau)e^{j[2\pi f_0(2t+\tau) + 2\varphi]} + \tilde{v}(t)\tilde{v}^*(t+\tau)e^{-j2\pi f_0\tau} + \tilde{v}^*(t)\tilde{v}(t+\tau)e^{j2\pi f_0\tau} + \tilde{v}^*(t)\tilde{v}^*(t+\tau)e^{-j[2\pi f_0(2t+\tau) + 2\varphi]}\right\}$$

La (III.5.8) quindi diventa:

$$(III.5.12) \quad \begin{aligned} E\{v(t)v(t+\tau)\} &= \\ &= \frac{V_0^2}{4}\left[E\{\tilde{v}(t)\tilde{v}(t+\tau)\}E_\varphi\left\{e^{j[2\pi f_0(2t+\tau) + 2\varphi]}\right\} + E\{\tilde{v}(t)\tilde{v}^*(t+\tau)\}e^{-j2\pi f_0\tau} + \right. \\ &\quad \left. + E\{\tilde{v}^*(t)\tilde{v}(t+\tau)\}e^{j2\pi f_0\tau} + E\{\tilde{v}^*(t)\tilde{v}^*(t+\tau)\}E_\varphi\left\{e^{-j[2\pi f_0(2t+\tau) + 2\varphi]}\right\}\right] \end{aligned}$$

avendo denotato con $E_\varphi\{\cdot\}$ la media rispetto alla variabile aleatoria φ .

Effettuando le medie rispetto a φ si ha:

$$(III.5.13) \quad E_\varphi\left\{e^{\pm j2\varphi}\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm j2\varphi} d\varphi = 0$$

e di conseguenza la (III.5.12) si semplifica nella:

$$(III.5.14) \quad \begin{aligned} E\{v(t)v(t+\tau)\} &= \frac{V_0^2}{4}\left[E\{\tilde{v}(t)\tilde{v}^*(t+\tau)\}e^{-j2\pi f_0\tau} + E\{\tilde{v}^*(t)\tilde{v}(t+\tau)\}e^{j2\pi f_0\tau}\right] = \\ &= \frac{V_0^2}{2}\operatorname{Re}\left[E\{\tilde{v}(t)\tilde{v}^*(t+\tau)\}e^{-j2\pi f_0\tau}\right] \end{aligned}$$

Tenendo presente le (III.5.6) e (III.5.7), si ha:

$$(III.5.15) \quad \begin{aligned} E\{\tilde{v}(t)\tilde{v}^*(t+\tau)\} &= E\left\{\left[v_f(t) + jv_q(t)\right]\left[v_f(t+\tau) - jv_q(t+\tau)\right]\right\} = \\ &= \left[R_f(t, \tau) + R_q(t, \tau)\right] + j\left[R_{fq}(t, \tau) - R_{qf}(t, \tau)\right] \end{aligned}$$

avendo denotato con $R_f(t, \tau)$ e $R_q(t, \tau)$ le funzioni di autocorrelazione dei segnali $v_f(t)$ e $v_q(t)$ rispettivamente e con $R_{fq}(t, \tau)$ e $R_{qf}(t, \tau)$ le corrispondenti correlazioni incrociate. Ricordando le posizioni (III.5.6), si ha:

$$(III.5.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_f(t, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{\alpha_m \alpha_n\} p_f[t-mT] p_f[t+\tau-nT] \\ R_q(t, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{\beta_m \beta_n\} p_q[t-mT] p_q[t+\tau-nT] \\ R_{fq}(t, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{\alpha_m \beta_n\} p_f[t-mT] p_q[t+\tau-nT] \\ R_{qf}(t, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{\beta_m \alpha_n\} p_q[t-mT] p_f[t+\tau-nT] \end{array} \right.$$

Dal momento che le sequenze $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ sono stazionarie, è evidente che le funzioni di correlazione dei segnali $v_f(t)$ e $v_q(t)$ sono periodiche in t di periodo T . Il segnale $v(t)$ è allora ciclostazionario per cui, per determinare la sua densità spettrale, occorre procedere al calcolo della sua media temporale. Denotando con $R_\alpha(m-n)$, $R_\beta(m-n)$, $R_{\alpha\beta}(m-n)$ e $R_{\beta\alpha}(m-n)$ le corrispondenti correlazioni delle sequenze $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$, è:

$$(III.5.17) \quad \begin{aligned} \phi_f(\tau) &= \langle R_f(t, \tau) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_\alpha(m-n) p_f[t-mT] p_f[t+\tau-nT] = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\alpha(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p_f[t-(k+n)T] p_f[t+\tau-nT] dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\alpha(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{T}{2}-(k+n)T}^{\frac{T}{2}-(k+n)T} p_f(t) p_f(t+\tau+kT) dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\alpha(k) \int_{-\infty}^{\infty} p_f(t) p_f(t+\tau+kT) dt \end{aligned}$$

dove si è posto $k = m - n$.

In modo analogo risulta:

$$(III.5.18) \quad \begin{aligned} \phi_q(\tau) &= \langle R_q(t, \tau) \rangle = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\beta(k) \int_{-\infty}^{\infty} p_q(t) p_q(t+\tau+kT) dt \\ \phi_{fq}(\tau) &= \langle R_{fq}(t, \tau) \rangle = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\alpha\beta}(k) \int_{-\infty}^{\infty} p_f(t) p_q(t+\tau+kT) dt \\ \phi_{qf}(\tau) &= \langle R_{qf}(t, \tau) \rangle = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\beta\alpha}(k) \int_{-\infty}^{\infty} p_q(t) p_f(t+\tau+kT) dt \end{aligned}$$

Se con $\gamma_f(\tau)$, $\gamma_q(\tau)$, $\gamma_{fq}(\tau)$ e $\gamma_{qf}(\tau)$ si denotano le funzioni di correlazione in media temporale dei segnali $p_f(t)$ e $p_q(t)$, si può scrivere:

$$(III.5.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_f(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\alpha(k) \gamma_f(\tau+kT) \\ \phi_q(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_\beta(k) \gamma_q(\tau+kT) \\ \phi_{fq}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\alpha\beta}(k) \gamma_{fq}(\tau+kT) \\ \phi_{qf}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{\beta\alpha}(k) \gamma_{qf}(\tau+kT) \end{array} \right.$$

Il valore medio temporale delle funzioni di autocorrelazione del segnale $v(t)$ diviene così:

$$(III.5.20) \quad \varphi_v(\tau) = \frac{V_0^2}{2} \left\{ \left[\phi_f(\tau) + \phi_q(\tau) \right] \cos(2\pi f_0 t) + \left[\phi_{fq}(\tau) + \phi_{qf}(\tau) \right] \sin(2\pi f_0 t) \right\}$$

Dalla (III.5.20) si deduce la densità spettrale:

$$(III.5.21) \quad W_v(f) = \frac{V_0^2}{4} \left\{ [W(f - f_0) + W(f + f_0)] + j[\bar{W}(f - f_0) - \bar{W}(f + f_0)] \right\}$$

essendo

$$(III.5.22) \quad \begin{aligned} W(f) &= F \left\{ \phi_f(\tau) + \phi_q(\tau) \right\} = |P_f(f)|^2 + |P_q(f)|^2 \\ \bar{W}(f) &= F \left\{ \phi_{fq}(\tau) + \phi_{qf}(\tau) \right\} = P_f(f)P_q^*(f) + P_q(f)P_f^*(f) \end{aligned}$$

III.5.1 - Modulazione ASK o PSK.

Poiché è $\alpha_n = a_n$, si ha

$$(III.5.23) \quad R_\alpha(k) = R_a(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

È quindi:

$$(III.5.24) \quad \phi_f(\tau) = \frac{1}{T} \gamma_f(\tau) \quad ; \quad \phi_q(\tau) = 0$$

per cui essendo $P_f(f) = T \text{sinc}(fT)$ è $W(f) = T \text{sinc}^2(fT)$ e la densità spettrale del segnale ASK binario risulta:

$$(III.5.25) \quad W_v(f) = \frac{V_0^2}{4} \{ W(f - f_0) + W(f + f_0) \}$$



Fig. III.2 - Densità spettrali per modulazione ASK e PSK binari.

In Fig. III.2 è riportato l'andamento della $W(f)$, in funzione di fT . Da detta figura si evince facilmente che la banda del segnale modulato può essere considerata pari a $\left\{ -\frac{1}{T}, \frac{1}{T} \right\}$ e cioè pari all'ampiezza del lobo principale della funzione $\text{sinc}(fT)$.

b) Modulazione FSK binaria.

Poiché è $\alpha_n = 1$ e $\beta_n = a_n$, si ha:

$$(III.5.26) \quad \begin{aligned} R_\alpha(k) &= R_a(k) = 1 \\ R_\beta(k) &= \delta_k \\ R_{\alpha\beta}(k) &= R_{\beta\alpha}(k) = 0 \end{aligned}$$

È quindi:

$$(III.5.27) \quad \begin{aligned} \phi_f(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_f(\tau + kT) \\ \phi_q(\tau) &= \frac{1}{T} \gamma_q(\tau) \\ \phi_{fq}(\tau) &= \phi_{qf}(\tau) = 0 \end{aligned}$$

dalle quali, tenendo presente che è $F \left\{ \phi_f(\tau) \right\} = |P_f(f)|^2$ e $F \left\{ \phi_q(\tau) \right\} = |P_q(f)|^2$, si ottiene

$$(III.5.28) \quad W_f(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P_f(f)|^2 e^{j2\pi f k T} = \frac{1}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| P_f\left(\frac{k}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

e

$$(III.5.29) \quad W_q(f) = \frac{1}{T} |P_q(f)|^2$$

dove si è fatto uso della somma di Poisson $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f k T} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$ e della nota proprietà della distribuzione delta $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$.

D'altra parte, trasformando secondo Fourier le espressioni che in questo caso assumono le funzioni $p_f(t)$ e $p_q(t)$, si ottiene:

$$(III.5.30) \quad \begin{cases} P_f(f) = \frac{T}{2} \left\{ e^{-j\pi(f-\Delta f)T} \text{sinc}[(f-\Delta f)T] + e^{-j\pi(f+\Delta f)T} \text{sinc}[(f+\Delta f)T] \right\} \\ P_q(f) = \frac{T}{2j} \left\{ e^{-j\pi(f-\Delta f)T} \text{sinc}[(f-\Delta f)T] - e^{-j\pi(f+\Delta f)T} \text{sinc}[(f+\Delta f)T] \right\} \end{cases}$$

che sostituite nelle (III.5.28) e (III.5.29) forniscono:

$$(III.5.31) \quad \begin{cases} W_f(f) = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| e^{-j\pi(\frac{k}{T}-\Delta f)T} \text{sinc}\left[\left(\frac{k}{T}-\Delta f\right)T\right] + e^{-j\pi(\frac{k}{T}+\Delta f)T} \text{sinc}\left[\left(\frac{k}{T}+\Delta f\right)T\right] \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \\ W_q(f) = \frac{T}{4} \left| e^{-j\pi(f-\Delta f)T} \text{sinc}[(f-\Delta f)T] - e^{-j\pi(f+\Delta f)T} \text{sinc}[(f+\Delta f)T] \right|^2 \end{cases}$$

Di conseguenza $W(f)$ vale

$$(III.5.32) \quad W(f) = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| e^{-j\pi(\frac{k}{T}-\Delta f)T} \text{sinc}\left[\left(\frac{k}{T}-\Delta f\right)T\right] + e^{-j\pi(\frac{k}{T}+\Delta f)T} \text{sinc}\left[\left(\frac{k}{T}+\Delta f\right)T\right] \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) + \frac{T}{4} \left| e^{-j\pi(f-\Delta f)T} \text{sinc}[(f-\Delta f)T] - e^{-j\pi(f+\Delta f)T} \text{sinc}[(f+\Delta f)T] \right|^2$$

Nel caso particolare in cui è $\Delta f = \frac{1}{T}$ (scostamento minimo di frequenze che garantisce la continuità di fase del segnale modulato) si ottiene:

$$(III.5.33) \quad \begin{aligned} W(f) &= \frac{1}{4} \left[\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{T}\right) \right] + \frac{T}{4} \left\{ \text{sinc}(fT-1) - \text{sinc}(fT+1) \right\}^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left[\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{T}\right) \right] + \frac{T}{\pi^2} \left[\frac{\sin^2(\pi f T)}{f^2 T^2 - 1} \right]^2 \end{aligned}$$

dalla quale può dedursi la densità spettrale del segnale modulato.

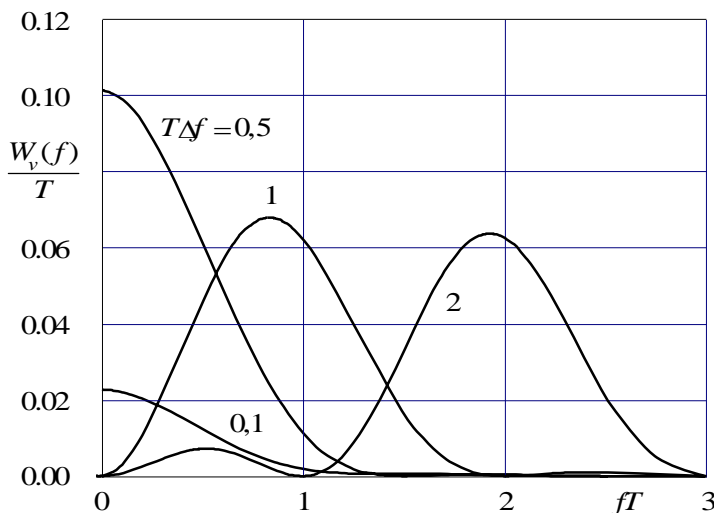


Fig. III.3 - Densità spettrali per modulazione ASK e PSK binari.

e per diversi valori del parametro $T\Delta f$.

Lo spettro del segnale modulato in FSK presenta una componente discreta, dipendente da $W_q(f)$ ed una componente continua dipendente da $W_f(f)$. Nel caso in cui è $T\Delta f = 1$ la componente discreta presenta solo due righe a $f = \pm \frac{1}{T}$ di peso $\frac{1}{4}$. In Fig. III.3 è riportato l'andamento della sola componente continua della densità spettrale $W(f)$. per $f > 0$