

## Capitolo IV

# LA RIVELAZIONE IN PRESENZA DI RUMORE

In questo Capitolo è affrontato il problema della rivelazione in presenza di rumore pervenendo alla definizione della struttura del ricevitore ottimo e cioè di un ricevitore che fornisce una stima del segnale trasmesso che dia luogo alla minima probabilità di errore per simbolo. Sono inoltre analizzate le strutture dei ricevitori ottimi per modulazioni binarie calcolando l'espressione della probabilità di errore in dipendenza della distanza euclidea fra le segnalazioni. Tale analisi è estesa infine a modulazioni  $M$ -arie per le quali è presentato un andamento della probabilità di errore per simbolo in dipendenza del rapporto "segnale/rumore". Sono infine dedotti i limiti entro cui è contenuta la probabilità di errore per simbolo per una generica segnalazione.

### IV.1 - Il problema della decisione.

Il segnale  $r(t)$  che si presenta all'ingresso del ricevitore è costituito da una replica del segnale numerico  $v(t)$  eventualmente distorta per effetto del canale di trasmissione e corretta da disturbi e interferenze. Supponendo che il canale di trasmissione sia ideale e a banda sufficientemente larga da potersi trascurare le distorsioni e l'interferenza di intersimbolo, il segnale ricevuto può essere posto nella forma:

$$(IV.1.1) \quad r(t) = v(t) + n(t)$$

dove la sola causa di disturbo che viene presa in considerazione è costituita da un rumore additivo che, nel seguito, si suppone stazionario, gaussiano e bianco ed indipendente dalla sequenza dei simboli emessi dalla sorgente di informazione.

Nei sistemi di modulazione  $M$ -ari, l'informazione trasmessa è associata ad un insieme di  $M$  simboli  $a_j$ , appartenenti ad un alfabeto di  $M$  elementi. Poiché per modulazioni prive di memoria, il segnale modulato, nel generico intervallo di segnalazione di durata  $T$ , dipende solo dal corrispondente simbolo  $a_j$  trasmesso, risulta:

$$(IV.1.2) \quad v(t) = s_j(t) \quad nT \leq t < (n+1)T$$

dove  $s_j(t)$  denota la forma di segnalazione associata al simbolo  $a_j$ , scelto fra un insieme di  $M$  segnali distinti  $\{s_j(t)\}_{j=0}^{M-1}$ .

Per modulazioni prive di memoria, la rivelazione può essere effettuata simbolo per simbolo, cosicché si può far riferimento all'intervallo  $[0, T)$  corrispondente alla rivelazione del simbolo di posto 0 nella sequenza trasmessa.

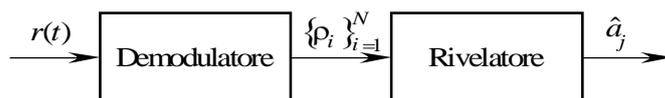


Fig. 1 - Schema di principio di un ricevitore.

Da un punto di vista concettuale è utile considerare il ricevitore come composto da due elementi in cascata (v. Fig.

1):

- il **demodulatore** che fornisce in uscita un insieme numerabile di variabili aleatorie  $\{\rho_k\}_{k=1}^N$  a partire dalla conoscenza del segnale  $r(t)$  con  $t \in [0, T)$ ;
- il **rivelatore** che dà una stima del dato trasmesso sulla base delle osservazioni  $\{\rho_i\}_{i=1}^N$ .

Com'è noto, nel caso di modulazioni  $M$ -arie i segnali  $s_j(t)$  sono ad energia specifica finita e appartengono ad un sottospazio lineare  $S_N$  ad  $N$  dimensioni, con  $N \leq M$ , generato da un insieme di  $N$  funzioni di base  $u_i(t)$ , definite in  $[0, T)$ , che si suppongono ortonormali. Ciò significa che il generico segnale  $s_j(t)$  nell'intervallo  $[0, T)$  può essere sviluppato nella forma:

$$(IV.1.3) \quad s_j(t) = \sum_{i=1}^N s_{ji} u_i(t) \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

in cui i coefficienti dello sviluppo sono definiti dalle:

$$(IV.1.4) \quad s_{ji} = \int_0^T s_j(t) u_i(t) dt \quad \left( \begin{array}{l} i=1, 2, \dots, N \\ j=1, 2, \dots, M \end{array} \right)$$

Si noti che, in generale, il vettore rappresentativo del segnale  $r(t)$  non appartiene al sottospazio lineare  $S_N$  generato dai vettori  $u_i$ . Si consideri pertanto la sua proiezione ortogonale  $r_N$  che individua il segnale:

$$(IV.1.5) \quad r_N(t) = \sum_{i=1}^N \rho_i u_i(t)$$

essendo:

$$(IV.1.6) \quad \rho_i = \int_0^T r(t) u_i(t) dt = s_{ji} + v_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

con

$$(IV.1.7) \quad v_i = \int_0^T n(t) u_i(t) dt \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

In termini delle componenti sopra definite, proiettando la (IV.1.1) ortogonalmente su  $S_N$  si ottiene:

$$(IV.1.8) \quad \rho_i = s_{ji} + v_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)$$

supposto che il simbolo trasmesso sia  $a_j$ . Introducendo la notazione vettoriale, la (IV.1.8) si può scrivere nella forma:

$$(IV.1.9) \quad \mathbf{r}_N = \mathbf{s}_j + \mathbf{n}_N$$

Sulla base della (IV.1.9) il problema della rivelazione può essere così formulato: partendo dalle osservazioni delle  $N$  variabili aleatorie  $\rho_i$  il ricevitore deve decidere sul simbolo  $a_j$  inviato. In altri termini sulla base della conoscenza dei valori  $\rho_i$  il ricevitore deve scegliere fra le seguenti  $M$  ipotesi  $H_j$ :

$$(IV.1.10) \quad H_j : \mathbf{r}_N = \mathbf{s}_j + \mathbf{n}_N \quad (j = 1, 2, \dots, M)$$

corrispondenti ai simboli  $a_j$  trasmessi.

Dalla (IV.1.10) si deduce che ai fini della rivelazione del simbolo  $a_j$  interviene solo la componente del rumore appartenente al sottospazio  $S_N$ . Poiché la componente del rumore  $\mathbf{n}_N$  giacente su  $S_N$  e quella  $\mathbf{n}'_N$  ad esso ortogonale corrispondono ad una coppia di segnali che, in quanto gaussiani e ortogonali, sono statisticamente indipendenti, la conoscenza di  $\mathbf{n}'_N$  non apporta alcun contributo alla rivelazione del dato  $a_j$ .

Nella trasmissione numerica il ricevitore decide a favore di quella segnalazione che conduce ad una decisione con il minimo della probabilità di errore. È facile rendersi conto che tale criterio equivale alla stima:

$$(IV.1.11) \quad \hat{a}_j = \arg \max_{a_i} \{ \Pr \{ a_i | r(t) \} \}$$

Che questo criterio (noto come criterio della massima probabilità a posteriori MAP) corrisponda alla scelta del simbolo che conduce al minimo della probabilità di errore, noto  $r(t)$ , è facile verificare. Infatti  $\Pr\{a_i | r(t)\}$  è la probabilità che il dato trasmesso, noto  $r(t)$ , sia  $a_i$ ; quindi  $1 - \Pr\{a_i | r(t)\}$  denota la probabilità che *non* si sia trasmesso  $a_i$  noto  $r(t)$ . Se il ricevitore stabilisce che il dato trasmesso è  $a_i$  commette un errore con probabilità  $1 - \Pr\{a_i | r(t)\}$ . La condizione (IV.1.11) corrisponde quindi alla scelta del simbolo in corrispondenza del quale la probabilità di errore è minima, o che è lo stesso, la probabilità della corretta decisione è massima. Poiché la componente  $r'_N(t)$  del segnale ricevuto ortogonale al sottospazio  $S_N$  non porta alcun contributo alla decisione, quest'ultima può essere presa sulla base del vettore delle variabili di decisione  $\mathbf{r}_N = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_N]^T$ . La funzione  $\Pr\{a_i | r(t)\}$  è equivalente alla  $\Pr\{a_i | \mathbf{r}_N\}$ . Applicando la regola di Bayes, si può scrivere:

$$(IV.1.12) \quad \Pr\{a_i | \mathbf{r}_N\} = \frac{p_{r_N|a_i}(\mathbf{r}_N | a_i) \Pr\{a_i\}}{p_{r_N}(\mathbf{r}_N)}$$

in cui:

- $\Pr\{a_i\}$  è la probabilità associata al simbolo  $a_i$ ;
- $p_{r_N}(\mathbf{r}_N)$  è la densità di probabilità associata al vettore  $\mathbf{r}_N$ ;
- $p_{r_N|a_i}(\mathbf{r}_N | a_i)$  è la densità di probabilità associata al vettore  $\mathbf{r}_N$  noto che il simbolo trasmesso è  $a_i$ .

Se i simboli sono equiprobabili, la (IV.1.11) si riduce alla:

$$(IV.1.13) \quad \hat{a}_j = \arg \max_{a_i} \{p_{r_N|a_i}(\mathbf{r}_N | a_i)\}$$

poiché, essendo  $p_{r_N}(\mathbf{r}_N)$  positiva ed indipendente da  $a_i$ , non interviene nella determinazione del massimo.

Discende dalla (IV.1.13) che la decisione sul simbolo  $a_j$  è fatta se  $\mathbf{r}_N$  è contenuto in un sottoinsieme  $\mathbf{R}_j$  del sottospazio  $S_N$  essendo  $\mathbf{R}_j$  definito dall'insieme dei punti  $\mathbf{r}_N$  tali che:

$$(IV.1.14) \quad \mathbf{r}_N \in \mathbf{R}_j \quad \text{se} \quad p_{r_N|a_j}(\mathbf{r}_N | a_j) = \arg \max_{a_i} \{p_{r_N|a_i}(\mathbf{r}_N | a_i)\}$$

Ciò equivale a definire una partizione  $\{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_M\}$  del sottospazio  $S_N$  in  $M$  sottoinsiemi disgiunti tali che

- $\bigcup_{j=1}^M \mathbf{R}_j = S_N \quad \text{con} \quad \mathbf{R}_i \cap \mathbf{R}_j = \emptyset \quad (i \neq j)$

- ogni sottoinsieme  $\mathbf{R}_j$  contiene il solo elemento  $s_j$  della costellazione dei segnali, per modo che se  $\mathbf{r}_N$  è contenuto in  $\mathbf{R}_j$  il ricevitore prende la decisione a favore del simbolo  $a_j$ . Le regioni così definite costituiscono le **regioni di decisione**.

Per applicare la regola di decisione formulata dalla (IV.1.13) o (IV.1.14) occorre conoscere le densità di probabilità condizionate  $p_{r_N|a_i}(\mathbf{r}_N | a_i)$ . Tenendo conto della (IV.1.1), si deduce immediatamente:

$$(IV.1.15) \quad p_{r_N|a_i}(\mathbf{r}_N | a_i) = p_{n_N}(\mathbf{r}_N - \mathbf{s}_i)$$

essendo  $p_{n_N}(\mathbf{r}_N - \mathbf{s}_i)$  la densità di probabilità vettore  $\mathbf{n}_N$  valutata in corrispondenza del valore  $\mathbf{r}_N - \mathbf{s}_i$ .

Se il rumore  $n(t)$  è gaussiano, le quantità  $v_i$ , definite dalla (IV.1.7), in quanto ottenute da  $n(t)$  mediante operazioni lineari, presentano una distribuzione congiunta gaussiana per caratterizzare la quale occorre definire il valore medio statistico delle variabili casuali  $v_i$  e gli elementi della matrice di correlazione. Se  $n(t)$  è caratterizzato da un valore medio nullo e da una densità spettrale pari a  $\frac{N_0}{2}$  si ha:

$$(IV.1.16) \quad E\{v_i\} = \int_0^T E\{n(t)\}u_i(t)dt = 0$$

e

$$(IV.1.17) \quad E\{v_i v_j\} = E\left\{\int_0^T \int_0^T n(t_1)n(t_2)u_i(t_1)u_j(t_2)dt_1 dt_2\right\} = \int_0^T \int_0^T E\{n(t_1)n(t_2)\}u_i(t_1)u_j(t_2)dt_1 dt_2$$

che, essendo

$$(IV.1.18) \quad E\{n(t_1)n(t_2)\} = \frac{N_0}{2}\delta(t_2 - t_1)$$

diventa

$$(IV.1.19) \quad E\{v_i v_j\} = \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2}\delta(t_2 - t_1)u_i(t_1)u_j(t_2)dt_1 dt_2 = \frac{N_0}{2} \int_0^T u_i(t)u_j(t)dt = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

dato che le funzioni di base costituiscono un insieme di funzioni orto-normali. Le quantità  $v_i$  e  $v_j$  sono pertanto incorrelate e, in quanto gaussiane, statisticamente indipendenti. Poiché la loro varianza vale  $\frac{N_0}{2}$  si può scrivere:

$$(IV.1.20) \quad p_{n_N}(\mathbf{n}_N) = \prod_{k=1}^N p_{n_k}(v_k) = \frac{1}{(\sqrt{\pi N_0})^N} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N v_k^2\right)$$

e di conseguenza la funzione  $p(\mathbf{r}_N | a_i)$ , data dalla (IV.1.15), diventa:

$$(IV.1.21) \quad p(\mathbf{r}_N | a_i) = \frac{1}{(\sqrt{\pi N_0})^N} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N (\rho_k - s_{ik})^2\right)$$

Se i dati sono equiprobabili, la regione di decisione  $R_j$  definita dall'insieme dei punti le cui coordinate  $\rho_j$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) soddisfano la seguente condizione:

$$(IV.1.22) \quad \exp\left(-\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N (\rho_k - s_{jk})^2\right) = \max_{(i \neq j)} \left\{ \exp\left(-\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^N (\rho_k - s_{ik})^2\right) \right\}$$

che può essere riscritta nella forma:

$$(IV.1.23) \quad \sum_{k=1}^N (\rho_k - s_{jk})^2 = \min_{\substack{i \\ (i \neq j)}} \left\{ \sum_{k=1}^N (\rho_k - s_{ik})^2 \right\}$$

Osservando che la quantità:

$$(IV.1.24) \quad d_j^2 = \sum_{k=1}^N (\rho_k - s_{jk})^2$$

rappresenta il quadrato della distanza euclidea tra il vettore ricevuto  $\mathbf{r}_N$  e la segnalazione  $s_j$ , dalla (IV.1.24) si deduce che il ricevitore decide a favore del simbolo  $a_j$  se la distanza  $d_j$  fra il segnale ricevuto  $\mathbf{r}_N$  e la corrispondente segnalazione  $s_j$  è la minima fra le distanze  $d_i$  valutate sempre da  $\mathbf{r}_N$  con le rimanenti segnalazioni  $s_i$  corrispondenti ai simboli  $a_i$  ( $i \neq j$ ). In altri termini:

$$(IV.1.25) \quad a_j = \arg \min_i d_i$$

### IV.2. - Struttura del ricevitore ottimo.

La regola di decisione ottima, formulata nel precedente paragrafo, suggerisce una struttura del ricevitore ottimo come è quella riportata in Fig. IV.2 nel caso di simboli equiprobabili.

Si nota dalla Fig. IV.2 che tale struttura è basata sulla operazione di correlazione fra il segnale in ingresso  $r(t)$  e le funzioni di base  $u_i(t)$ . Poiché queste ultime sono dipendenti dalle forme di segnalazione  $s_i(t)$ , le funzioni  $u_i(t)$  sono note al ricevitore se è possibile ricostruire esattamente i segnali  $s_i(t)$ . Un tale tipo di ricevitore è chiamato **ricevitore coerente**.

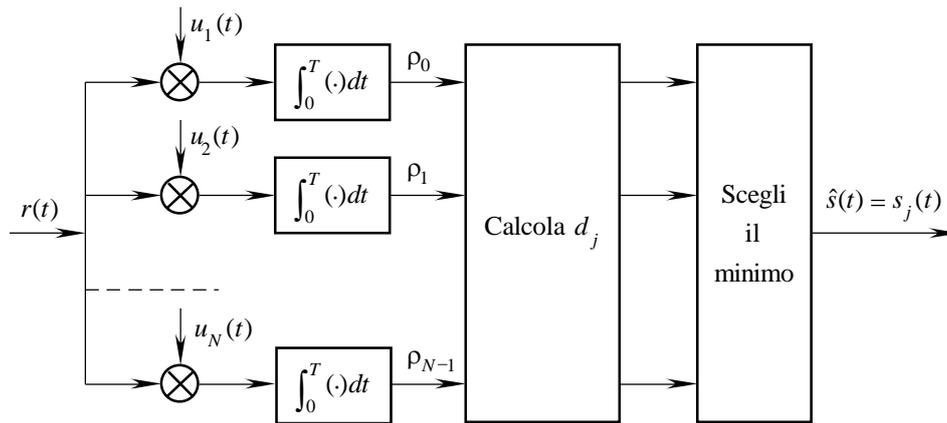


Fig. IV.2 – Struttura I del ricevitore ottimo. Utilizzo delle funzioni di base.

Sviluppando la (IV.1.24) si deduce:

$$(IV.2.1) \quad d_j^2 = \sum_{k=1}^N \rho_k^2 - 2 \sum_{k=1}^N \rho_k s_{jk} + \sum_{k=1}^N s_{jk}^2$$

Si noti che la quantità  $\sum_k \rho_k s_{jk}$  rappresenta il prodotto scalare fra il segnale  $r_N$  e la segnalazione  $s_j$ . Dal momento che  $r_N$  è la proiezione ortogonale di  $r$  nel sottospazio  $S_N$ , tale prodotto scalare coincide con  $(r, s_j)$  e cioè:

$$(IV.2.2) \quad \sum_{k=1}^N \rho_k s_{jk} = \int_0^T r(t) s_j(t) dt$$

Essendo inoltre:

$$(IV.2.3) \quad \sum_{k=1}^N s_{ik}^2 = \int_0^T s_i^2(t) dt = E_i$$

la regola di decisione (IV.1.25) diventa:

$$(IV.2.4) \quad \hat{a} = a_j \Rightarrow \int_0^T r(t) s_j(t) dt - \frac{E_j}{2} = \max_i \left\{ \int_0^T r(t) s_i(t) dt - \frac{E_i}{2} \right\}$$

Dalla (IV.2.4) si deduce la struttura del ricevitore ottimo riportata in Fig. IV.3, dove le correlazioni sono stavolta effettuate tra il segnale ricevuto e le forme d'onda di segnalazione.

Dal confronto fra le Fig. IV.2 e IV.3 si evince che la struttura riportata in Fig. IV.2 risulta più semplice di quella di Fig. IV.3 dato che è  $N \leq M$ . Nel caso in cui è  $N = M$ , le due strutture sono equivalenti perché contengono lo stesso numero di correlatori.

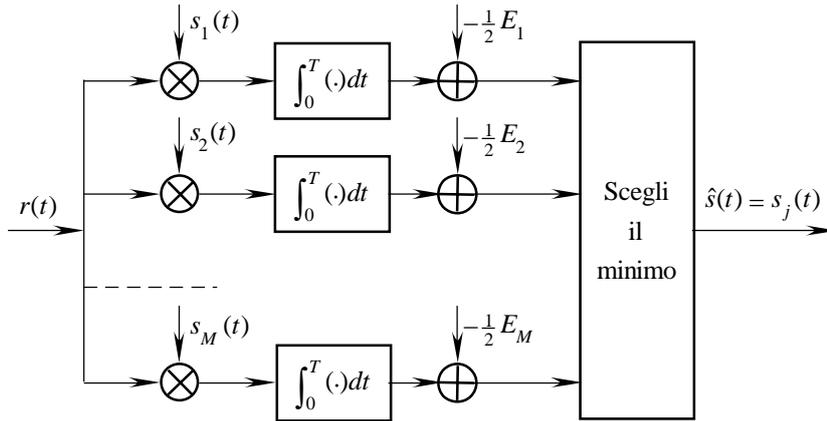


Fig. IV.3 – Struttura II del ricevitore ottimo. Utilizzo delle forme di segnalazione

Il segnale in uscita dal generico integratore vale:

$$(IV.2.5) \quad z_k = \int_0^T r(t)s_k(t)dt$$

che ponendo

$$(IV.2.6) \quad h_k(t) = s_k(T-t)$$

diventa:

$$(IV.2.7) \quad z_k = \int_0^T r(t)h_k(T-t)dt$$

che può essere interpretata come il valore del segnale in uscita dal filtro di risposta impulsiva (IV.2.6) quando la suo ingresso è applicato il segnale  $r(t)$ , all'istante  $T$ . Lo schema di Fig. IV.2 può pertanto essere realizzato come mostrato in Fig. IV.4 e cioè sulla base dei filtri adattati alle forme di segnalazione  $\{s_j(t)\}_{j=1}^M$ .

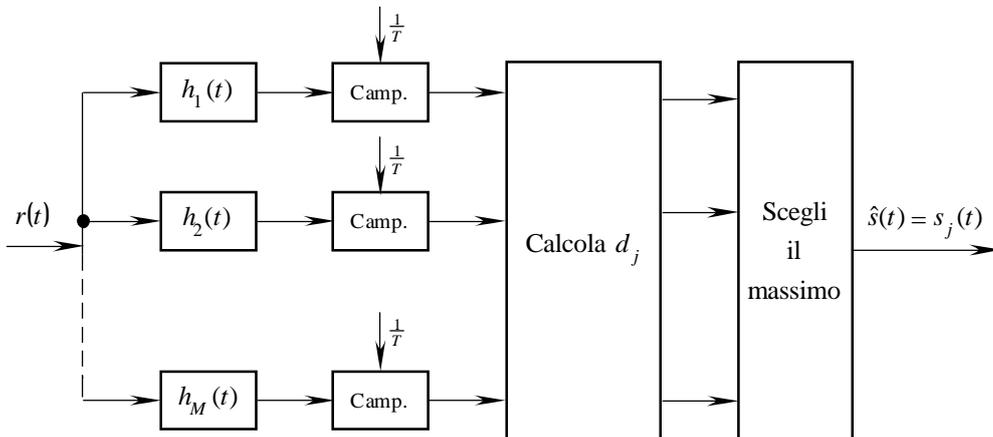


Fig. IV.4 – Struttura III del ricevitore ottimo. Utilizzo dei filtri adattati.

### IV.3 - Segnalazione binaria.

Nel caso di segnalazione binaria siano  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$  le forme di segnalazione associate ai simboli  $d=0$  e  $d=1$  rispettivamente supposti equiprobabili. Tali forme di segnalazione possono essere rappresentate in un sottospazio a due dimensioni  $S_2$  individuato da una base ortonormale  $(u_0, u_1)$  come è mostrato in Fig. IV.5.

Per valutare la probabilità di errore si prenda in esame la trasmissione del simbolo  $d = 0$ . Si commette errore quando la distanza tra  $r_2$  e  $s_1$  è minore di quella tra  $r_2$  e  $s_0$ . Si può quindi scrivere:

$$(IV.3.1) \quad P_{e|0} = \Pr\left\{\|r_2 - s_0\|^2 > \|r_2 - s_1\|^2 \mid d = 0\right\} = \Pr\left\{\|(s_0 + n_2) - s_0\|^2 > \|(s_0 + n_2) - s_1\|^2\right\} = \\ = \Pr\left\{\|n_2\|^2 > \|n_2 - (s_1 - s_0)\|^2\right\} = \Pr\left\{\|n_2\|^2 - \|n_2 - (s_1 - s_0)\|^2 > 0\right\}$$

Poiché risulta:

$$(IV.3.2) \quad \|n_2\|^2 - \|n_2 - (s_1 - s_0)\|^2 = n_2^T n_2 - [n_2 - (s_1 - s_0)]^T [n_2 - (s_1 - s_0)] = \\ = n_2^T n_2 - [n_2^T n_2 - n_2^T (s_1 - s_0) - (s_1 - s_0)^T n_2 + (s_1 - s_0)^T (s_1 - s_0)] = \\ = n_2^T (s_1 - s_0) + (s_1 - s_0)^T n_2 - (s_1 - s_0)^T (s_1 - s_0) = \\ = 2(s_1 - s_0)^T n_2 - \|s_1 - s_0\|^2$$

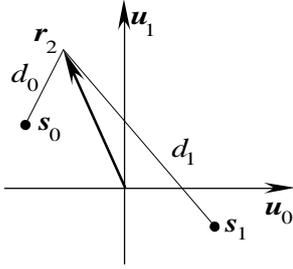


Fig. IV.5 - Segnalazione binaria

la (IV.3.1) si può scrivere:

$$(IV.3.3) \quad P_{e|0} = \Pr\left\{(s_1 - s_0)^T n_2 > \frac{1}{2}\|s_1 - s_0\|^2\right\}$$

D'altra parte è facile riconoscere che la quantità  $x = (s_1 - s_0)^T n_2$ , in quanto combinazione lineare di variabili aleatorie gaussiane, è anch'essa una variabile aleatoria gaussiana di valore medio:

$$(IV.3.4) \quad E\{x\} = (s_1 - s_0)^T E\{n_2\} = 0$$

e varianza:

$$(IV.3.5) \quad E\{x^2\} = E\{(s_1 - s_0)^T n_2 n_2^T (s_1 - s_0)\} = (s_1 - s_0)^T E\{n_2 n_2^T\} (s_1 - s_0) = \frac{N_0}{2} (s_1 - s_0)^T I_2 (s_1 - s_0) = \\ = \frac{N_0}{2} \|s_1 - s_0\|^2 = \frac{N_0}{2} D^2$$

dove si è indicato con

$$(IV.3.6) \quad D = \|s_1 - s_0\|$$

la distanza euclidea fra le due segnalazioni. Risulta allora:

$$(IV.3.7) \quad p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 D^2}} e^{-\frac{x^2}{N_0 D^2}}$$

La probabilità di errore  $P_{e|0}$  vale dunque:

$$(IV.3.8) \quad P_{e|0} = \int_{\frac{1}{2}D^2}^{\infty} p_x(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 D^2}} \int_{\frac{1}{2}D^2}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{N_0 D^2}} dx$$

che si può porre nella forma:

$$(IV.3.9) \quad P_{e|0} = Q\left\{\sqrt{\frac{D^2}{2N_0}}\right\}$$

Poiché risulta, per simmetria,  $P_{e|0} = P_{e|1}$ , è:

$$(IV.3.10) \quad P_e = Q\left\{\sqrt{\frac{D^2}{2N_0}}\right\}$$

Nella segnalazione binaria la probabilità di errore dipende dalla distanza euclidea fra le due segnalazioni.

### IV.4 - Sistemi di modulazione binari.

Le considerazioni svolte al paragrafo precedente sono qui applicate ai sistemi di modulazione binari presentati al Cap. III. In quel che segue si suppone che i simboli siano equiprobabili.

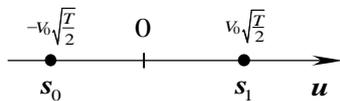
#### IV.4.1 - Modulazioni ASK e PSK.

Nel caso di modulazione ASK o PSK le forme di segnalazione, corrispondenti ai simboli  $d = 0$  e  $d = 1$ , sono date dalla:

$$(IV.4.1) \quad \begin{cases} s_0(t) = -V_0 \operatorname{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \\ s_1(t) = V_0 \operatorname{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \end{cases}$$

che, com'è noto, possono essere rappresentate nel sottospazio  $S_1$  ad una dimensione, generato dalla funzione di base:

$$(IV.4.2) \quad u(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \operatorname{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$



**Fig. IV 6** – Costellazione dei segnali e regioni di decisione per segnalazione ASK o PSK binaria.

dai vettori:

$$(IV.4.3) \quad \begin{cases} s_0 = -V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} u \\ s_1 = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} u \end{cases}$$

e la costellazione dei segnali si presenta come è mostrato in Fig. IV.6. La regola di decisione è:

$$(IV.4.4) \quad \begin{aligned} \hat{d} = 1 &\Rightarrow \rho = \int_0^T r(t)u(t)dt > 0 \\ \hat{d} = 0 &\Rightarrow \rho = \int_0^T r(t)u(t)dt < 0 \end{aligned}$$

che, ricordando la (IV.4.2) diviene:

$$(IV.4.5) \quad \begin{aligned} \hat{d} = 1 &\Rightarrow \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt > 0 \\ \hat{d} = 0 &\Rightarrow \int_0^T r(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt < 0 \end{aligned}$$

che dà luogo allo schema del ricevitore mostrato in Fig. IV.7.

Essendo

$$(IV.4.6) \quad D = 2V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}$$

la distanza fra le due segnalazioni, la probabilità di errore, data dalla (IV.3.10), vale:

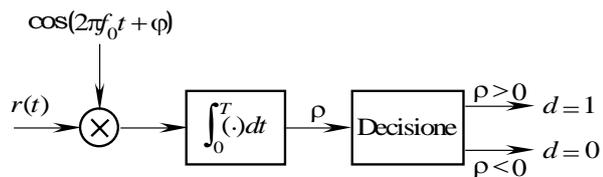
$$(IV.4.7) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}}\right)$$

Introducendo l'energia media per simbolo

$$(IV.4.8) \quad E = \frac{1}{2} \left( \int_0^T s_0^2(t) dt + \int_0^T s_1^2(t) dt \right) = \frac{V_0^2 T}{2}$$

la  $P_e$  può essere riscritta nella forma:

$$(IV.4.9) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$



**Fig. IV.7** – Struttura del ricevitore ottimo per segnalazioni ASK o PSK binarie.

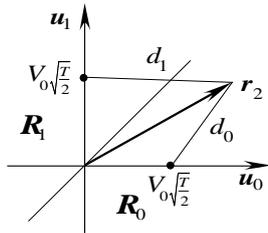
**IV.5.2 - Modulazione FSK.**

Le forme d'onda di segnalazione, corrispondenti ai simboli  $d = 0$  e  $d = 1$ , sono:

$$(IV.4.10) \quad \begin{cases} s_0(t) = V_0 \operatorname{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \cos[2\pi(f_0 - \Delta f)t + \varphi] \\ s_1(t) = V_0 \operatorname{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi] \end{cases}$$

che appartengono ad un sottospazio  $S_2$  a due dimensioni che può essere individuato dalle funzioni di base

$$(IV.4.11) \quad \begin{cases} u_0(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \operatorname{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \cos[2\pi(f_0 - \Delta f)t + \varphi] \\ u_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \operatorname{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi] \end{cases}$$



**Fig. IV.8** - Costellazione dei segnali e regioni di decisione per segnalazione FSK binaria.

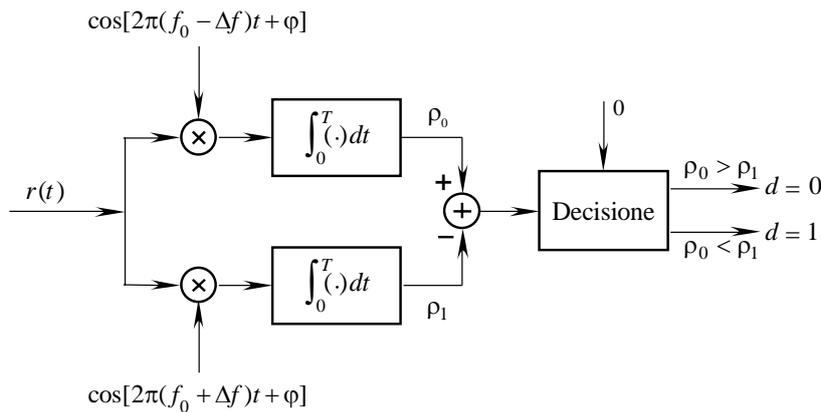
che, come è stato precisato in precedenza, costituiscono un riferimento ortonormale se risulta  $T\Delta f = k$ . In tali condizioni, la rappresentazione vettoriale dei segnali  $s_0(t)$  e  $s_1(t)$  è data dalla (vedi Fig. IV.8):

$$(IV.4.12) \quad \begin{cases} s_0 = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} u_0 \\ s_1 = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} u_1 \end{cases}$$

Nel caso di simboli equiprobabili, la decisione è presa se il punto  $r_2$  appartiene ad uno dei due semipiani  $R_0$  e  $R_1$  separati dalla prima bisettrice. In particolare:

$$(IV.4.13) \quad \begin{aligned} \hat{d} = 0 &\Rightarrow \rho_0 > \rho_1 \\ \hat{d} = 1 &\Rightarrow \rho_0 < \rho_1 \end{aligned}$$

dove  $\rho_0 = \int_0^T r(t)u_0(t)dt$  e  $\rho_1 = \int_0^T r(t)u_1(t)dt$  denotano le componenti del segnale ricevuto lungo le direzioni individuate dai vettori di base  $u_0$  e  $u_1$  rispettivamente.



**Fig. IV.9** - Struttura del ricevitore ottimo per segnalazione FSK binaria.

Ricordando le (IV.4.11) le precedenti si possono scrivere:

$$(IV.4.14) \quad \begin{aligned} \hat{d} = 0 &\Rightarrow \int_0^T r(t) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi] dt > \int_0^T r(t) \cos[2\pi(f_0 - \Delta f)t + \varphi] dt \\ \hat{d} = 1 &\Rightarrow \int_0^T r(t) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi] dt < \int_0^T r(t) \cos[2\pi(f_0 - \Delta f)t + \varphi] dt \end{aligned}$$

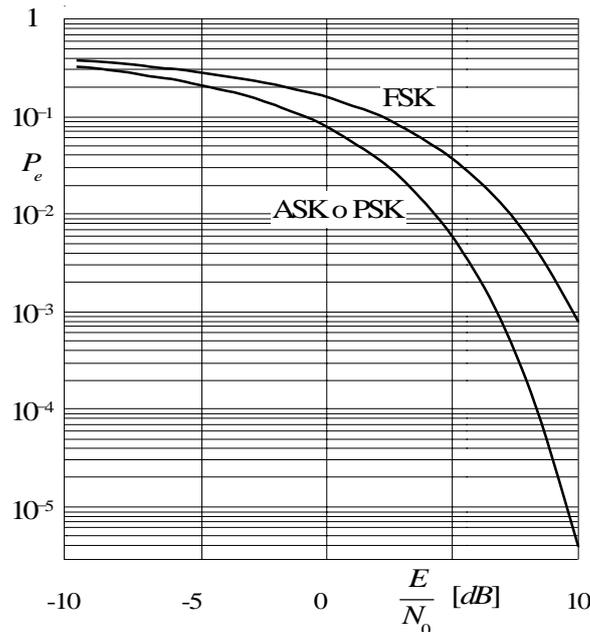
od anche

$$(IV.4.15) \quad \begin{aligned} \hat{d} = 0 &\Rightarrow \int_0^T r(t) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi] dt - \int_0^T r(t) \cos[2\pi(f_0 - \Delta f)t + \varphi] dt > 0 \\ \hat{d} = 1 &\Rightarrow \int_0^T r(t) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi] dt - \int_0^T r(t) \cos[2\pi(f_0 - \Delta f)t + \varphi] dt < 0 \end{aligned}$$

che danno luogo allo schema del ricevitore mostrato in Fig. IV.9.

Poiché la distanza euclidea fra le due segnalazioni vale  $D = \sqrt{2}V_0\sqrt{\frac{T}{2}}$  la probabilità di errore diventa:

$$(IV.4.16) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{V_0^2 T}{2N_0}}\right)$$



**Fig. IV.10** - Probabilità di errore in funzione del rapporto segnale rumore  $E/N_0$  per i sistemi di modulazione binari ASK (PSK) e FSK.

L'energia media per simbolo vale:

$$(IV.4.17) \quad E = \frac{V_0^2 T}{2}$$

e quindi la probabilità di errore è:

$$(IV.4.18) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

In Fig. IV.10 sono riportati gli andamenti della probabilità di errore in funzione del rapporto segnale rumore  $E/N_0$  per i sistemi di modulazione binari fin qui analizzati.

## IV.5 - Sistemi di modulazione M-ari.

### IV.5.1 - Sistemi di modulazione ASK M-ari.

Negli schemi di modulazione ASK M-ari le forme di segnalazione sono

$$(IV.5.1) \quad s_m(t) = V_0 a_m \text{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

con

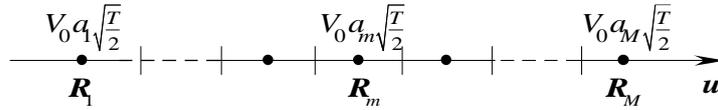
$$(IV.5.2) \quad a_m = 2m - (M + 1) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

Esse appartengono ad un sottospazio monodimensionale  $S_1$  perché possono essere rappresentate dall'unica funzione di base:

$$(IV.5.3) \quad u(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

La rappresentazione vettoriale è data dai vettori:

$$(IV.5.4) \quad s_m = V_0 a_m \sqrt{\frac{T}{2}} \mathbf{u}$$



**Fig. IV.11** – Costellazione dei segnali e regioni di decisione per segnalazione ASK  $M$ -aria.

e la costellazione dei segnali è rappresentata in Fig. IV.11.

Usando la stessa procedura di quella adoperata per la

valutazione della probabilità di errore nella segnalazione ASK  $M$ -aria in banda base, è facile verificare che la probabilità di errore per simbolo può essere espressa dalla:

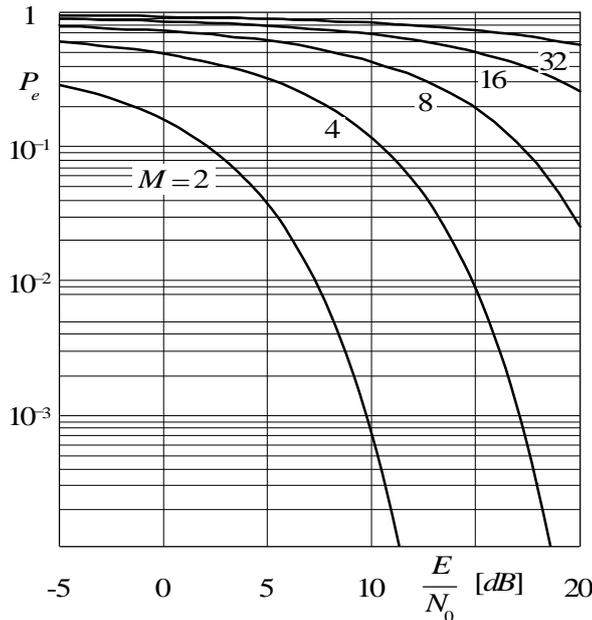
$$(IV.5.5) \quad P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}}\right)$$

L'energia media associata alle forme di segnalazione è:

$$(IV.5.6) \quad E = \frac{V_0^2 T}{2} E\{a_m^2\} = \frac{V_0^2 T}{2} \frac{M^2 - 1}{3}$$

per cui la (IV.5.5) diviene:

$$(IV.5.7) \quad P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6}{(M^2 - 1)} \frac{E}{N_0}}\right)$$



**Fig. IV.12** – Probabilità di errore per simbolo per segnalazioni ASK  $M$ -arie in funzione del rapporto segnale rumore  $E/N_0$ .

In Fig. IV.12 sono rappresentati gli andamenti del rapporto segnale rumore  $E/N_0$  per diversi valori del parametro  $M$ .

Se il sistema di modulazione è adoperato per la trasmissione di informazione binaria, allora, ad ogni gruppo di  $m$  simboli binari si può associare uno fra  $M = 2^m$  livelli distinti. Inoltre se si suppone che il rapporto  $E/N_0$  sia abbastanza elevato è lecito considerare trascurabile la probabilità che ogni errore commesso dal ricevitore corrisponde alla rive-

lazione di un simbolo non adiacente a quello trasmesso. In queste circostanze, se si adotta la codifica di Gray, la probabilità di errore per bit è data dalla

$$(IV.5.8) \quad P_b = \frac{P_e}{m} = 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q \left( \sqrt{\frac{6}{(M^2-1)} \frac{E}{N_0}} \right)$$

**IV.5.2 - Sistemi di modulazione PSK  $M$ -ari.**

Negli schemi di modulazione PSK  $M$ -ari, le forme di segnalazione sono:

$$(IV.5.9) \quad s_m(t) = V_0 \text{rect} \left( \frac{t-\frac{T}{2}}{T} \right) \cos \left( 2\pi f_0 t + \frac{2\pi m}{M} + \varphi \right)$$

con  $m=1,2,\dots,M$  che sono rappresentate nel sottospazio bidimensionale individuato dalle due funzioni di base

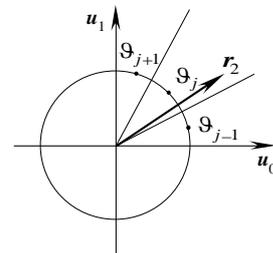
$$(IV.5.10) \quad \begin{aligned} u_0(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect} \left( \frac{t-\frac{T}{2}}{T} \right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \\ u_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect} \left( \frac{t-\frac{T}{2}}{T} \right) \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \end{aligned}$$

Con riferimento alla Fig. IV.13 è evidente che sotto l'ipotesi che i simboli vengano emessi con eguale probabilità, il ricevitore decide a favore di quel simbolo  $a_j$  cui corrisponde la fase  $\vartheta_j = \frac{2\pi j}{M}$  che è la più vicina all'angolo formato dal vettore ricevuto  $r_2$ . Detti pertanto  $\rho_0$  e  $\rho_1$  le componenti del vettore  $r_2$  lungo i versori  $u_0$  e  $u_1$  rispettivamente, la stima  $\hat{\vartheta}_j$  della fase  $\vartheta_j$  può essere effettuata valutando la quantità:

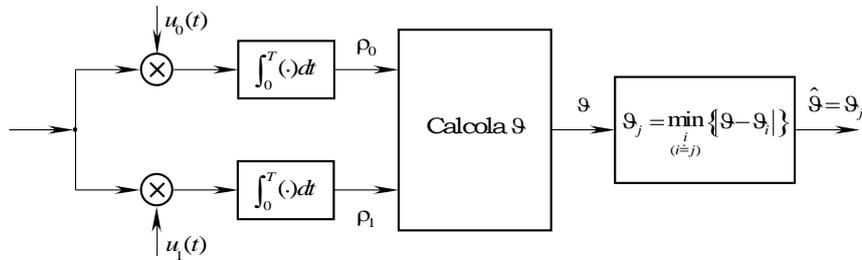
$$(IV.5.11) \quad \vartheta = \arg(r_2)$$

e attribuendo a  $\hat{\vartheta}_j$  quel valore, fra le fasi possibili, che si trova più vicino a  $\vartheta$ .

Ciò dà luogo allo schema del ricevitore mostrato in Fig. IV.14.



**Fig. IV.13** - Regola di decisione per modulazioni PSK  $M$ -arie.



**Fig. IV.14** - Ricevitore ottimo per modulazioni PSK  $M$ -arie.

Per determinare la probabilità di errore basta far riferimento alla probabilità di corretta decisione. Se il simbolo inviato è  $\vartheta_j$  la rivelazione è corretta se  $\vartheta$  è contenuto nell'intervallo  $(\vartheta_j - \frac{\pi}{M}, \vartheta_j + \frac{\pi}{M})$  per cui è

$$(IV.5.12) \quad P_c = \sum_{j=1}^M \frac{1}{M} \int_{\vartheta_j - \frac{\pi}{M}}^{\vartheta_j + \frac{\pi}{M}} p(\vartheta | \vartheta_j) d\vartheta$$

dove con  $p(\vartheta | \vartheta_j)$  si è denotata la densità di probabilità di  $\vartheta$  noto che sia il simbolo  $\vartheta_j$  trasmesso. Tenendo infine conto che, per la simmetria del sistema, la  $p(\vartheta | \vartheta_j)$  non dipende dal particolare simbolo trasmesso, la precedente può scriversi come segue:

$$(IV.5.13) \quad P_c = \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} p(\vartheta | \vartheta_M) d\vartheta$$

Per valutare la  $p(\vartheta | \vartheta_M)$  basta osservare che, essendo  $\vartheta_M = 2\pi$ , le componenti  $\rho_0$  e  $\rho_1$  del vettore  $\mathbf{r}_2$  valgono:

$$(IV.5.14) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} + v_0 \\ \rho_1 &= v_1 \end{aligned}$$

Se  $n(t)$  è un rumore gaussiano e bianco e  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$  costituisce un riferimento ortonormale, le quantità  $v_0$  e  $v_1$  sono variabili aleatorie gaussiane ed indipendenti caratterizzate da un valore medio nullo e da varianze eguali e pari a  $N_0/2$ . Risulta:

$$(IV.5.15) \quad p(\rho_0, \rho_1 | \vartheta_M) = \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \left[ \left( \rho_0 - V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \right)^2 + \rho_1^2 \right] \right\}$$

Introducendo la seguente trasformazione di variabili:

$$(IV.5.16) \quad \begin{cases} \rho_0 = \rho \cos \vartheta \\ \rho_1 = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

la precedente può essere riscritta in termini di  $\rho$  e  $\vartheta$  come segue:

$$(IV.5.17) \quad p(\rho, \vartheta | \vartheta_M) = \frac{\rho}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \left( \rho^2 + V_0^2 \frac{T}{2} - 2\rho V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \vartheta \right) \right\}$$

D'altra parte si ha:

$$(IV.5.18) \quad \begin{aligned} \rho^2 + V_0^2 \frac{T}{2} - 2\rho V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \vartheta &= \left( \rho - V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \vartheta \right)^2 + \frac{V_0^2 T}{2} (1 - \cos^2 \vartheta) = \\ &= \left( \rho - V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \vartheta \right)^2 + \frac{V_0^2 T}{2} \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

cosicché la (IV.5.17) assume la forma:

$$(IV.5.19) \quad p(\rho, \vartheta | \vartheta_M) = \frac{\rho}{\pi N_0} e^{-\frac{E}{N_0} \sin^2 \vartheta} \exp \left\{ -\left( \frac{\rho}{\sqrt{N_0}} - \sqrt{\frac{E}{N_0}} \cos \vartheta \right)^2 \right\}$$

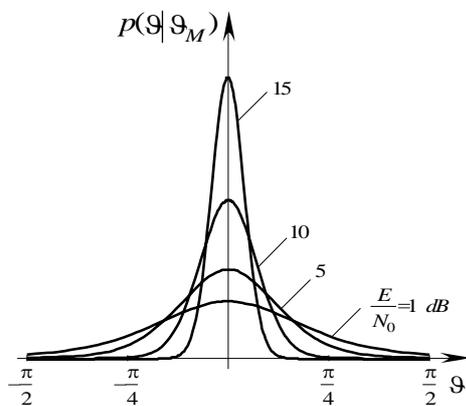
essendo  $E = \frac{V_0^2 T}{2}$  l'energia media di segnalazione.

Dalla (IV.5.19) è possibile ricavare la densità di probabilità della fase  $\vartheta$  integrando rispetto a  $\rho$ :

$$(IV.5.20) \quad p(\vartheta | \vartheta_M) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{E}{N_0} \sin^2 \vartheta} \int_0^\infty x \exp \left\{ -\left( \frac{x}{\sqrt{N_0}} - \sqrt{\frac{E}{N_0}} \cos \vartheta \right)^2 \right\} dx$$

che, con alcuni passaggi, può essere posta nella forma:

$$(IV.5.21) \quad p(\vartheta | \vartheta_M) = \frac{e^{-\frac{E}{N_0}}}{2\pi} \left\{ 1 + \cos \vartheta \sqrt{\frac{\pi E}{N_0}} e^{\frac{E}{N_0} \cos^2 \vartheta} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{E}{N_0}} \cos \vartheta \right) \right] \right\}$$



**Fig. IV.15** -  $p(\vartheta | \vartheta_M)$  in funzione di  $\vartheta$  e per diversi valori di  $E/N_0$ .

il cui andamento in funzione del parametro  $\frac{E}{N_0}$  è mostrato in Fig. IV.15).

La probabilità di corretta decisione vale:

$$(IV.5.22) \quad P_c = \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} p(\vartheta | \vartheta_M) d\vartheta$$

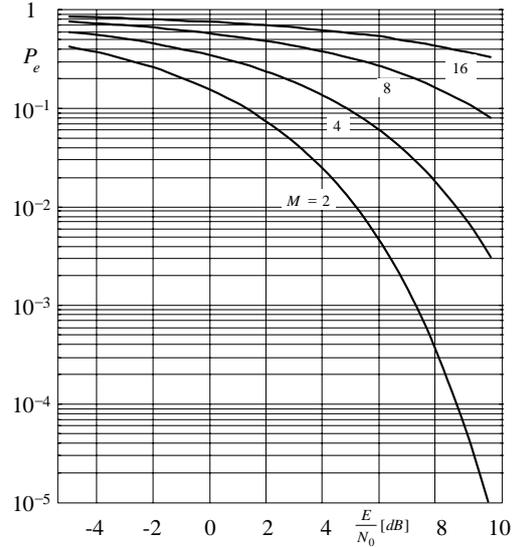
e la corrispondente probabilità di errore per simbolo:

$$(IV.5.23) \quad P_e = 1 - \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} p(\vartheta | \vartheta_M) d\vartheta$$

È da osservare che la (IV.5.23) non può essere risolta in forma chiusa, tranne quando

non sia  $M=2$  e  $M=4$ .

Gli andamenti della  $P_e$  in funzione del rapporto segnale rumore  $\frac{E}{N_0}$  ottenuti per integrazione numerica della (IV.5.21), sono riportati in Fig. IV.16 per alcuni valori del numero dei livelli  $M$ . Dalla figura si rileva che, per un assegnato valore della probabilità di errore, il rapporto segnale rumore aumenta al crescere del numero dei livelli o, che è lo stesso, aumentando  $M$ , occorre impegnare una più elevata potenza per ottenere le stesse prestazioni in termini di probabilità di errore.



**Fig. IV.16** - Probabilità di errore per segnalazioni  $M$ -PSK in funzione di  $E/N_0$  per alcuni valori di  $M$ .

Nel caso che tale segnalazione è impiegata per la trasmissione di informazione binaria, si può determinare la probabilità di errore per bit, nell'ipotesi che, in presenza di codifica di Gray, il rapporto segnale rumore sia sufficientemente elevato. Si ottiene:

$$(IV.5.24) \quad P_{eb} = \frac{P_e}{\log_2 M}$$

### IV.6.3 - Sistemi di modulazione FSK $M$ -ari.

Nel caso di modulazione FSK  $M$ -aria le forme di segnalazione sono:

$$(IV.5.25) \quad s_m(t) = V_0 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f_m)t + \varphi] \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

in cui le quantità:

$$(IV.5.26) \quad \Delta f_m = [2m - (M + 1)]\Delta f \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

rappresentano i valori della deviazione di frequenza associati ai segnali  $s_m(t)$ . Se si riferiscono le forme di segnalazione, definite dalle (IV.5.25), al sistema di funzioni ortonormali (se è  $T\Delta f = k$ )

$$(IV.5.27) \quad u_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f_m)t + \varphi] \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

risulta:

$$(IV.5.28) \quad s_m = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \mathbf{u}_m$$

Se i simboli sono equiprobabili, è presa una decisione a favore della segnalazione  $s_j$  se, detto  $\mathbf{r}_N$  il vettore ricevuto, risulta:

$$(IV.5.29) \quad d(\mathbf{r}_N, s_j) = \min_i \{d(\mathbf{r}_N, s_i)\}$$

Poiché è:

$$(IV.5.30) \quad d^2(\mathbf{r}_N, s_j) = \|\mathbf{r}_N\|^2 - 2(\mathbf{r}_N, s_j) + \|s_j\|^2$$

con

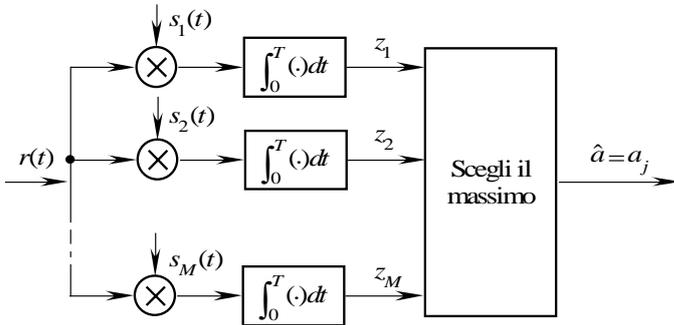
$$(IV.5.31) \quad \|s_i\|^2 = V_0^2 \frac{T}{2}$$

indipendente da  $i$ , la condizione (IV.5.29) si traduce nella:

$$(IV.5.32) \quad (\mathbf{r}_N, \mathbf{s}_j) = \max_i \{(\mathbf{r}_N, \mathbf{s}_i)\}$$

la quale, ricordando che è:

$$(IV.5.33) \quad z_i \equiv (\mathbf{r}_N, \mathbf{s}_i) = \int_0^T r(t)s_i(t)dt$$



**Fig. IV.17** - Schema del ricevitore ottimo per segnalazioni  $M$  - FSK.

conduce allo schema del rivelatore riportato in Fig. IV.17.

Per valutare la probabilità di corretta decisione si consideri il caso in cui sia  $s_1$  la segnalazione trasmessa. Il vettore ricevuto vale quindi:

$$(IV.5.34) \quad \mathbf{r}_N = \mathbf{s}_1 + \mathbf{n}_N = V_0\sqrt{\frac{T}{2}}\mathbf{u}_1 + \mathbf{n}_N$$

Il ricevitore effettua la decisione sulla base delle variabili  $z_i$  definite dalle (IV.5.33), o equivalentemente sulle base delle variabili  $w_i$ , ad esse proporzionali, definite dalle:

$$(IV.5.35) \quad \begin{aligned} w_1 &= \int_0^T r(t)u_1(t)dt = V_0\sqrt{\frac{T}{2}} + v_1 \\ w_i &= \int_0^T r(t)u_i(t)dt = v_i \quad (i = 2, 3, \dots, M) \end{aligned}$$

dove le componenti del rumore  $v_i = (\mathbf{n}_N, \mathbf{u}_i)$  sono variabili aleatorie gaussiane, indipendenti a media nulla e varianza  $\frac{N_0}{2}$ . Di conseguenza le densità di probabilità del primo ordine associate alle  $w_i$  valgono:

$$(IV.5.36) \quad \begin{aligned} p_{w_1}(w_1) &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{1}{N_0}\left(w_1 - V_0\sqrt{\frac{T}{2}}\right)^2\right] \\ p_{w_i}(w_i) &= \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left[-\frac{1}{N_0}w_i^2\right] \quad (i = 2, \dots, M) \end{aligned}$$

Poiché la condizione (IV.5.32) è espressa dalla:

$$(IV.5.37) \quad w_2 < w_1, w_3 < w_1, \dots, w_M < w_1$$

la probabilità di corretta decisione vale:

$$(IV.5.38) \quad P_{c|a_1} = \Pr\{w_2 < w_1, w_3 < w_1, \dots, w_M < w_1\}$$

che si può porre nella forma:

$$(IV.5.39) \quad P_{c|a_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr\{w_2 < w_1, w_3 < w_1, \dots, w_M < w_1 | w_1\} p_{w_1}(w_1)dw_1$$

dove si è introdotta la probabilità dell'evento condizionato  $\{w_2 < w_1, w_3 < w_1, \dots, w_M < w_1 | w_1\}$ .

Poiché gli eventi  $\{w_i < w_1 | w_1\}$  sono indipendenti, la probabilità dell'evento condizionato, che compare nell'integrando della (IV.5.39), è data dal prodotto delle  $M-1$  probabilità marginali:

$$(IV.5.40) \quad \Pr\{w_i < w_1 | w_1\} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^{w_1} e^{-\frac{w_i^2}{N_0}} dw_i \quad (i = 2, 3, \dots, M)$$

Ponendo nella precedente:

$$(IV.5.41) \quad x = \frac{w_1}{\sqrt{N_0}} \quad y = \frac{w_i}{\sqrt{N_0}}$$

si ottiene:

$$(IV.5.42) \quad \Pr\{w_i < w_1 \mid w_1\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{w_1} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} - \int_x^{\infty} \right) e^{-y^2} dy = 1 - Q(\sqrt{2}x)$$

La probabilità di corretta decisione, essendo i simboli equiprobabili, vale:

$$(IV.5.43) \quad P_c = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - Q(\sqrt{2}x)]^{M-1} \exp\left\{-\left(x - \sqrt{\frac{V_0^2 T}{2N_0}}\right)^2\right\} dx$$

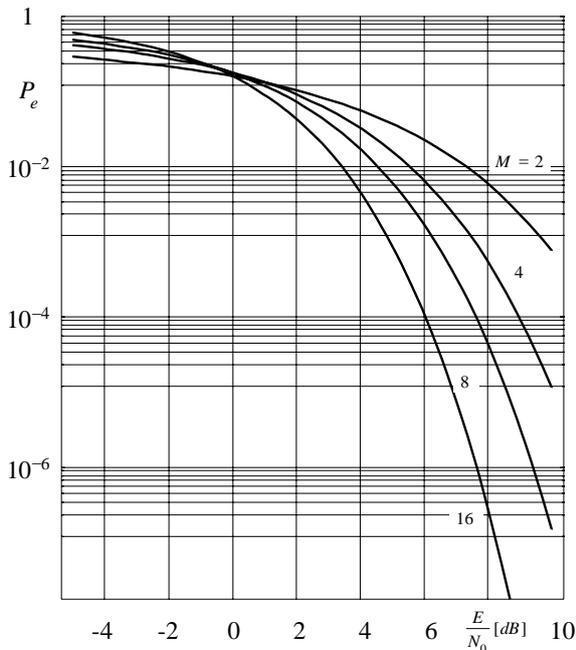
e quindi la probabilità di errore:

$$(IV.5.44) \quad P_e = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - Q(\sqrt{2}x)]^{M-1} \exp\left\{-\left(x - \sqrt{\frac{V_0^2 T}{2N_0}}\right)^2\right\} dx$$

Poiché in tale tipo di modulazione gli impulsi di segnalazione presentano la stessa energia che vale  $E = \frac{V_0^2 T}{2}$ , la probabilità di errore può essere riscritta nella forma:

$$(IV.5.45) \quad P_e = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - Q(\sqrt{2}x)]^{M-1} \exp\left\{-\left(x - \sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)^2\right\} dx$$

il cui andamento è riportato nel diagramma di Fig. IV.18 per alcuni valori del numero  $M$  dei livelli.



**Fig. IV.18** – probabilità di errore per segnalazioni  $M$ -FSK in funzione di  $E/N_0$ .

Se la segnalazione FSK  $M$ -aria è adoperata per la trasmissione di un flusso dati binario, ad ogni simbolo  $M$ -ario corrisponde una sequenza di  $m = \log_2 M$  simboli binari. Poiché nella modulazione FSK  $M$ -aria i simboli  $M$ -ari sono rappresentati da punti posizionati alla stessa distanza euclidea, se i simboli  $M$ -ari sono equiprobabili, commettere un errore sul simbolo trasmesso equivale a rivelare un qualsiasi altro simbolo adiacente; la probabilità che un simbolo, diverso da quello trasmesso, sia rivelato, vale  $P_e / (M - 1)$ .

Si supponga adesso che, per un dato errore sul simbolo trasmesso, ci siano  $k$  simboli binari errati; poiché ci sono  $\binom{n}{k}$  modi distinti con cui ciò si verifica, il numero medio di simboli binari errati per ogni simbolo  $M$ -ario errato è <sup>(1)</sup>:

(1) Dalla formula di Newton  $f(x) \equiv (1+x)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k$  discende  $\frac{df(x)}{dx} \equiv m(1+x)^{m-1} = \sum_{k=1}^m k \binom{m}{k} x^{k-1}$  che calcolata in  $x=1$  fornisce  $\sum_{k=1}^m k \binom{m}{k} = m \cdot 2^{m-1}$

$$(IV.5.46) \quad \sum_{k=1}^m k \binom{m}{k} \frac{P_e}{M-1} = \frac{2^{m-1}}{M-1} m P_e$$

cosicché, essendo i simboli  $M$ -ari equiprobabili, la probabilità di errore per bit si ottiene dividendo per  $m$  la precedente. Si ha così:

$$(IV.5.47) \quad P_b = \frac{M}{2(m-1)} P_e$$

### IV.6 - Sistemi di modulazione QAM.

La struttura del ricevitore si presenta come è mostrato in Fig. IV.19. All'uscita degli integratori si ottengono le componenti  $\rho_0$  e  $\rho_1$  secondo le direzioni individuate dai vettori  $u_1$  e  $u_2$  rispettivamente e, se i simboli sono equiprobabili, è presa una decisione sul simbolo trasmesso secondo la regola

$$(IV.6.1) \quad d(r_2, s_j) = \min_i \{d(r_2, s_i)\} \quad (i \neq j)$$

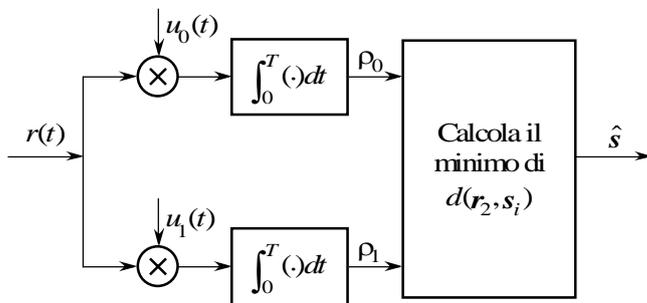


Fig. IV.19 - Struttura del ricevitore QAM

Poiché le componenti in fase e in quadratura del segnale QAM ricevuto sono indipendenti, è immediato rendersi conto che la probabilità di corretta decisione per simbolo può essere espressa dalla:

$$(IV.6.2) \quad P_c = (1 - p_f)(1 - p_q)$$

dove  $p_f$  e  $p_q$  rappresentano le probabilità di errore dei segnali che costituiscono le componenti in fase e in quadratura.

Limitandoci a considerare solo segnalazioni QAM la cui costellazione è costituita da un graticcio quadrato, si ha tenendo conto della (IV.5.8):

$$(IV.6.3) \quad p_f = 2 \frac{M-1}{M} Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right) \quad p_q = 2 \frac{M-1}{M} Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right)$$

per cui la probabilità di errore è:

$$(IV.6.4) \quad P_e = 1 - P_c = p_f + p_q - p_f p_q = 4 \frac{M-1}{M} Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right) - 4 \left( \frac{M-1}{M} \right)^2 Q^2 \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right)$$

che per elevati valori del rapporto  $\frac{V_0^2 T}{N_0}$  può essere approssimata dalla:

$$(IV.6.5) \quad P_e = 4 \frac{M-1}{M} Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right)$$

Se i simboli sono equiprobabili, l'energia media associata alle forme di segnalazione è:

$$(IV.6.6) \quad E = \frac{V_0^2 T}{2} \frac{1}{M} \left[ \sum_{n=1}^M a_n^2 + \sum_{m=1}^M b_m^2 \right] = V_0^2 T \frac{M^2 - 1}{3}$$

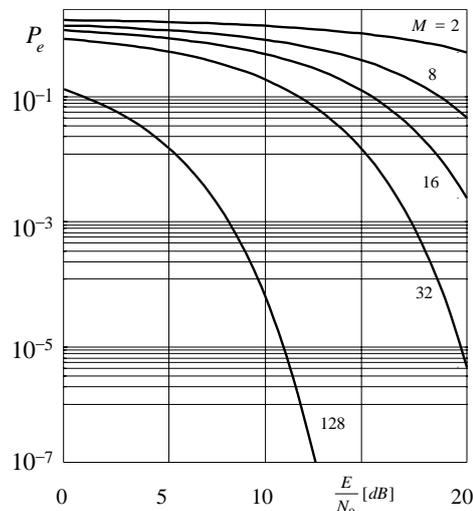


Fig. IV.20 - Probabilità di errore per simbolo in funzione di  $E/N_0$  per modulazione QAM.

che sostituita nella (IV.6.5) fornisce:

$$(IV.6.7) \quad P_e = 4 \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{3}{M^2-1} \frac{E}{N_0}} \right)$$

per cui la probabilità di errore in funzione dell'energia media per simbolo (v. Fig. IV.20).

### IV.7 - Limiti della probabilità di errore per simbolo.

Non sempre è possibile ottenere espressioni in forma chiusa della probabilità di errore per simbolo  $P_e$ ; in questi casi può essere molto utile dedurre dei limiti superiore ed inferiore.

#### IV.7.1 - Limite superiore

Un limite superiore può essere dedotto osservando che se si trasmette il segnale  $s_j$  si verifica un errore tutte le volte che esiste una segnalazione  $s_i$  con  $i \neq j$  tale che il segnale ricevuto  $r_N$  dista da  $s_i$  meno di quanto esso dista da  $s_j$ . Se pertanto  $E_{ij}$  denota l'evento:

$$(IV.7.1) \quad E_{ij} = \{r_N : d(r_N, s_i) < d(r_N, s_j) | s_j\}$$

la probabilità di errore è espressa dalla:

$$(IV.7.2) \quad P(e | s_j) = \Pr \left\{ \bigcup_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^M E_{ij} \right\}$$

Osservando che la probabilità dell'unione di  $M-1$  eventi è superiormente limitata dalla somma delle probabilità associate ai singoli eventi, dalla (IV.7.2) si deduce:

$$(IV.7.3) \quad P(e | s_j) \leq \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^M \Pr \{E_{ij}\}$$

La probabilità di errore incondizionata è allora limitata dalla:

$$(IV.7.4) \quad P_e \leq \sum_{j=1}^M P_j \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^M \Pr \{E_{ij}\}$$

essendo  $P_j$  la probabilità associata alla segnalazione  $s_j$ .

Se i simboli sono equiprobabili la precedente si riduce alla:

$$(IV.7.5) \quad P_e \leq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^M \Pr \{E_{ij}\}$$

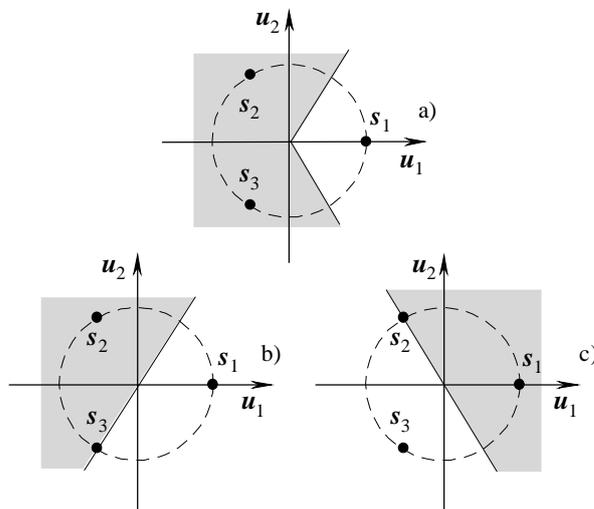


Fig. IV.21- Limite superiore per la probabilità di errore per simbolo.

La (IV.7.3) è illustrata in Fig. IV.21 nel caso di segnalazione ternaria. Supponendo di inviare la segnalazione  $s_1$  la probabilità di errore  $P(e | s_1)$  è uguale alla probabilità che il vettore ricevuto  $r_2$  appartenga alla regione ombreggiata di Fig. IV.20 a), mentre le probabilità associate agli eventi  $E_1$  e  $E_2$  sono date dalle probabilità che  $r_2$  sia

contenuto nelle regioni ombreggiate di Fig. IV.21 b) e c) rispettivamente.

D'altra parte è facile rendersi conto che la probabilità  $\Pr\{\mathbf{E}_{ij}\}$  che compare nella (IV.7.5) rappresenta la probabilità di errore di un sistema di trasmissione che usa le segnalazioni  $s_i$  e  $s_j$  per trasmettere due messaggi equiprobabili. Essa vale:

$$(IV.7.6) \quad \Pr\{\mathbf{E}_{ij}\} = Q\left(\sqrt{\frac{D_{ij}^2}{2N_0}}\right)$$

essendo  $D_{ij}$  la distanza euclidea fra  $s_i$  e  $s_j$ .

Sostituendo tale espressione nella (IV.7.5) si ha:

$$(IV.7.7) \quad P_e \leq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^M Q\left(\sqrt{\frac{D_{ij}^2}{2N_0}}\right)$$

Un'ulteriore semplificazione della (IV.7.7) può essere ottenuta se si considera che la funzione complementare di errore diminuisce al crescere del suo argomento. Questo comporta che, se si denota con  $D_j$  il minimo fra le  $D_{ij}$ :

$$(IV.7.8) \quad D_j = \min_i D_{ij} \quad (i \neq j)$$

la quantità  $Q\left(\sqrt{\frac{D_{ij}^2}{2N_0}}\right)$  può ritenersi trascurabile rispetto a  $Q\left(\sqrt{\frac{D_j^2}{2N_0}}\right)$  per cui si ottiene facilmente:

$$(IV.7.9) \quad P_e \leq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M N_j Q\left(\sqrt{\frac{D_j^2}{2N_0}}\right)$$

dove con  $N_j$  si è denotato il numero di segnalazioni che distano  $D_j$  da  $s_j$ .

#### IV.7.2 - Limite inferiore.

Per dedurre un limite inferiore alla probabilità di errore per simbolo basta osservare che se si trasmette il simbolo  $s_j$  si commette errore quando il segnale ricevuto  $r_N$  è più vicino a  $s_i$  (con  $i \neq j$ ) che da  $s_j$ . Pertanto se si denota con  $\bar{\mathbf{E}}_j$  quello fra gli eventi  $\mathbf{E}_{ij}$  che corrisponde a uno dei punti della costellazione più vicini a  $s_j$ , discende:

$$(IV.7.10) \quad \bar{\mathbf{E}}_j \subset \bigcup_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^M \mathbf{E}_{ij}$$

Ne consegue:

$$(IV.7.11) \quad P(e | s_j) \geq \Pr\{\bar{\mathbf{E}}_j\}$$

e quindi la probabilità incondizionata diventa:

$$(IV.7.12) \quad P_e \geq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \Pr\{\bar{\mathbf{E}}_j\}$$

Anche in questo caso è facile rendersi conto che la probabilità  $\Pr\{\bar{\mathbf{E}}_j\}$  che compare nella (IV.7.12) rappresenta la probabilità che il segnale ricevuto quando è trasmesso il simbolo  $s_j$  si trova più vicino a quel simbolo che presenta da  $s_j$  la minima distanza. Essa, ricordando la definizione (IV.7.8) è data dalla:

$$(IV.7.13) \quad \Pr\{\bar{\mathbf{E}}_j\} = Q\left(\sqrt{\frac{D_j^2}{2N_0}}\right)$$

Si ha allora:

$$(IV.7.14) \quad P_e \geq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M Q \left( \sqrt{\frac{D_j^2}{2N_0}} \right)$$

### IV.8.3 - Modulazione PSK $M$ -aria.

Nel caso di modulazione PSK  $M$ -aria, dalla (IV.7.9), tenendo presente che è (IV. Fig. IV.22)

$$(IV.7.15) \quad D_j = 2V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

e

$$(IV.7.16) \quad N_j = 2$$

Risulta:

$$(IV.7.17) \quad P_e \leq 2Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} \right)$$

D'altra parte per (IV.7.14) si ha:

$$(IV.7.18) \quad P_e \geq Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} \right)$$

e di conseguenza:

$$(IV.7.19) \quad Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} \right) \leq P_e \leq 2Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} \right)$$

Poiché  $E = \frac{V_0^2 T}{2}$  è l'energia media delle forme di segnalazione, la precedente diviene:

$$(IV.7.20) \quad Q \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} \right) \leq P_e \leq 2Q \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0} \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} \right)$$

### IV.7.1 - Modulazione FSK $M$ -aria.

Nel caso di modulazione FSK  $M$ -aria, con segnalazioni ortogonali le distanze  $D_j$  sono tutte eguali e pari a  $\sqrt{2}V_0\sqrt{\frac{T}{2}}$ . Inoltre è  $N_j = M - 1$  indipendente da  $j$ , per cui la (IV.8.9) diviene:

$$(IV.7.21) \quad P_e \leq (M - 1) \cdot Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{2N_0}} \right)$$

D'altra parte dalla (IV.7.14) discende:

$$(IV.7.22) \quad P_e \geq Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{2N_0}} \right)$$

e quindi vale la seguente limitazione:

$$(IV.7.23) \quad Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{2N_0}} \right) \leq P_e \leq (M - 1) \cdot Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{2N_0}} \right)$$

Poiché  $E = \frac{V_0^2 T}{2}$  è l'energia media delle forme di segnalazione, la precedente diviene:

$$(IV.7.24) \quad Q \left( \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \leq P_e \leq (M - 1) \cdot Q \left( \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right)$$

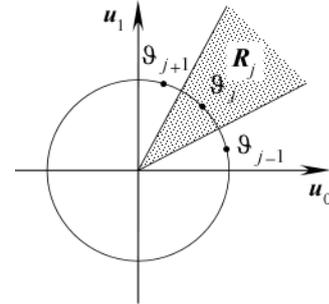


Fig. IV. 22- Modulazione PSK