

Capitolo V

LA RIVELAZIONE NON COERENTE

Molto frequentemente è difficile disporre al ricevitore di un riferimento coerente con la portante associata al segnale modulato; per questo motivo si sono sviluppati degli schemi di rivelazione che prescindono dalla conoscenza della fase della portante. Tale tipo di rivelazione va sotto il nome di rivelazione non coerente.

In questo capitolo sono studiati gli schemi di rivelazione non coerente con esplicito riferimento al caso binario.

V.1 - Modulazione OOK.

V.1.1 - Struttura del ricevitore.

Il segnale ricevuto, nel generico intervallo di simbolo, assume la forma:

$$(V.1.1) \quad r(t) = V_0 a_n \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + n(t) \quad nT \leq t < (n+1)T$$

in cui

- $a_n \in \{0,1\}$ è il corrispondente simbolo binario,
- φ denota la fase associata al segnale in ingresso, che, in quel che segue, si suppone una variabile aleatoria, uniformemente distribuita in $[0, 2\pi)$ ed indipendente dal simbolo a_n e dal rumore $n(t)$,
- $n(t)$ è il rumore che si suppone gaussiano, a media nulla e bianco, con densità spettrale $\frac{N_0}{2}$.

Come nella rivelazione coerente, si consideri la proiezione ortogonale di $r(t)$ nel sottospazio a due dimensioni S_2 individuato dalle seguenti funzioni di base:

$$(V.1.2) \quad \begin{aligned} u_0(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t) \\ u_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

che, se è $f_0 T \gg 1$, costituiscono, com'è noto, un insieme di funzioni ortonormali.

Dette ρ_0 e ρ_1 le componenti di $r(t)$ lungo le direzioni individuate dai segnali $u_0(t)$ e $u_1(t)$ rispettivamente, valgono:

$$(V.1.3) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= \int_0^T r(t) u_0(t) dt = V_0 a_n \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi + v_0 \\ \rho_1 &= \int_0^T r(t) u_1(t) dt = -V_0 a_n \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi + v_1 \end{aligned}$$

dove v_0 e v_1 , definite dalle:

$$(V.1.4) \quad \begin{aligned} v_0 &= \int_0^T n(t) u_0(t) dt \\ v_1 &= \int_0^T n(t) u_1(t) dt \end{aligned}$$

sono due variabili aleatorie gaussiane, a media nulla, incorrelate aventi ciascuna media nulla e varianza $\frac{N_0}{2}$. La loro densità di probabilità congiunta è:

$$(V.1.5) \quad p(v_0, v_1) = \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{v_0^2 + v_1^2}{N_0} \right\}$$

Per determinare la struttura del ricevitore occorre riferirsi alla regola di decisione; questa è espressa in termini delle densità di probabilità condizionate $p(\mathbf{r}_2|a_n = 0) \equiv p(\mathbf{r}_2|0)$ e $p(\mathbf{r}_2|a_n = 1) \equiv p(\mathbf{r}_2|1)$ dove \mathbf{r}_2 denota il vettore di componenti ρ_0 e ρ_1 .

Per un assegnato valore della fase φ le densità di probabilità condizionate $p(\mathbf{r}_2|0, \varphi)$ e $p(\mathbf{r}_2|1, \varphi)$, essendo in base alle (V.1.3):

$$(V.1.6) \quad a_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho_0 = v_0 \\ \rho_1 = v_1 \end{cases} \quad a_n = 1 \Rightarrow \begin{cases} \rho_0 = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi + v_0 \\ \rho_1 = -V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi + v_1 \end{cases}$$

valgono

$$(V.1.7) \quad p(\mathbf{r}_2|0, \varphi) = \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} (\rho_0^2 + \rho_1^2) \right\}$$

$$p(\mathbf{r}_2|1, \varphi) = \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \left[\left(\rho_0 - V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi \right)^2 + \left(\rho_1 + V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi \right)^2 \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \left(\rho_0^2 + \rho_1^2 + \frac{V_0^2 T}{2} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{2V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} (\rho_0 \cos \varphi - \rho_1 \sin \varphi) \right\}$$

Le densità di probabilità incondizionate $p(\mathbf{r}_2|0)$ e $p(\mathbf{r}_2|1)$ si ottengono dalle precedenti mediando rispetto a φ . Si ha:

$$(V.1.8) \quad p(\mathbf{r}_2|0) = \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} (\rho_0^2 + \rho_1^2) \right\}$$

$$p(\mathbf{r}_2|1) = \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \left(\rho_0^2 + \rho_1^2 + \frac{V_0^2 T}{2} \right) \right\} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} (\rho_0 \cos \varphi - \rho_1 \sin \varphi) \right\} d\varphi$$

Introducendo la seguente trasformazione di variabili:

$$(V.1.9) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= \rho \cos \varphi_0 \\ \rho_1 &= \rho \sin \varphi_0 \end{aligned}$$

l'integrale che compare nella seconda delle (V.1.8) diviene:

$$(V.1.10) \quad J = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2V_0}{N_0} \rho \sqrt{\frac{T}{2}} (\cos \varphi \cos \varphi_0 - \sin \varphi \sin \varphi_0) \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2V_0}{N_0} \rho \sqrt{\frac{T}{2}} \cos(\varphi + \varphi_0) \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{2\pi + \varphi_0} \exp \left\{ \frac{2V_0}{N_0} \rho \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \vartheta \right\} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2V_0}{N_0} \rho \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \vartheta \right\} d\vartheta$$

dove si è posto $\vartheta = \varphi + \varphi_0$ e si è tenuto conto che la funzione integranda è una funzione di ϑ periodica di periodo 2π . Ricordando infine la definizione della funzione di Bessel modificata di prima specie e di ordine zero:

$$(V.1.11) \quad I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\pm x \cos \vartheta} d\vartheta$$

si ottiene:

$$(V.1.12) \quad p(\mathbf{r}_2|0) = \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{\rho_0^2 + \rho_1^2}{N_0} \right\}$$

$$p(\mathbf{r}_2|1) = \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \left(\rho_0^2 + \rho_1^2 + \frac{V_0^2 T}{2} \right) \right\} I_0 \left(\frac{2V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2} \right)$$

Procedendo come nel caso della rivelazione coerente, la regola di decisione, supponendo i dati equiprobabili, è espressa dalla:

$$(V.1.13) \quad \begin{aligned} p(r_2 | 0) > p(r_2 | 1) &\Rightarrow \hat{a}_n = 0 \\ p(r_2 | 0) < p(r_2 | 1) &\Rightarrow \hat{a}_n = 1 \end{aligned}$$

che, conto delle (V.1.12), diviene:

$$(V.1.14) \quad \begin{aligned} \frac{V_0^2 T}{2N_0} > \log \left[I_0 \left(\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} \frac{2V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \right) \right] &\Rightarrow \hat{a}_n = 0 \\ \frac{V_0^2 T}{2N_0} < \log \left[I_0 \left(\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2} \frac{2V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \right) \right] &\Rightarrow \hat{a}_n = 1 \end{aligned}$$

Tenendo presente che la funzione di Bessel modificata è una funzione crescente del suo argomento, le precedenti sono equivalenti alle:

$$(V.1.15) \quad \begin{aligned} \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2} < \lambda &\Rightarrow \hat{a}_n = 0 \\ \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2} > \lambda &\Rightarrow \hat{a}_n = 1 \end{aligned}$$

essendo λ un'opportuna costante.

La (V.1.15) consente di dedurre lo schema del ricevitore non coerente che si presenta pertanto come è mostrato in Fig. V.1.

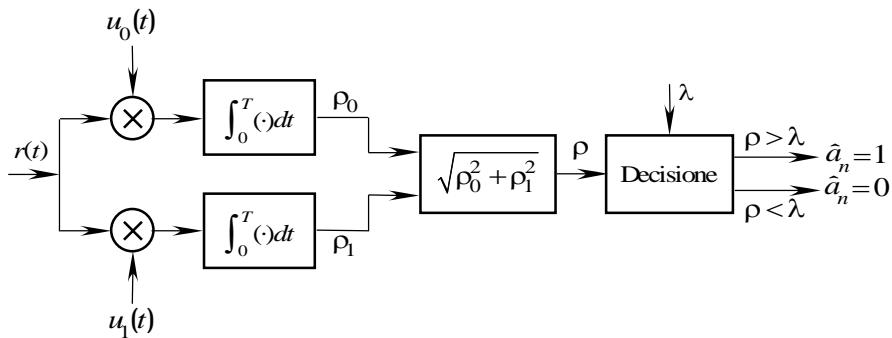


Fig. V.1 - Schema di un ricevitore per modulazione OOK non coerente.

V.1.2 - Probabilità di errore.

La regola di decisione (V.1.15) individua nel sottospazio S_2 le due regioni di decisione D_0 e D_1 riportate nella Fig. V.2. Il ricevitore decide a favore di $\hat{a}_n = 0$ se il segnale ricevuto è contenuto nel cerchio di raggio λ ; in caso contrario, decide a favore del simbolo $\hat{a}_n = 1$.

Supposto i dati equiprobabili, la probabilità di errore è:

$$(V.1.16) \quad P_e(\lambda) = \frac{1}{2} \Pr \{r_2 \in D_1 | a_n = 0\} + \frac{1}{2} \Pr \{r_2 \in D_0 | a_n = 1\}$$

La probabilità $\Pr \{r_2 \in D_1 | a_n = 0\}$ è:

$$(V.1.17) \quad \Pr \{r_2 \in D_1 | a_n = 0\} = \frac{1}{\pi N_0} \int_{D_1} \exp \left\{ -\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{N_0} \right\} d\rho_0 d\rho_1$$

che reintroducendo la trasformazione (V.1.9) diventa:

$$(V.1.18) \quad \Pr \{r_2 \in D_1 | a_n = 0\} = \frac{1}{\pi N_0} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_{\lambda}^{\infty} \rho \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{N_0} \right\} d\rho = e^{-\frac{\lambda^2}{N_0}}$$

In modo analogo la probabilità $\Pr \{r_2 \in D_0 | a_n = 1\}$ vale:

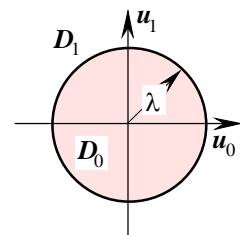


Fig. V.2 - Regioni di decisione per modulazione OOK non coerente.

$$(V.1.19) \quad \Pr\{r_2 \in \mathbf{D}_0 | a_n = 1\} = \frac{1}{\pi N_0} \int_{\mathbf{D}_0} \exp\left(-\frac{\rho_0^2 + \rho_1^2 + \frac{v_0^2 T}{2}}{N_0}\right) I_0\left(\frac{2V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2}\right) d\rho_0 d\rho_1$$

che, utilizzando la trasformazione (V.1.9) diventa:

$$(V.1.20) \quad \Pr\{r_2 \in \mathbf{D}_0 | a_n = 1\} = \frac{2}{N_0} \int_0^\lambda \rho e^{-\frac{1}{N_0}\left(\rho^2 + \frac{v_0^2 T}{2}\right)} I_0\left(\frac{2V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \rho\right) d\rho$$

La probabilità di errore diventa:

$$(V.1.21) \quad P_e(\lambda) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda^2}{N_0}} + \frac{1}{N_0} \int_0^\lambda \rho e^{-\frac{1}{N_0}\left(\rho^2 + \frac{v_0^2 T}{2}\right)} I_0\left(\frac{2V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \rho\right) d\rho$$

Al fine di semplificare il calcolo della probabilità di errore basta osservare che, sotto l'ipotesi di $a_n = 1$, la grandezza ρ , come si desume dalla seconda delle (V.1.6), vale:

$$(V.1.22) \quad \rho = \left\{ \left(V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi + v_0 \right)^2 + \left(-V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi + v_1 \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \left\{ 1 + \frac{v_0^2 + v_1^2}{V_0^2 \frac{T}{2}} + 2 \left(\frac{v_0}{V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}} \cos \varphi - \frac{v_1}{V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}} \sin \varphi \right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Se il rapporto segnale rumore:

$$(V.1.23) \quad \gamma = \frac{V_0^2 T}{2N_0}$$

definito come rapporto fra l'energia media della costellazione $E = \frac{1}{2} \frac{V_0^2 T}{2}$ e la densità spettrale del rumore $\frac{N_0}{2}$, è sufficientemente elevato, è facile dedurre che la probabilità che si verifichino gli eventi:

$$\left| \frac{v_0}{V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}} \ll 1 \right| \quad \left| \frac{v_1}{V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}} \ll 1 \right|$$

sia molto prossima ad uno, cosicché la (V.1.22) si può semplificare come segue:

$$(V.1.24) \quad \rho \cong V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \left\{ 1 + \frac{v_0}{V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}} \cos \varphi - \frac{v_1}{V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}} \sin \varphi \right\} = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} + v_0 \cos \varphi - v_1 \sin \varphi$$

La quantità ρ , per un dato valore di φ , si riduce ad una variabile aleatoria gaussiana a media $V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}$ e varianza:

$$(V.1.25) \quad \sigma_\rho^2 = E\left\{ (v_0 \cos \varphi - v_1 \sin \varphi)^2 \right\} = E\left\{ v_0^2 \right\} \cos^2 \varphi + E\left\{ v_1^2 \right\} \sin^2 \varphi = \frac{N_0}{2}$$

Si può allora scrivere:

$$(V.1.26) \quad p(\rho|1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left\{ -\frac{1}{N_0} \left(\rho - V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \right)^2 \right\}$$

In tali condizioni si ha:

$$(V.1.27) \quad P_e(\lambda) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda^2}{N_0}} + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left\{ -\frac{1}{N_0} \left(\rho - V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \right)^2 \right\} d\rho$$

La probabilità di errore dipende da λ . Il valore ottimo di λ si determina imponendo la condizione $\left. \frac{\partial P_e}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = 0$. Esso si ottiene dalla risoluzione della seguente equazione trascendente:

$$(V.1.28) \quad 2\lambda_0 \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} = \frac{V_0^2 T}{2N_0} + \ln \left(2\lambda_0 \sqrt{\frac{\pi}{N_0}} \right)$$

Se $\gamma = \frac{V_0^2 T}{2N_0}$ è sufficientemente elevato, la precedente si può approssimare con la $2\lambda_0 \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \approx \frac{V_0^2 T}{2N_0}$ che conduce alla soluzione:

$$(V.1.29) \quad \lambda_0 = \frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{T}{2}}$$

In tali condizioni la probabilità di errore vale:

$$(V.1.30) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{T}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{1}{N_0} \left(\rho - V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \right)^2} d\rho$$

D'altra parte, avendosi:

$$(V.1.31) \quad \begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{T}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{1}{N_0} \left(\rho - V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \right)^2} d\rho = \int_{-V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}}^{\frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{T}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{1}{N_0} x^2} dx = \\ &= \int_{\frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{T}{2}}}^{\frac{V_0}{2} \sqrt{\frac{T}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{1}{N_0} x^2} dx = Q\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\right) - Q(\sqrt{\gamma}) \end{aligned}$$

si ha:

$$(V.1.32) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma}{4}} + \frac{1}{2} \left[Q\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\right) - Q(\sqrt{\gamma}) \right]$$

Utilizzando la seguente espansione asintotica della funzione Q :

$$(V.1.33) \quad Q(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\rightarrow} \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{e^{-x^2/2}}{x}$$

si ha:

$$(V.1.34) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma}{4}} + \frac{1}{4\sqrt{2\gamma}} \left[2e^{-\gamma/8} - e^{-\gamma/2} \right]$$

che, per elevati valori di γ , diventa:

$$(V.1.35) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma}{4}}$$

VI.2 - Modulazione FSK.

VI.2.1 - Struttura del ricevitore.

Nel generico intervallo di simbolo, il segnale ricevuto è dato dalla:

$$(V.2.1) \quad r(t) = V_0 \cos[2\pi(f_0 + a_n \Delta f)t + \varphi] + n(t) \quad nT \leq t < (n+1)T$$

in cui $a_n \in \{-1, 1\}$ rappresenta il simbolo trasmesso e φ è, come prima, una variabile aleatoria uniformemente distribuita in $[0, 2\pi)$, statisticamente indipendente dai dati e dal rumore $n(t)$. Il rumore infine si suppone gaussiano a media nulla e bianco (con densità spettrale pari a $\frac{N_0}{2}$).

Si consideri la proiezione ortogonale di $r(t)$ nel sottospazio a quattro dimensioni S_4 definito dalle seguenti funzioni di base definite nell'intervallo $[0, T]$:

$$(V.2.2) \quad \begin{aligned} u_0(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos[2\pi(f_0 - \Delta f)t] & u_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin[2\pi(f_0 - \Delta f)t] \\ u_2(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t] & u_3(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin[2\pi(f_0 + \Delta f)t] \end{aligned}$$

che, se è $f_0 T \gg 1$ e $T\Delta f = \text{intero}$, costituiscono, com'è noto, un insieme di funzioni ortonormali.

La proiezione ortogonale r_4 di $r(t)$ su S_4 sarà pertanto individuata da un vettore r_4 le cui componenti secondo le direzioni dei versori u_0, u_1, u_2, u_3 sono date dalle:

$$(V.2.3) \quad a_n = -1 \Rightarrow \begin{cases} \rho_0 = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi + v_0 \\ \rho_1 = -V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi + v_1 \\ \rho_2 = v_2 \\ \rho_3 = v_3 \end{cases} \quad a_n = 1 \Rightarrow \begin{cases} \rho_0 = v_0 \\ \rho_1 = v_1 \\ \rho_2 = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi + v_2 \\ \rho_3 = -V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi + v_3 \end{cases}$$

essendo v_0, v_1, v_2, v_3 le corrispondenti componenti del vettore n_4 (proiezione ortogonale di $n(t)$ su S_4). Tali componenti sono gaussiane, incorrelate, tutte a media nulla e aventi una stessa varianza data da $\frac{N_0}{2}$. La loro densità di probabilità congiunta vale:

$$(V.2.4) \quad p(v_0, v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{(\pi N_0)^2} e^{-\frac{1}{N_0}(v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}$$

La densità di probabilità condizionata $p(r_4 | \varphi, -1)$ è data dalla:

$$(V.2.5) \quad \begin{aligned} p(r_4 | \varphi, -1) &= \frac{1}{(\pi N_0)^2} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \left[\left(\rho_0 - V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi \right)^2 + \left(\rho_1 + V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi \right)^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{(\pi N_0)^2} \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \left(\rho_0^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \frac{V_0^2 T}{2} \right) \right\} \cdot \exp \left\{ 2 \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} (\rho_0 \cos \varphi - \rho_1 \sin \varphi) \right\} \end{aligned}$$

che mediata rispetto a φ , usando le stesse procedure incontrate a proposito della modulazione OOK, diviene:

$$(V.2.6) \quad p(r_4 | -1) = \frac{1}{(\pi N_0)^2} e^{-\frac{1}{N_0}(\|r_4\|^2 + V_0^2 \frac{T}{2})} I_0 \left(2 \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \rho_a \right)$$

essendo:

$$(V.2.7) \quad \rho_a = \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2}$$

In modo analogo si ottiene:

$$(V.2.8) \quad p(r_4 | 1) = \frac{1}{(\pi N_0)^2} e^{-\frac{1}{N_0}(\|r_4\|^2 + V_0^2 \frac{T}{2})} I_0 \left(2 \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \rho_b \right)$$

dove è:

$$(V.2.9) \quad \rho_b = \sqrt{\rho_2^2 + \rho_3^2}$$

Supposto i simboli equiprobabili la regola di decisione pertanto diviene:

$$(V.2.10) \quad \begin{aligned} p(r_4 | -1) > p(r_4 | 1) &\Rightarrow \hat{a}_n = -1 \\ p(r_4 | -1) < p(r_4 | 1) &\Rightarrow \hat{a}_n = 1 \end{aligned}$$

ovvero, ricordando le (V.2.6) e (V.2.8) diviene:

$$(V.2.11) \quad I_0\left(2\frac{V_0}{N_0}\sqrt{\frac{T}{2}}\rho_a\right) > I_0\left(2\frac{V_0}{N_0}\sqrt{\frac{T}{2}}\rho_b\right) \Rightarrow \hat{a}_n = -1$$

$$I_0\left(2\frac{V_0}{N_0}\sqrt{\frac{T}{2}}\rho_a\right) < I_0\left(2\frac{V_0}{N_0}\sqrt{\frac{T}{2}}\rho_b\right) \Rightarrow \hat{a}_n = 1$$

Poiché la funzione $I_0(x)$ è una funzione crescente del suo argomento, è immediato riconoscere che la (VI.3.9) equivale alla:

$$(V.2.12) \quad \rho_a > \rho_b \Rightarrow \hat{a}_n = -1$$

$$\rho_a < \rho_b \Rightarrow \hat{a}_n = 1$$

che definisce la struttura del ricevitore così come è indicato in Fig. V.3.

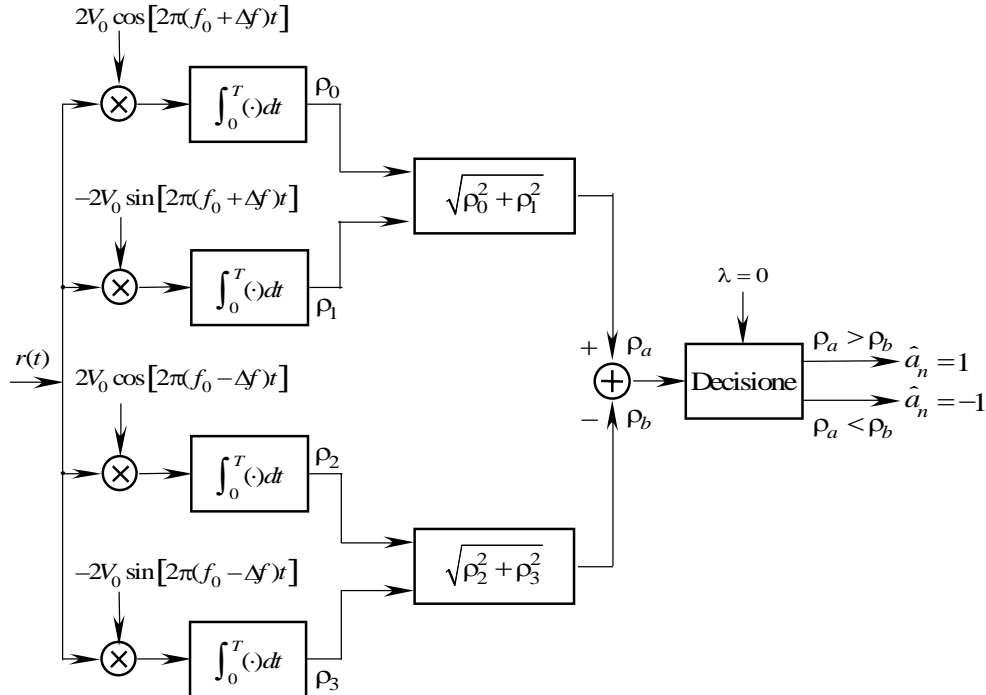


Fig. V.3 - Struttura del ricevitore per modulazione FSK non coerente.

Si osservi che, nel caso in questione, il ricevitore decide a favore del dato $\hat{a}_n = -1$ o $\hat{a}_n = 1$ a seconda dei valori della quantità $w = \rho_a - \rho_b$ che pertanto costituisce la variabile di decisione.

V.2.2. - Probabilità di errore.

Se è trasmesso il simbolo $a_n = -1$, si commette errore quando è $\rho_a < \rho_b$. La probabilità di un tale evento può essere facilmente calcolata come segue (v. Fig. V.4)

$$(V.2.13) \quad \Pr(\rho_a < \rho_b | a_n = -1) = \int_0^\infty d\rho_a \int_{\rho_a}^\infty d\rho_b p(\rho_a, \rho_b | -1)$$

avendo denotato con $p(\rho_a, \rho_b)$ la densità di probabilità incrociata delle quantità ρ_a e ρ_b rispettivamente.

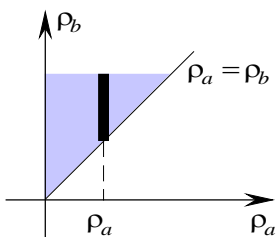


Fig. V.4 - Piano (ρ_a, ρ_b) .

È ovvio che, in virtù della struttura simmetrica del ricevitore, la probabilità di commettere un errore quando è trasmesso il simbolo $a_n = 1$ è la stessa della (V.2.13); di conseguenza, se i simboli sono equiprobabili, la probabilità di errore può calcolarsi mediante la

$$(V.2.14) \quad P_e = \int_0^\infty d\rho_a \int_{\rho_a}^\infty d\rho_b p(\rho_a, \rho_b | -1)$$

Poiché le componenti del rumore lungo le direzioni individuate dai vettori di base sono statisticamente indipendenti, anche tali sono le quantità ρ_a e ρ_b ; per cui si può scrivere:

$$(V.2.15) \quad p(\rho_a, \rho_b | -1) = p(\rho_a | -1)p(\rho_b | -1)$$

essendo $p(\rho_a | -1)$ e $p(\rho_b | -1)$ le densità di probabilità del primo ordine associate alle quantità ρ_a e ρ_b rispettivamente.

V.2.3. Calcolo di $p(\rho_a | -1)$.

Poiché ρ_a dipende da ρ_0 e ρ_1 per calcolare la $p(\rho_a | -1)$ è conveniente prima marginalizzare la (V.2.6) rispetto a ρ_2 e ρ_3 . Si ottiene:

$$(V.2.16) \quad p(\rho_0, \rho_1 | -1) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{1}{N_0}(\rho_0^2 + \rho_1^2 + V_0^2 \frac{T}{2})} I_0 \left(2 \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2} \right)$$

Introducendo la seguente trasformazione:

$$(V.2.17) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= \rho_a \cos \varphi_a \\ \rho_1 &= \rho_a \sin \varphi_a \end{aligned}$$

la (V.2.16) diviene:

$$(V.2.18) \quad p(\rho_a, \varphi_a | -1) = \frac{\rho_a}{\pi N_0} e^{-\frac{1}{N_0}(\rho_a^2 + V_0^2 \frac{T}{2})} I_0 \left(2 \rho_a \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \right)$$

che integrata rispetto a φ_a fornisce:

$$(V.2.19) \quad p(\rho_a | -1) = \frac{2\rho_a}{N_0} e^{-\frac{1}{N_0}(\rho_a^2 + V_0^2 \frac{T}{2})} I_0 \left(2 \rho_a \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \right)$$

V.2.4. Calcolo di $p(\rho_b | -1)$.

Poiché ρ_b dipende da ρ_2 e ρ_3 per il calcolo di $p(\rho_b | -1)$ si deve procedere innanzi tutto ad una marginalizzare della (V.2.6) rispetto a ρ_0 e ρ_1 . Si ottiene:

$$(V.2.20) \quad p(\rho_2, \rho_3 | -1) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{1}{N_0}(\rho_2^2 + \rho_3^2 + V_0^2 \frac{T}{2})} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{1}{N_0}(\rho_0^2 + \rho_1^2)} I_0 \left(2 \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2} \right) d\rho_0 d\rho_1$$

Per calcolare l'integrale che compare nella precedente basta introdurre la trasformazione:

$$(V.2.21) \quad \begin{aligned} \rho_2 &= \rho_b \cos \varphi_b \\ \rho_3 &= \rho_b \sin \varphi_b \end{aligned}$$

Si ha:

$$(V.2.22) \quad \begin{aligned} J &= \int_{\mathbf{R}^2} \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{1}{N_0}(\rho_0^2 + \rho_1^2)} I_0 \left(2 \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \sqrt{\rho_0^2 + \rho_1^2} \right) d\rho_0 d\rho_1 = \\ &= \frac{1}{\pi N_0} \int_0^{2\pi} d\varphi_b \int_0^\infty \rho_b e^{-\frac{\rho_b^2}{N_0}} I_0 \left(2 \rho_b \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \right) d\rho_b = \\ &= \frac{2}{N_0} \int_0^\infty \rho_b e^{-\frac{\rho_b^2}{N_0}} I_0 \left(2 \rho_b \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \right) d\rho_b \end{aligned}$$

che si può ulteriormente elaborare introducendo la posizione $\rho_b = x\sqrt{N_0/2}$. Si ha:

$$(V.2.23) \quad J = \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} I_0 \left(x \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right) dx = e^{-\frac{V_0^2 T}{2N_0}} \int_0^\infty x e^{-\frac{1}{2}(x^2 + \frac{V_0^2 T}{2N_0})} I_0 \left(x \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right) dx = e^{-\frac{V_0^2 T}{2N_0}}$$

perché l'integrando è una densità di probabilità di Rice con parametri $\sigma^2 = 1$ e $m = \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}}$.

Risulta pertanto:

$$(V.2.24) \quad p(\rho_2, \rho_3 | -1) = \frac{1}{\pi N_0} e^{-\frac{1}{N_0}(\rho_2^2 + \rho_3^2)}$$

e quindi:

$$(V.2.25) \quad p(\rho_b, \phi_b | -1) = \frac{\rho_b}{\pi N_0} e^{-\frac{\rho_b^2}{N_0}}$$

da cui:

$$(V.2.26) \quad p(\rho_b | -1) = \frac{2\rho_b}{N_0} e^{-\frac{\rho_b^2}{N_0}}$$

V.2.5. Calcolo di P_e .

Dalla (V.2.14), tenendo conto della (V.2.15) si ottiene:

$$(V.2.27) \quad \begin{aligned} P_e &= \int_0^\infty 2 \frac{\rho_a}{N_0} e^{-\frac{1}{N_0}(\rho_a^2 + V_0^2 \frac{T}{2})} I_0 \left(2\rho_a \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \right) \cdot \left[\int_{\rho_a}^\infty 2 \frac{\rho_b}{N_0} e^{-\frac{\rho_b^2}{N_0}} d\rho_b \right] d\rho_a = \\ &= \frac{2}{N_0} e^{-\frac{V_0^2 T}{2N_0}} \int_0^\infty \rho_a e^{-\frac{2\rho_a^2}{N_0}} I_0 \left(2 \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \rho_a \right) d\rho_a = \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{V_0^2 T}{4N_0}} \int_0^\infty \frac{\rho_a}{N_0/2} e^{-\frac{1}{N_0/2}(\rho_a^2 + \frac{V_0^2 T}{8N_0})} I_0 \left(2 \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} \rho_a \right) d\rho_a \end{aligned}$$

da cui:

$$(V.2.28) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{V_0^2 T}{4N_0}}$$

perché l'integrando è una densità di probabilità di Rice con parametri $\sigma^2 = \frac{N_0}{4}$ e $m = \frac{V_0}{2N_0} \sqrt{\frac{T}{2}}$.

Introducendo il rapporto segnale rumore:

$$(V.2.29) \quad \gamma = \frac{V_0^2 T}{N_0}$$

la probabilità di errore risulta espressa dalla:

$$(V.2.30) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{\gamma}{4}}$$

V.3. - Modulazione PSK differenziale.

Poiché nella modulazione PSK l'informazione è associata soltanto alla fase della portante non è possibile individuare alcuno schema di rivelazione non coerente. Tuttavia se la fase ϕ della portante varia molto lentamente nel tempo per modo che la si possa ritenere costante in un intervallo uguale almeno al doppio del periodo di segnalazione, si può pensare di rivelare la differenza fra le fasi associate al segnale modulato relative a due intervalli di segnalazione contigui senza che il ricevitore debba richiedere informazioni sulla fase associata alla portante. Un tale schema consentirebbe di rivelare le variazioni che intervengono nella successione dei dati e non i dati stessi a meno che non si proceda, in fase di modulazione, ad una codifica differenziale.

Ciò significa che, partendo arbitrariamente con il simbolo $a_0 = 1$, la codifica deve essere effettuata con la regola:

$$(V.3.1) \quad \begin{aligned} d_n = 1 &\Rightarrow a_n = a_{n-1} \\ d_n = 0 &\Rightarrow a_n \neq a_{n-1} \end{aligned}$$

Un tale tipo di modulazione prende il nome di **modulazione PSK differenziale** o **modulazione DPSK** (*Differential Phase Shift Keying*).

Un esempio di tale codifica è riportato nella Tabella V.I.

Tabella V.I

d_k	0	1	1	0	0	1	0
a_k	1*	0	0	0	1	0	0
Fase	π	0	0	0	π	0	0

* Simbolo di riferimento arbitrario.

All'ingresso del ricevitore il segnale modulato, nel generico intervallo di segnalazione $([nT, (n+1)T])$, è dato dalla

$$(V.3.2) \quad r(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t + \pi a_n + \varphi) + n(t)$$

dove, come prima, φ denota una variabile aleatoria uniformemente distribuita in $[0, 2\pi)$ ed indipendente sia dai dati emessi dalla sorgente che dal rumore $n(t)$.

Proiettando ortogonalmente $r(t)$ nel sottospazio S_2 a due dimensioni individuato dalle funzioni di base definite nell'intervallo $[0, T)$:

$$(V.3.3) \quad \begin{aligned} u_0(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t) \\ u_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

che, se $f_0 T \gg 1$, costituiscono un insieme di funzioni ortonormali, si ottiene il vettore:

$$(V.3.4) \quad \mathbf{r}_2 = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos(\pi a_n + \varphi) \mathbf{u}_0 - V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin(\pi a_n + \varphi) \mathbf{u}_1 + \mathbf{n}_2$$

le cui componenti valgono:

$$(V.3.5) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos(\pi a_n + \varphi) + v_0 \\ \rho_1 &= -V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin(\pi a_n + \varphi) + v_1 \end{aligned}$$

essendo v_0 e v_1 le componenti del rumore lungo le direzioni individuate dai versori \mathbf{u}_0 e \mathbf{u}_1 rispettivamente.

Nel precedente intervallo di segnalazione la proiezione ortogonale del segnale in ingresso nel sottospazio S_2 è individuata dal vettore \mathbf{r}'_2 le cui componenti valgono:

$$(V.3.6) \quad \begin{aligned} \rho'_0 &= V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos(\pi a_{n-1} + \varphi) + v'_0 \\ \rho'_1 &= -V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin(\pi a_{n-1} + \varphi) + v'_1 \end{aligned}$$

Poiché l'informazione trasmessa è affidata alla differenza $a_n - a_{n-1}$, il ricevitore deve effettuare una stima dell'angolo ϑ compreso fra \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}'_2 . Poiché è

$$(V.3.7) \quad \cos \vartheta = \frac{\langle \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_2 \rangle}{\|\mathbf{r}_2\| \cdot \|\mathbf{r}'_2\|}$$

il ricevitore decide a favore del dato $d_n = 0$ o $d_n = 1$ a seconda il segno di $\cos \vartheta$. Tenendo conto della (V.3.7), la regola di decisione diventa così:

$$(V.3.8) \quad \begin{aligned} \rho_0 \rho'_0 + \rho_1 \rho'_1 > 0 &\Rightarrow d_n = 0 \\ \rho_0 \rho'_0 + \rho_1 \rho'_1 < 0 &\Rightarrow d_n = 1 \end{aligned}$$

che dà luogo allo schema riportato in Fig. V.5.

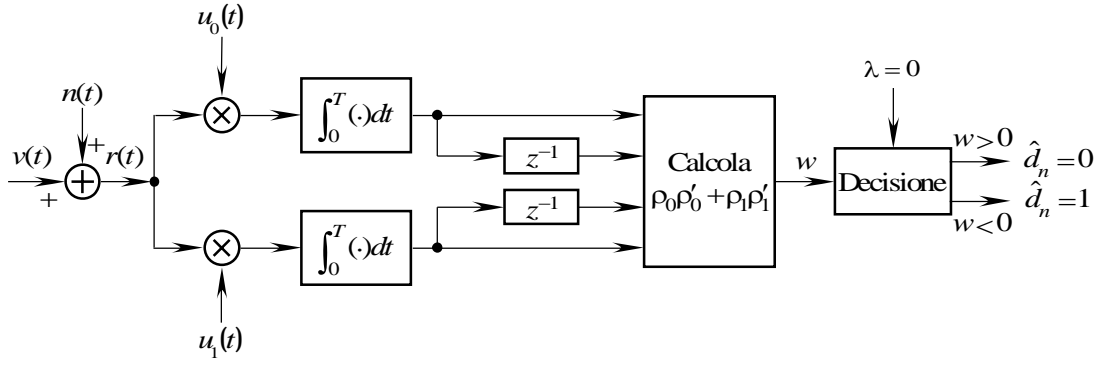


Fig. V.5 - Ricevitore non coerente per modulazione DPSK.

Con riferimento alla regola di decisione espressa dalla (V.3.8), la probabilità di errore, se i dati emessi dalla sorgente sono equiprobabili, è data dalla:

$$(V.3.9) \quad P_e = \frac{1}{2} \Pr \{w > 0 \mid d_n = 0\} + \frac{1}{2} \Pr \{w < 0 \mid d_n = 1\}$$

dove si è posto $w = \rho_0 \rho'_0 + \rho_1 \rho'_1$.

Poiché a causa della simmetria del sistema, le due probabilità che intervengono nella P_e sono eguali, la (V.3.9) diviene:

$$(V.3.10) \quad P_e = \frac{1}{2} \Pr \{w < 0 \mid d_n = 1\}$$

La condizione $d_n = 1$ può essere ottenuta con $a_n = a_{n-1} = 0$ o con $a_n = a_{n-1} = 1$. Dato che tali eventi sono mutuamente esclusivi, la (V.3.10) può essere esplicitata come segue:

$$(V.3.11) \quad P_e = \frac{1}{2} \Pr \{w < 0 \mid a_n = a_{n-1} = 0\} + \frac{1}{2} \Pr \{w < 0 \mid a_n = a_{n-1} = 1\}$$

Per valutare la probabilità di errore è conveniente porre la variabile di decisione w nella forma:

$$(V.3.12) \quad w = \frac{1}{4} \left\{ \left[(\rho_0 + \rho'_0)^2 + (\rho_1 + \rho'_1)^2 \right] - \left[(\rho_0 - \rho'_0)^2 + (\rho_1 - \rho'_1)^2 \right] \right\}$$

Alle condizioni $a_k = a_{k-1} = 0$ e $a_k = a_{k-1} = 1$ corrispondono, per le (V.3.5) e (V.3.6) le componenti

$$(V.3.13) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi + v_0 & \rho'_0 &= V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi + v'_0 \\ \rho_1 &= -V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi + v_1 & \rho'_1 &= -V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi + v'_1 \end{aligned} \quad a_n = a_{n-1} = 0$$

e

$$(V.3.14) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= -V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi + v_0 & \rho'_0 &= -V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi + v'_0 \\ \rho_1 &= V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi + v_1 & \rho'_1 &= V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi + v'_1 \end{aligned} \quad a_n = a_{n-1} = 1$$

e quindi

$$(V.3.15) \quad \begin{aligned} w &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\pm 2V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi + v_0 + v'_0 \right)^2 + \left(\mp 2V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi + v_1 + v'_1 \right)^2 \right\} + \\ &\quad - \frac{1}{4} \left\{ (v_0 - v'_0)^2 + (v_1 - v'_1)^2 \right\} \end{aligned}$$

Ponendo adesso:

$$(V.3.16) \quad \begin{aligned} \alpha_s &= \pm 2V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi + v_0 + v'_0 & \beta_s &= \mp 2V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi + v_1 + v'_1 \\ \alpha_d &= v_0 - v'_0 & \beta_d &= v_1 - v'_1 \end{aligned}$$

la (V.3.15) diventa:

$$(V.3.17) \quad w = \frac{1}{4} \left[(\alpha_s^2 + \beta_s^2) - (\alpha_d^2 + \beta_d^2) \right]$$

e quindi la (V.3.11) diventa:

$$(V.3.18) \quad P_e = \frac{1}{2} \Pr \left\{ \sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2} < \sqrt{\alpha_d^2 + \beta_d^2} \mid d_n = 1 \right\}$$

Poiché le quantità $v_0 + v'_0$, $v_0 - v'_0$, $v_1 + v'_1$ e $v_1 - v'_1$ sono gaussiane, incorrelate a valor medio nullo e varianza N_0 , è facile riconoscere che le variabili aleatorie $\alpha_s, \alpha_d, \beta_s, \beta_d$ sono staticamente indipendenti e caratterizzate dalle densità di probabilità gaussiane seguenti:

$$(V.3.19) \quad p_{\alpha_s}(\alpha_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \exp \left\{ -\frac{1}{2N_0} \left(\alpha_s \mp 2V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cos \varphi \right)^2 \right\}$$

$$p_{\alpha_d}(\alpha_d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \exp \left\{ -\frac{\alpha_d^2}{2N_0} \right\}$$

e

$$(V.3.20) \quad p_{\beta_s}(\beta_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \exp \left\{ -\frac{1}{2N_0} \left(\beta_s \pm 2V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \varphi \right)^2 \right\}$$

$$p_{\beta_d}(\beta_d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \exp \left\{ -\frac{\beta_d^2}{2N_0} \right\}$$

La statistica di $S = \sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2}$ è una densità di probabilità di Rice e quella di $D = \sqrt{\alpha_d^2 + \beta_d^2}$ è di Rayleigh. Risulta così:

$$(V.3.21) \quad p_S(S) = \frac{S}{N_0} \exp \left\{ -\frac{S^2 + 2V_0^2 T}{2N_0} \right\} I_0 \left(2 \frac{V_0}{N_0} \sqrt{\frac{T}{2}} S \right)$$

e

$$(V.3.22) \quad p_D(D) = \frac{D}{N_0} e^{-\frac{D^2}{2N_0}}$$

In base alla (V.3.18) risulta infine:

$$(V.3.23) \quad P_e = \frac{1}{2} \Pr \{ S < D \} = \int_0^\infty p_S(S) \left[\int_S^\infty p_D(D) dD \right] dS$$

e cioè:

$$(V.3.24) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{V_0^2 T}{N_0}} \int_0^\infty x \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{V_0^2 T}{N_0} \right) \right\} I_0 \left\{ \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} x \right\} dx$$

che, tenendo presente la (V.3.21), diventa:

$$(V.3.25) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{V_0^2 T}{N_0}}$$

che ponendo $\gamma = \frac{V_0^2 T}{N_0}$ su scrive:

$$(V.3.26) \quad P_e = \frac{1}{2} e^{-\gamma}$$

APPENDICE

Distribuzioni di Rayleigh e di Rice

A.1 – Trasformazione di densità di probabilità.

Sia (X, Y) un vettore aleatorio le cui componenti X e Y sono caratterizzate da una densità di probabilità congiunta data da $p_{X,Y}(x, y)$.

Sia inoltre (U, V) il vettore aleatorio legato al vettore (X, Y) dalla seguente trasformazione di variabili:

$$(A.1) \quad \begin{aligned} u &= u(x, y) \\ v &= v(x, y) \end{aligned}$$

dove $u(\cdot, \cdot)$ e $v(\cdot, \cdot)$ sono due funzioni continue e derivabili in \mathbf{R}^2 .

Per dedurre la densità di probabilità congiunta delle variabili aleatorie (U, V) in funzione della densità di probabilità congiunta delle variabili (X, Y) basta osservare che, detto:

$$\mathbf{E}_{XY} \equiv \{x \leq X < x + dx; y \leq Y < y + dy\}$$

un evento elementare definito nel sistema di riferimento Oxy e

$$\mathbf{E}_{UV} \equiv \{u \leq U < u + du; v \leq V < v + dv\}$$

il corrispondente evento definito nel sistema di riferimento Ouv , se la corrispondenza fra il punto (x, y) in Oxy e il punto (u, v) in Ouv è biunivoca, deve sussistere la proprietà:

$$(A.2) \quad \Pr\{\mathbf{E}_{UV}\} = \Pr\{\mathbf{E}_{XY}\}$$

poiché il verificarsi dell'evento \mathbf{E}_{XY} comporta il verificarsi di \mathbf{E}_{UV} . Se gli eventi di cui sopra sono elementari, le probabilità che intervengono nella (A.2) possono essere espresse, a meno di infinitesimi di ordine superiore, in termini delle corrispondenti densità di probabilità congiunte, come segue:

$$(A.3) \quad p_{U,V}(u, v) \|\mathbf{E}_{UV}\| = p_{X,Y}(x, y) \|\mathbf{E}_{XY}\|$$

dove $\|\mathbf{E}_{UV}\|$ e $\|\mathbf{E}_{XY}\|$ denotano le misure degli eventi corrispondenti.

È noto che la misura dell'evento elementare \mathbf{E}_{XY} è dato dal modulo del prodotto vettoriale dei vettori elementari dx e dy di modulo dx e dy e orientati secondo le direzioni di Ox e Oy rispettivamente. In altri termini è $\|\mathbf{E}_{XY}\| = |dx \times dy|$.

La stessa cosa vale per l'evento $\|\mathbf{E}_{UV}\|$. Anche qui, è, con analogo significato dei simboli, $\|\mathbf{E}_{UV}\| = |du \times dv|$.

Tenendo conto della trasformazione (A.1) si ha:

$$(A.4) \quad \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned}$$

per cui è:

$$(A.5) \quad \begin{aligned} du \times dv &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \times \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} dx \times dy + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \times dx + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dy \times dy + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} dy \times dx \end{aligned}$$

Se il riferimento Oxy è ortogonale, è:

$$(A.6) \quad \begin{aligned} d\mathbf{x} \times d\mathbf{x} &= d\mathbf{y} \times d\mathbf{y} = 0 \\ d\mathbf{y} \times d\mathbf{x} &= -d\mathbf{x} \times d\mathbf{y} \end{aligned}$$

per cui la (A.5) si riduce alla:

$$(A.7) \quad d\mathbf{u} \times d\mathbf{v} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\mathbf{x} \times d\mathbf{y}$$

Si ottiene così:

$$(A.8) \quad \|\mathbf{E}_{UV}\| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right| \|\mathbf{E}_{XY}\|$$

che sostituita nella (A.3), fornisce:

$$(A.9) \quad p_{U,V}(u, v) \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| = p_{X,Y}(x, y)$$

Se si denota con:

$$(A.10) \quad J(x, y) \equiv \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

il *determinante jacobiano*, o semplicemente lo *jacobiano*, della trasformazione (A.1), la (A.9) si scrive:

$$(A.11) \quad p_{U,V}(u, v) |J(x, y)| = p_{X,Y}(x, y)$$

dove si è introdotto il valore assoluto nello jacobiano perché le densità di probabilità sono funzioni non negative.

Dalla (A.1) si deduce:

$$(A.12) \quad \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned}$$

che costituiscono un sistema lineare nelle incognite dx e dy la cui soluzione è:

$$(A.13) \quad \begin{aligned} dx &= \frac{1}{J(x, y)} \begin{vmatrix} du & \frac{\partial u}{\partial y} \\ dv & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial y} du - \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial y} dv \\ dy &= \frac{1}{J(x, y)} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & du \\ \frac{\partial v}{\partial x} & dv \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial x} du + \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial x} dv \end{aligned}$$

Dalle (A.13), ponendo successivamente $dv = 0$ e $du = 0$, è:

$$(A.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} dv$$

e quindi:

$$(A.15) \quad J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{1}{J} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \frac{1}{J(x, y)}$$

dove $J(u, v) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ è lo jacobiano del sistema inverso

$$(A.16) \quad \begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}$$

Normalmente è nota la trasformazione inversa della (A.1) per cui la (A.11) diviene:

$$(A.17) \quad p_{U,V}(u, v) = |J(u, v)| p_{X,Y}(x(u, v), y(u, v))$$

Esempio E.A.1.

La trasformazione da coordinate rettangolari a coordinate polari è una trasformazione biunivoca se è:

$$r > 0 \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

In tal caso la legge di trasformazione inversa è data dalla:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

Lo jacobiano della trasformazione vale:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

per cui è:

$$p_{R,\Phi}(r, \varphi) = r \cdot p_{X,Y}(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

A.2 – Caso del vettore gaussiano.

A.2.1 – Distribuzione di Rayleigh.

Se il vettore (X, Y) è un vettore aleatorio le cui componenti X e Y sono variabili aleatorie gaussiane, a media nulla, caratterizzate dalla varianza σ^2 e statisticamente indipendenti è:

$$(A.18) \quad p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right\}$$

per cui la densità di probabilità congiunta delle variabili aleatorie (R, Φ) che costituiscono la rappresentazione del punto (X, Y) nel sistema di coordinate polari, è:

$$(A.19) \quad p_{R,\Phi}(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad \begin{aligned} r &\in (0, \infty) \\ \varphi &\in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Integrando la (A.19) rispetto a φ si ottiene la densità di probabilità del primo ordine della variabile aleatoria R :

$$(A.20) \quad p_R(r) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} r \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} d\varphi$$

e risulta:

$$(A.21) \quad p_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} & r > 0 \\ 0 & r \leq 0 \end{cases}$$

nota come **distribuzione di Rayleigh** il cui andamento è riportato in Fig. A.1.

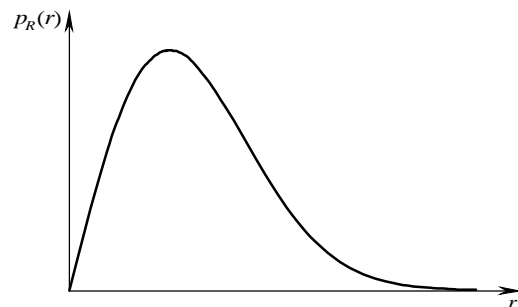


Fig. A.1 – Distribuzione di Rayleigh

In modo analogo, integrando la (A.19) rispetto a r si ottiene la densità di probabilità del primo ordine della variabile aleatoria Φ :

$$(A.22) \quad p_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty r \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\} dr$$

e risulta, come è facile verificare:

$$(A.23) \quad p_{\Phi}(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La variabile aleatoria Φ è uniformemente distribuita in $[0, 2\pi)$.

Tenendo conto delle (A.19), (A.21) e (A.23), risulta:

$$(A.24) \quad p_{R,\Phi}(r, \varphi) = p_R(r)p_{\Phi}(\varphi)$$

Le variabili aleatorie Φ e R sono statisticamente indipendenti.

A.2.2 - Distribuzione di Rice.

Se le variabili aleatorie X e Y entrambe gaussiane, hanno la stessa varianza σ^2 , sono statisticamente indipendenti, ma hanno diversi valori medi dati da m_x e m_y rispettivamente, la loro densità di probabilità congiunta è espressa dalla:

$$(A.25) \quad p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-m_x)^2+(y-m_y)^2}{2\sigma^2}}$$

Con la stessa procedura sviluppata nel paragrafo A.1, si può verificare che la densità di probabilità congiunta delle variabili aleatorie R e Φ è data dalla:

$$(A.13) \quad p_{R,\Phi}(r, \varphi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-m_x)^2+(y-m_y)^2}{2\sigma^2}}$$

che, ponendo

$$(A.14) \quad m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} \quad \text{e} \quad \begin{cases} m_x = m \cos \psi \\ m_y = m \sin \psi \end{cases}$$

diventa:

$$(A.15) \quad \begin{aligned} p_{R,\Phi}(r, \varphi) &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r^2 + m^2 - 2mr(\cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi)}{2\sigma^2}\right\} = \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r^2 + m^2 - 2mr \cos(\varphi - \psi)}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

La densità di probabilità della variabile aleatoria R si ottiene allora per integrazione della (A.15) rispetto a φ ; si ha:

$$(A.16) \quad p_R(r) = \int_0^{2\pi} p_{R,\Phi}(r, \varphi) d\varphi = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2+m^2}{2\sigma^2}} \int_0^{2\pi} e^{\frac{mr}{\sigma^2} \cos(\varphi-\psi)} d\varphi$$

Per calcolare l'integrale che compare nella (A.16) occorre porre $\varphi - \psi = \theta$. Risultata:

$$(A.17) \quad \begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} e^{\frac{mr}{\sigma^2} \cos(\varphi-\psi)} d\varphi = \\ &= \int_{-\psi}^{2\pi-\psi} e^{\frac{mr}{\sigma^2} \cos \theta} d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{mr}{\sigma^2} \cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

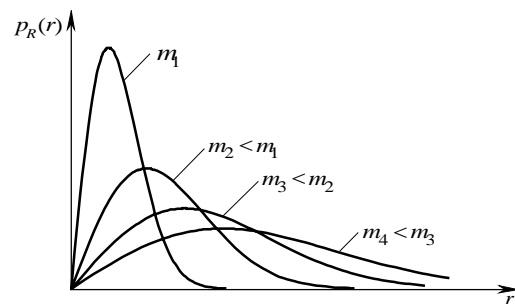


Fig. A.2 - Distribuzione di Rice per diversi valori di m .

dove si è tenuto conto del fatto che, essendo l'integrando una funzione di θ periodica di periodo 2π , l'integrale può essere esteso ad un qualsiasi intervallo purché di lunghezza 2π .

Ricordando infine che

$$(A.18) \quad I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos \theta} d\theta$$

rappresenta la funzione di Bessel modificata di prima specie e di ordine 0, la (A.16) diventa:

$$(A.19) \quad p_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2+m^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{mr}{\sigma^2}\right) & r > 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases}$$

che costituisce la **distribuzione di Rice**.

La distribuzione di Rice è riportata in Fig. A.2 per diversi valori del parametro m dove è $m < m_2 < \dots$.