

TRASMISSIONE NUMERICA DI SEGNALI ANALOGICI

Per migliorare le prestazioni di una trasmissione di segnali a tempo continuo è opportuno ricorrere ad un processo di quantizzazione e successiva codifica. È studiato il processo di quantizzazione con particolare enfasi alla determinazione della caratteristica di quantizzazione ottima e cioè a quella caratteristica che produce il minimo errore di quantizzazione. Sono anche prese in esame le tecniche di compressione e di espansione ed, in particolare, è studiata una loro applicazione al segnale telefonico. Infine è presa in esame la modulazione PCM e sono studiate le principali caratteristiche delle modulazioni PCM differenziale e della modulazione delta.

VI.1 - Introduzione.

I sistemi di trasmissione numerici studiati nei capitoli precedenti, si possono efficacemente prestare alla trasmissione dei segnali a tempo continuo (segnali analogici), mediante un opportuno procedimento di discretizzazione del messaggio come sarà chiarito in quel che segue. È da tenere inoltre presente che tale discretizzazione offre la possibilità di adoperare tecniche di codifica che oltre a semplificare la struttura degli apparati di mododemodulazione, ne migliorano sensibilmente l'affidabilità.

In linea di principio uno schema di trasmissione numerica di segnali analogici si presenta come indicato in Fig. VI.1. Il messaggio $s(t)$ inviato dalla sorgente S è campionato con una cadenza T dipendente dall'ampiezza di banda del segnale ed i valori campionati vengono successivamente quantizzati. Tale processo di quantizzazione consiste nell'associare a ciascun campione di $s(t)$ un valore fra M assegnati secondo un criterio definito dalla **legge di quantizzazione**. Con questa procedura il messaggio analogico $s(t)$ è così convertito in una sequenza di simboli $\{q_k\}$ appartenenti ad un insieme di M elementi.

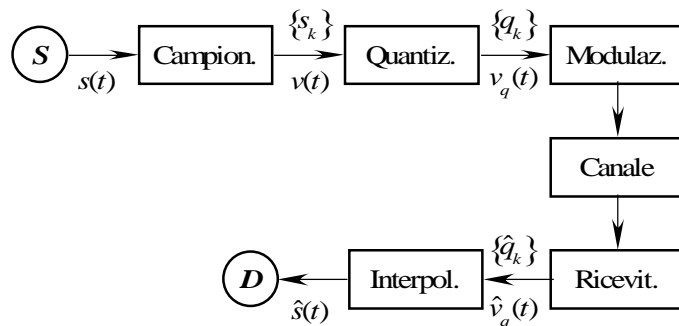


Fig. VI.1 - Schema di principio di una trasmissione numerica di segnali analogici.

Una successiva modulazione numerica converte i valori campionati e quantizzati. Il segnale modulato così ottenuto è inviato al ricevitore attraverso il mezzo di trasmissione. Il ricevitore interpreta la sequenza trasmessa ricostruendone i corrispondenti valori campionati $\{\hat{q}_k\}$ i quali differiscono da quelli trasmessi a causa degli errori di trasmissione dovuti al rumore introdotto dal canale ed alle interferenze. Una stima $\hat{s}(t)$ del segnale inviato dalla sorgente può essere ottenuta attraverso un processo di interpolazione, che a partire da una serie di valori campionati fornisce un segnale $\hat{s}(t)$ trasferito al destinatario D dell'informazione.

Una successiva modulazione numerica converte i valori campionati e quantizzati. Il segnale modulato così ottenuto è inviato al ricevitore attraverso il mezzo di trasmissione. Il ricevitore interpreta la sequenza trasmessa ricostruendone i corrispondenti valori campionati $\{\hat{q}_k\}$ i quali differiscono da quelli trasmessi a causa degli errori di trasmissione dovuti al rumore introdotto dal canale ed alle interferenze. Una stima $\hat{s}(t)$ del segnale inviato dalla sorgente può essere ottenuta attraverso un processo di interpolazione, che a partire da una serie di valori campionati fornisce un segnale $\hat{s}(t)$ trasferito al destinatario D dell'informazione.

È da osservare che il segnale ricevuto $\hat{s}(t)$ differisce dal messaggio $s(t)$ non solo a causa dei disturbi, interferenza ed altro, introdotti dal mezzo di trasmissione, ma soprattutto per

effetto del processo di quantizzazione. Ne risulta di conseguenza un'ulteriore perdita di informazione, che può essere interpretata come un **rumore di quantizzazione**. Per quanto tale rumore può essere ridotto aumentando il numero M dei livelli di quantizzazione, pur tuttavia nelle applicazioni alla telefonia numerica, il numero M dei livelli è stato fissato a 2^8 . Ciò in virtù del fatto che nella ricezione del parlato non sono distinguibili livelli di segnali discosti al di sotto di un certo limite; di conseguenza un aumento del numero M dei livelli produrrebbe una riduzione della velocità di trasmissione del segnale numerico senza apprezzabili benefici sulla qualità della trasmissione.

VI.2 - Il processo di quantizzazione.

Nel processo di quantizzazione i valori del segnale campionato sono convertiti in un insieme di M livelli q_1, q_2, \dots, q_M ¹.

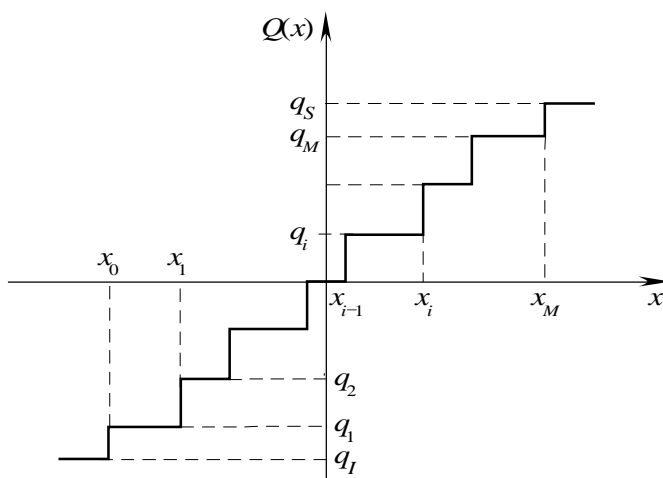


Fig. VI.2 - Caratteristica di quantizzazione

La relazione $y = Q(x)$ schematicamente rappresentata in Fig. VI.2 fra il segnale in ingresso e quello di uscita di un quantizzatore definisce la **caratteristica di quantizzazione**. Come si evince dalla suddetta figura tale caratteristica è individuata da un insieme di $M + 1$ **livelli di decisione** $\{x_0, x_1, \dots, x_M\}$ e da un insieme di M **livelli di quantizzazione** $\{q_1, q_2, \dots, q_M\}$.

Quando il valore del segnale in ingresso cade nell'intervallo $I_i \equiv [x_{i-1}, x_i)$ $i = 1, 2, \dots, M$ l'uscita del quantizzatore è pari a q_i ($q_i \in I_i$) con l'eccezione degli intervalli $I_0 \equiv (-\infty, x_0)$ e $I_{M+1} \equiv [x_M, \infty)$ ai quali corrispondono i cosiddetti *livelli di saturazione* q_l e q_s rispettivamente.

Se la caratteristica associa il livello 0 a segnali le cui ampiezze sono comprese in un intorno dell'origine la caratteristica si dice di tipo **silenzioso**. (v. Fig. VI.3,a). Se la caratteristica è simmetrica rispetto all'origine il numero dei livelli è dispari. Se invece si presenta come è indicato in Fig. V.3.b) sarà detta di tipo **non silenzioso** e se è simmetrica presenta un numero pari di livelli.

È da notare che nel caso di caratteristica silenziosa si ha una limitazione della dinamica del segnale a bassi livelli; segnali di piccola ampiezza sono re-

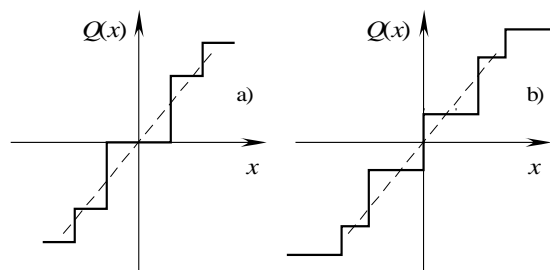


Fig. VI.3 - Caratteristiche di quantizzazione: a) silenziosa, b) non silenziosa.

¹ Nell'insieme dei livelli di quantizzazione si sono esclusi i livelli terminali detti anche livelli di saturazione.

stituiti con ampiezze nulle e ciò produce un fastidioso effetto di granulosità nelle applicazioni telefoniche. Per contro una tale soluzione riduce notevolmente gli effetti dei disturbi ed interferenze. Prestazioni opposte si ottengono con le caratteristiche di tipo non silenziato dove ad una restituzione più fedele di segnali di piccola ampiezza contrasta la presenza di un rumore di fondo anche in assenza di trasmissione.

VI.3 - Errore di quantizzazione.

Un parametro che caratterizza le prestazioni di un quantizzatore è costituito dall'errore di quantizzazione e_q definito come il valore quadratico medio dell'errore ε_q dovuto al processo di quantizzazione:

$$(VI.1.1) \quad \varepsilon_q = Q(x) - x$$

Se $p_s(x)$ denota la densità di probabilità del primo ordine del segnale $s(t)$ supposto stazionario, e_q vale:

$$(VI.1.2) \quad e_q = \int_{-\infty}^{\infty} [Q(x) - x]^2 p_s(x) dx$$

che, con le notazioni di Fig. VI.2, può scriversi nella forma:

$$(VI.1.3) \quad e_q = \int_{-\infty}^{x_0} (q_I - x)^2 p_s(x) dx + \sum_{i=1}^M \int_{x_{i-1}}^{x_i} (q_i - x)^2 p_s(x) dx + \int_{x_M}^{\infty} (q_S - x)^2 p_s(x) dx$$

dalla quale si deduce che l'errore di quantizzazione può essere scomposto nelle componenti:

$$(VI.1.4) \quad e_q' = \sum_{i=1}^M \int_{x_{i-1}}^{x_i} (q_i - x)^2 p_s(x) dx$$

corrispondente alla condizione di **sottocarico** in cui cioè i valori dei campioni del segnale sono contenuti nell'intervallo (x_0, x_M) e

$$(VI.1.5) \quad e_q'' = \int_{-\infty}^{x_0} (q_I - x)^2 p_s(x) dx + \int_{x_M}^{\infty} (q_S - x)^2 p_s(x) dx$$

corrispondente alla condizione di **saturatione** o di **sovraccarico** che si verifica quando i valori di x cadono all'esterno dell'intervallo (x_0, x_M) .

Poiché la funzione $p_s(x)$ tende a zero per $|x| \rightarrow \infty$, è possibile scegliere le quantità x_0 e x_M in modo tale che la probabilità che i valori di x che cadono all'esterno dell'intervallo (x_0, x_M) sia trascurabile. In tale ipotesi l'errore di quantizzazione può essere approssimato dalla:

$$(VI.1.6) \quad e_q \approx \sum_{i=1}^M \int_{x_{i-1}}^{x_i} (q_i - x)^2 p_s(x) dx$$

VI.4 - La caratteristica ottima di quantizzazione.

Facendo riferimento alla (VI.1.3) si deduce che l'errore di quantizzazione dipende dall'insieme dei parametri $\{x_1, \dots, x_{M-1}\}$ e $\{q_I, q_1, q_2, \dots, q_M, q_S\}$ in quanto i valori dei livelli di decisione estremi x_0 e x_M si suppongono assegnati. Ciò induce a determinare quella caratteristica di quantizzazione che per assegnato $p_s(x)$ dia luogo al minimo di e_q . Facendo riferimento all'espressione (VI.1.3) dell'errore di quantizzazione, le condizioni che conducono al minimo di e_q si ottengono annullando le derivate prime di e_q rispetto a x_i e q_i . Si ha:

$$(VI.2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial e_q}{\partial x_i} \equiv (q_i - x_i)^2 p_s(x_i) - (q_{i+1} - x_i)^2 p_s(x_i) = 0 & i = 1, 2, \dots, M-1 \\ \frac{\partial e_q}{\partial q_i} \equiv 2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} (q_i - x) p_s(x) dx = 0 & i = 2, \dots, M-1 \\ \frac{\partial e_q}{\partial q_I} \equiv 2 \int_{-\infty}^{x_0} (q_I - x) p_s(x) dx = 0 \\ \frac{\partial e_q}{\partial q_S} \equiv 2 \int_{x_M}^{\infty} (q_S - x) p_s(x) dx = 0 \end{cases}$$

Dalla prima delle (VI.2.1) si ottengono:

$$(VI.2.2) \quad x_i = \frac{q_i + q_{i+1}}{2} \quad i = 1, 2, \dots, M-1$$

e dalle successive:

$$(VI.2.3) \quad \begin{aligned} q_i &= \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} x p_s(x) dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} p_s(x) dx} & i = 1, 2, \dots, M \\ q_I &= \frac{\int_{-\infty}^{x_0} x p_s(x) dx}{\int_{-\infty}^{x_0} p_s(x) dx} ; \quad q_S = \frac{\int_{x_M}^{\infty} x p_s(x) dx}{\int_{x_M}^{\infty} p_s(x) dx} \end{aligned}$$

Per una generica funzione $p_s(x)$ la risoluzione delle equazioni (VI.2.2) e (VI.2.3) non può essere ottenuta in forma chiusa; tuttavia i valori ottimi di x_i e q_i possono essere valutati in forma numerica. Un algoritmo particolarmente efficace per la determinazione dei parametri di una caratteristica ottima di quantizzazione, note che siano la densità di probabilità $p_s(x)$ del segnale $s(t)$ ed il numero di livelli M , è l'algoritmo di Lloyd-Max. Esso si articola nei seguenti passi:

- si scelgono inizialmente i livelli di quantizzazione $\{q_i\}_{i=1}^M$ in modo arbitrario;
- per $1 \leq i \leq M-1$ si calcolano i livelli di decisione con la $x_i = \frac{q_i + q_{i+1}}{2}$ ($i = 1, 2, \dots, M-1$);
- note le quantità $\{x_i\}_{i=1}^{M-1}$, si calcolano i livelli di quantizzazione usando le (VI.2.3);
- si ripetono i passi b) e c) aggiornando i valori dei livelli $\{q_i\}_{i=1}^M$ con quelli ottenuti nel passo precedente;
- l'algoritmo si arresta quando l'aggiornamento dei livelli $\{x_i\}_{i=1}^{M-1}$ è contenuto nella fascia di precisione assegnata.

Se il numero dei livelli di quantizzazione è estremamente grande per modo che, a parità di dinamica del segnale, l'ampiezza $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ del generico intervallo di decisione è piccola, si può ritenere valida la seguente approssimazione:

$$(VI.2.4) \quad p_s(x) \cong p_s\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) \text{ per } x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

In tali condizioni le (VI.2.3) forniscono:

$$(VI.2.5) \quad q_i = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_i} x p_s(x) dx}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} p_s(x) dx} \cong \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

per cui, tenendo conto delle (VI.2.4) e (VI.2.5), l'errore (VI.1.6) diviene:

$$(VI.2.6) \quad e_q = \sum_{i=1}^M p_s(q_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (q_i - x)^2 dx = \sum_{i=1}^M p_s(q_i) \int_{-\frac{\Delta_i}{2}}^{\frac{\Delta_i}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^M \Delta_i^3 p_s(q_i)$$

dove si è introdotta la posizione $q_i - x = y$. Osservando infine che la quantità:

$$(VI.2.7) \quad P_i = \Delta_i p_s(q_i) \cong \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_s(x) dx$$

rappresenta la probabilità che i valori del segnale siano contenuti nell'intervallo $(x_{i-1}, x_i]$,

la (VI.2.6) può essere riscritta nella forma:

$$(VI.2.8) \quad e_q = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^M \Delta_i^2 P_i$$

Un'interessante struttura della caratteristica di quantizzazione è la cosiddetta **quantizzazione uniforme**. Essa è caratterizzata dal fatto che i livelli di decisione si succedono in maniera uniforme. Se il numero dei livelli di quantizzazione è abbastanza elevato, tenendo conto della (VI.2.5), si può scrivere:

$$(VI.2.9) \quad \Delta_i = x_{i+1} - x_i = (2q_{i+1} - x_i) - (2q_i - x_{i-1}) = 2(q_{i+1} - q_i) - (x_i - x_{i-1}) = 2(q_{i+1} - q_i) - \Delta_{i-1}$$

Poiché è $\Delta_i = \Delta_{i-1} = \Delta$, dalla precedente si deduce:

$$(VI.2.10) \quad q_{i+1} - q_i = \Delta$$

Anche i livelli di quantizzazione si succedono in modo uniforme con lo stesso passo. In tal caso l'errore di quantizzazione, detto $q = q_i - q_{i-1}$ il passo di quantizzazione, diviene:

$$(VI.2.11) \quad e_q = \frac{q^2}{12}$$

potendosi porre:

$$(VI.2.12) \quad \sum_{i=1}^M P_i = \int_{x_0}^{x_M} p_s(x) dx \cong 1$$

supposto che la probabilità che il segnale assuma valori non nulli al di fuori dell'intervallo (x_0, x_M) sia trascurabile.

Se la caratteristica di quantizzazione è inoltre simmetrica, denotando con $(-V, V)$ il campo di variabilità del segnale in ingresso (dinamica del segnale), si ha:

$$(VI.2.13) \quad x_M = -x_0 = V$$

da cui:

$$(VI.2.14) \quad q = \frac{x_M - x_0}{M} = \frac{2V}{M}$$

e quindi la (VI.2.11) diventa

$$(VI.2.15) \quad e_q = \frac{V^2}{3M^2}$$

Indipendentemente dal numero dei livelli di quantizzazione, si dice che si è in presenza di una caratteristica di quantizzazione uniforme quando le ampiezze $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$ degli intervalli di decisione e quelli $\delta_i = q_i - q_{i-1}$ degli intervalli di quantizzazione sono eguali tra loro per modo che si abbia $\Delta_i = \Delta$ e $\delta_i = \delta$ e risulta $\Delta = \delta \equiv q$.

VI.5 - Caso del segnale telefonico.

Nel caso di segnale telefonico un buon modello per la densità di probabilità del primo ordine del segnale è la distribuzione laplaciana definita dalla:

$$(VI.3.1) \quad p_s(x|\sigma_s) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_s} \exp\left[-\frac{\sqrt{2}|x|}{\sigma_s}\right]$$

in cui σ_s^2 è il valore quadratico medio del segnale. Essa è una densità di probabilità condizionata dal valore σ_s^2 (valore quadratico medio del segnale). A rigor di termini la quantità σ_s^2 è a sua volta una variabile aleatoria dato che tale valore quadratico medio dipende dal parlatore.

Sostituendo la (VI.3.1) nella (VI.1.3), con $x_M = -x_0 = V$ si ha:

$$(VI.3.2) \quad e_q = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_s} \int_{-\infty}^{-V} (q_1 - x)^2 e^{-\frac{\sqrt{2}|x|}{\sigma_s}} dx + \sum_{i=1}^M \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_s} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (q_i - x)^2 e^{-\frac{\sqrt{2}|x|}{\sigma_s}} dx + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_s} \int_V^{\infty} (q_M - x)^2 e^{-\frac{\sqrt{2}|x|}{\sigma_s}} dx$$

dove, sulla base delle (VI.2.1) per $i = M$ e $i = 1$, si ha $q_M = -q_1 = V + \frac{\sigma_s}{\sqrt{2}}$. Risulta facilmente:

$$(VI.3.3) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_s} \int_{-\infty}^{-V} (q_1 - x)^2 e^{-\frac{\sqrt{2}|x|}{\sigma_s}} dx + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_s} \int_V^{\infty} (q_M - x)^2 e^{-\frac{\sqrt{2}|x|}{\sigma_s}} dx = \\ & = \frac{\sqrt{2}}{\sigma_s} \int_V^{\infty} (q_M - x)^2 e^{-\frac{\sqrt{2}x}{\sigma_s}} dx = \frac{\sigma_s^2}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}V}{\sigma_s}} \end{aligned}$$

per cui l'errore di quantizzazione, supposto di adottare una quantizzazione uniforme, vale:

$$(VI.3.4) \quad e_q = \frac{V^2}{3M^2} + \frac{\sigma_s^2}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}V}{\sigma_s}}$$

Per caratterizzare il processo di quantizzazione è utile introdurre un ulteriore parametro z_q , detto **rapporto segnale rumore di quantizzazione**, definito come il rapporto fra la potenza specifica del segnale in ingresso e il valore quadratico medio dell'errore di quantizzazione. Si ha:

$$(VI.3.5) \quad z_q = \frac{\sigma_s^2}{e_q} = \frac{1}{\frac{1}{3M^2} \left(\frac{V}{\sigma_s}\right)^2 + \frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}V}{\sigma_s}}}$$

il cui andamento è riportato in Fig. VI.4 in funzione di $\frac{\sigma_s}{V}$ per diversi valori del numero di livelli M .

Per bassi valori del rapporto $\frac{\sigma_s}{V}$ il contributo dell'errore di sovraccarico è trascurabile e quindi z_q si riduce alla:

$$(VI.3.6) \quad z_q \cong 3M^2 \left(\frac{\sigma_s}{V}\right)^2$$

che espresso in dB vale

$$(VI.3.7) \quad z_q(dB) = 10 \log_{10} 3 + 20 \log_{10} M + 20 \log_{10} \left(\frac{\sigma_s}{V}\right)$$

A parità di potenza del segnale in ingresso un raddoppio del numero dei livelli produce un incremento di z_q dato da $\Delta z_q(dB) = 20 \log_{10} 2 \cong 6 \text{ dB}$.

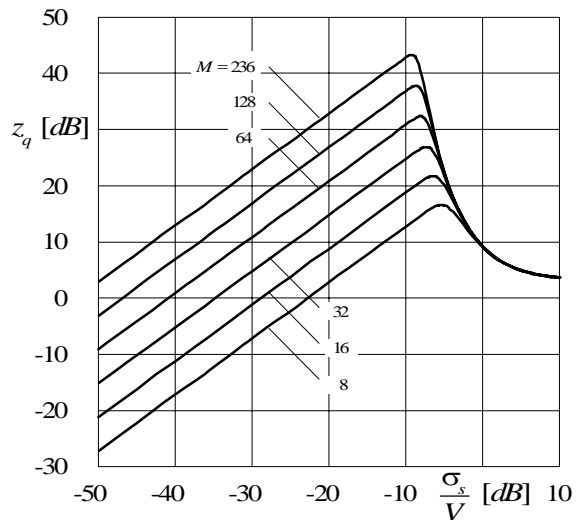


Fig. VI.4 - Rapporto segnale rumore di quantizzazione al variare di σ_s / V per diversi valori di M .

Al crescere di $\frac{\sigma_s}{V}$ la quantità z_q aumenta fino a che l'effetto di saturazione diventa preminente. All'ulteriore crescita di $\frac{\sigma_s}{V}$ si verifica una degradazione delle prestazioni del sistema. In ogni caso a parità di M , z_q risulta molto dipendente dalla potenza del segnale in ingresso.

VI.6 – Compressori ed espansori.

Una semplificata procedura di ottimizzazione può essere ottenuta partendo dalla considerazione che un quantizzatore non uniforme può essere costituito dalla connessione in cascata di un trasduttore non lineare privo di memoria, detto **compressore**, la cui caratteristica è definita dall'equazione:

(VI.4.1)
$$y = f(x)$$

con un quantizzatore uniforme come è indicato schematicamente in Fig. V.5. È evidente che per compensare le distorsioni introdotte dal compressore al ricevitore dovrà essere inserito un trasduttore non lineare privo di memoria, detto **espansore**, la cui caratteristica è

l'inversa di quella del compressore, e cioè

(VI.4.2)
$$y = f^{-1}(x)$$

L'insieme del compressore e dell'espansore si denota **compandor**.

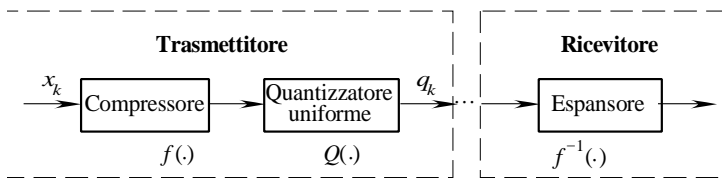


Fig. VI.5 - Realizzazione di un quantizzatore non uniforme.

Con riferimento alla Fig. VI.6, è evidente che la cascata compressore-quantizzatore uniforme corrisponde ad una caratteristica di quantizzazione non uniforme in quanto il segnale in uscita assume il valore q_i se il campione in ingresso si trova nell'intervallo di ampiezza Δ_i . Se il numero dei livelli del quantizzatore è abbastanza elevato l'intervallo Δ_i si può supporre sufficientemente piccolo, per cui, se \bar{x}_i denota un valore contenuto nell'intervallo I_i si ha $P_i \cong p_s(\bar{x}_i)\Delta_i$; per cui l'errore di quantizzazione, dato dalla (VI.2.8), si può scrivere come segue:

(VI.4.3)
$$e_q = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^M \Delta_i^2 P_i = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^M \Delta_i^2 p_s(\bar{x}_i)\Delta_i$$

Inoltre ponendo $u(x) = \frac{df(x)}{dx}$ è $\Delta_i \cong \frac{\Delta}{\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=\bar{x}_i}} = \frac{q}{[u(x)]_{x=\bar{x}_i}}$

Si ha $e_q = \frac{q^2}{12} \sum_{i=1}^M \frac{p_s(\bar{x}_i)}{u^2(\bar{x}_i)} \Delta_i$ che per Δ_i tendente a 0 diventa:

(VI.4.4)
$$e_q = \frac{q^2}{12} \int_{-V}^V \frac{p_s(x)}{u^2(x)} dx$$

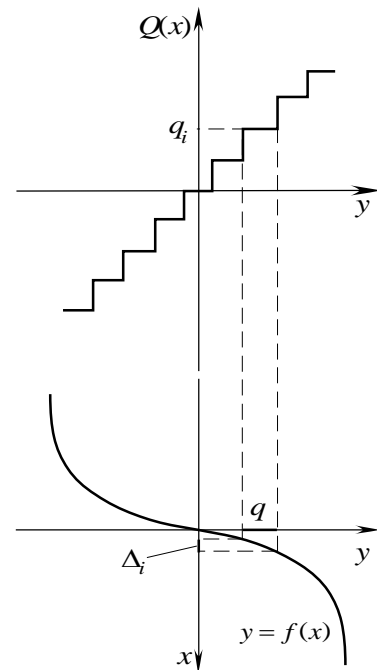


Fig. VI.6 - Errore di quantizzazione.

dove si è denotato con $(-V, V)$ il campo di variabilità del segnale. Supponendo inoltre che $p_s(x)$ sia una funzione pari e legge di compressione una funzione dispari l'errore di quantizzazione si riduce alla:

$$(VI.4.5) \quad e_q = \frac{q^2}{6} \int_0^V \frac{p_s(x)}{u^2(x)} dx$$

Il problema dell'ottimizzazione consiste allora nel ricercare la forma che deve assumere la caratteristica di compressione perché l'errore di quantizzazione raggiunga un minimo. È ovvio che, per ottenere soluzioni non banali del problema, è necessario imporre alla funzione la condizione:

$$(VI.4.6) \quad \int_0^V u(x) dx = \int_0^V df = f(V)$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, la determinazione del valore ottimo $u_o(x)$ che dà luogo ad un minimo di e_q soggetto alla condizione (VI.4.6) è ricondotta alla determinazione del minimo libero del funzionale:

$$(VI.4.7) \quad \varphi[u] = \int_0^V \left[\frac{q^2}{6} \frac{p_s(x)}{u^2(x)} - \lambda u(x) \right] dx$$

con λ costante.

Detta $u_o(x)$ la soluzione ottima, una generica funzione $u(x)$ può essere posta nella forma:

$$(VI.4.8) \quad u(x) = u_o(x) + \delta \xi(x)$$

dove $\xi(x)$ è una funzione continua in $(0, V)$. In tal guisa, il funzionale $\varphi[u]$, considerato come funzione di δ , assume, per ipotesi, il minimo in $\delta = 0$. Dovrà pertanto aversi:

$$(VI.4.9) \quad \begin{aligned} 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} \Big|_{\delta=0} &\equiv \frac{\partial}{\partial \delta} \int_0^V \left[\frac{q^2}{6} \frac{p_s(x)}{(u_o + \delta \xi)^2} - \lambda (u_o + \delta \xi) \right] dx \Big|_{\delta=0} = \\ &= \int_0^V \left\{ \frac{\partial}{\partial \delta} \left[\frac{q^2 p_s(x)}{6(u_o + \delta \xi)^2} - \lambda (u_o + \delta \xi) \right] \right\} dx = \\ &= \int_0^V \left[-\frac{q^2}{3} \frac{p_s(x)}{u_o^3(x)} - \lambda \right] \xi(x) dx \end{aligned}$$

dalla quale, essendo $\xi(x)$ generica, discende:

$$(VI.4.10) \quad \frac{q^2}{3} \frac{p_s(x)}{u_o^3(x)} = \lambda = \text{cost}$$

che fornisce per $u_o(x)$ la soluzione:

$$(VI.4.11) \quad u_o(x) = k p_s^{1/3}(x)$$

Per determinare il valore della costante k basta tener conto della (VI.4.6). Si ha:

$$(VI.4.12) \quad k = \frac{f(V)}{\int_0^V \sqrt[3]{p_s(x)} dx}$$

e quindi $u_o(x)$ vale:

$$(VI.4.13) \quad u_o(x) = f(V) \frac{\sqrt[3]{p_s(x)}}{\int_0^V \sqrt[3]{p_s(x)} dx}$$

In corrispondenza ad $u_o(x)$ l'errore di quantizzazione diventa:

$$(VI.4.14) \quad e_{qm} = \frac{q^2}{6} \int_0^V \frac{p_s(x)}{k^2 \sqrt[3]{p_s(x)}} dx = \frac{q^2}{6 f^2(V)} \left\{ \int_0^V \sqrt[3]{p_s(x)} dx \right\}^2$$

La legge di compressione ottima è infine:

$$(VI.4.15) \quad f_o(x) = \int_0^x u_o(\xi) d\xi = f(V) \frac{\int_0^x p_s^{1/3}(\xi) d\xi}{\int_0^V p_s^{1/3}(\xi) d\xi} \quad 0 \leq x \leq V$$

la cui forma dipende unicamente dalla statistica del primo ordine del segnale $s(t)$.

VI.7 - Applicazione al segnale telefonico.

Un'applicazione delle precedenti considerazioni al caso del segnale telefonico caratterizzato dalla (VI.3.1) fornisce per la legge di compressione ottima l'espressione:

$$(VI.5.1) \quad f_o(x) = f(\infty) \frac{\int_0^x e^{-\frac{\sqrt{2}|\xi|}{3\sigma_s}} d\xi}{\int_0^\infty e^{-\frac{\sqrt{2}|\xi|}{3\sigma_s}} d\xi} = f(\infty) \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{2}x}{3\sigma_s}} \right) \quad 0 \leq x \leq \infty$$

per un assegnato valore quadratico medio di σ_s^2 . Nel dedurre la (VI.5.1) si è posto $V = \infty$. In realtà, come si è precisato precedentemente, il segnale $s(t)$ pur presentando una densità di probabilità del tipo della (VI.3.1), è caratterizzato da un valore quadratico medio dipendente da parlatore a parlatore. Di conseguenza è in tal caso necessario studiare le prestazioni del sistema al variare di σ_s^2 in termini del rapporto segnale rumore definito dalla:

$$(VI.5.2) \quad z_q = \frac{\sigma_s^2}{e_q}$$

Più specificatamente, si segue il criterio di determinare una caratteristica di compressione tale che le prestazioni del sistema risultino indipendenti dalla densità di probabilità $p_s(x)$.

Tenendo conto della (VI.4.5), il rapporto segnale rumore può essere posto nella forma:

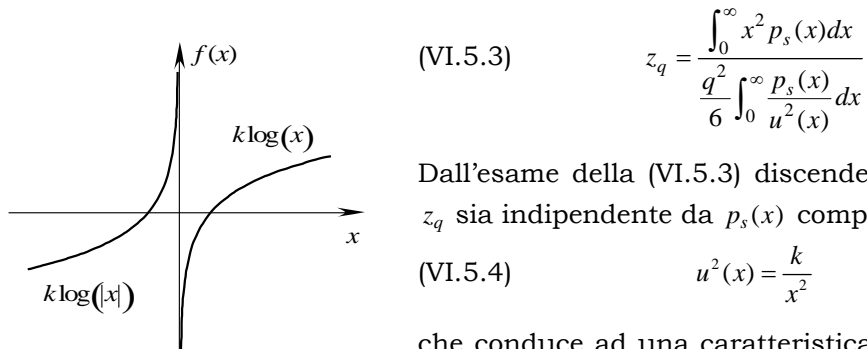


Fig. VI.7 - Caratteristica di compressione logaritmica

$$(VI.5.3) \quad z_q = \frac{\int_0^\infty x^2 p_s(x) dx}{\frac{q^2}{6} \int_0^\infty \frac{p_s(x)}{u^2(x)} dx}$$

Dall'esame della (VI.5.3) discende che la condizione che z_q sia indipendente da $p_s(x)$ comporta:

$$(VI.5.4) \quad u^2(x) = \frac{k}{x^2}$$

che conduce ad una caratteristica di compressione di tipo logaritmo e cioè della forma:

$$(VI.5.5) \quad f(x) = k \ln |x| \cdot \text{sgn}(x)$$

Come si evince dalla Fig. VI.7, tale caratteristica non è continua all'origine cosicché è necessario procedere ad una transizione continua tra la caratteristica logaritmica e un segmento passante per l'origine. Sono state così proposte due forme di caratteristiche di compressione e precisamente:

1) **legge di compressione A**, proposta dal CCITT (Comitato Consultivo Internazionale per la Telefonia e Telegrafia), definita dalla:

$$(VI.5.6) \quad \frac{f(x)}{V} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \frac{A \left| \frac{x}{V} \right|}{1 + \ln A} & 0 \leq \left| \frac{x}{V} \right| \leq \frac{1}{A} \\ \operatorname{sgn}(x) \frac{1 + \ln \left(A \left| \frac{x}{V} \right| \right)}{1 + \ln A} & \frac{1}{A} \leq \left| \frac{x}{V} \right| \leq 1 \end{cases}$$

e adottata nell'area europea;

2) la **legge di compressione μ** , utilizzata dalla Bell System e adottata nel Nord America, definita dalla:

$$(VI.5.7) \quad \frac{f(x)}{V} = \operatorname{sgn}(x) \frac{\ln \left(1 + \mu \left| \frac{x}{V} \right| \right)}{\ln(1 + \mu)}$$

Tali caratteristiche sono rappresentate in Fig. VI.8 per diversi valori dei parametri A e μ .

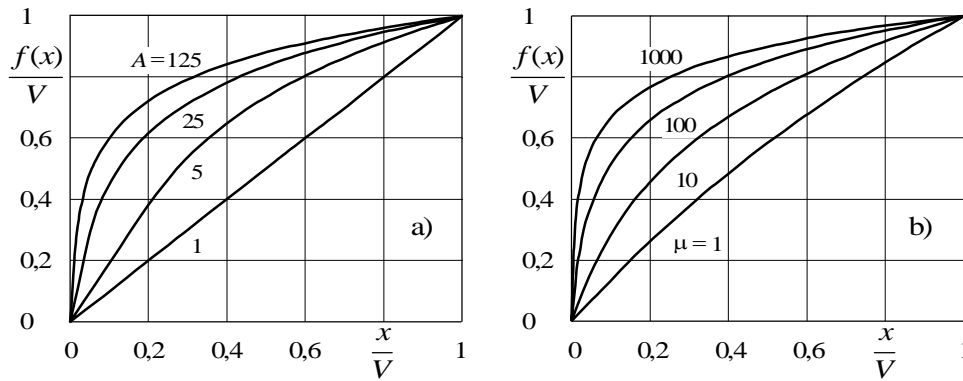


Fig. VI.8 Leggi di compressione: a) del tipo A; b) del tipo μ

VI.8 - Legge di compressione a segmenti.

Le caratteristiche dei compressori precedentemente introdotte sono realizzate approssimando la caratteristica con una serie di corde o segmenti. Tale segmentazione è inoltre scelta in modo tale che la pendenza in ogni tratto risulta metà di quella che lo precede. La legge di compressione A è realizzata con 15 segmenti, mentre la legge di compressione μ con 13 segmenti.

Con riferimento alla Fig. VI.9, che rappresenta la legge di compressione A segmentata, si noti che la pendenza del segmento iniziale vale $\frac{1/8}{1/128} = 16$ e deve coincidere con il valore della pendenza della legge di compressione A nel suo tratto iniziale. Tenendo conto della (VI.5.6) si ha allora:

$$(VI.5.8) \quad \left. \frac{df}{dx} \right)_{x/V=1/128} = \frac{A}{1 + \ln A} = 16$$

che fornisce per A il valore 87,6.

Una condizione analoga riportata sulla legge di compressione μ fornisce:

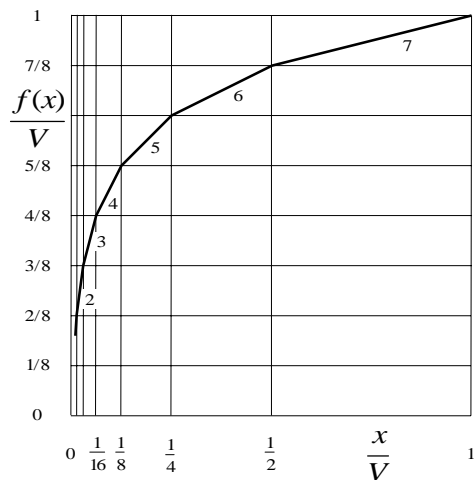


Fig. VI.9 - Segmentazione della legge di compressione A.

$$(VI.5.9) \quad \left. \frac{df}{dx} \right)_{x/V=1/64} = \frac{\mu}{\ln(1+\mu)} \frac{1}{1+\mu/64} = \frac{1/7}{1/64}$$

dalla quale si deduce $\mu = 255$.

Per quanto riguarda i sistemi di telefonia a standard europeo i livelli di quantizzazione (in numero di $2^8 = 256$) sono distribuiti in parti eguali per ogni tratto. Ad ogni segmento della caratteristica A competono pertanto 16 livelli i quali sono uniformemente distribuiti nell'ambito di uno stesso segmento. Nella Tab. I sono riportati i segmenti della caratteristica A, numerati da 0 a 7, i valori delle ascisse (normalizzate) che li definiscono nonché i livelli relativi della quantizzazione uniforme segmento per segmento.

Tabella VI.I - Intervalli di quantizzazione per la legge di compressione A

Segmento	0	1	2	3	4	5	6	7
Estremi del segmento	$0, \frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}, \frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}, \frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}, \frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}, \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, 1$
Livelli di decisione	0,15	16,31	32,47	48,63	64,79	80,95	96,111	112,127

È facile riconoscere che gli estremi di ogni segmento è definito, in funzione del numero d'ordine che lo caratterizza dalle:

$$(VI.5.10) \quad \begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2^{8-i}} & b_i &= \frac{1}{2^{7-i}} & i &\neq 0 \\ a_0 &= 0 & b_0 &= \frac{1}{2^7} & i &= 0 \end{aligned}$$

È da osservare che nell'ambito di un generico segmento la caratteristica di quantizzazione è lineare ma ad essa corrisponde un'ampiezza dell'intervallo quantico dipendente dalla sua pendenza. Così ad esempio, nel tratto 1, l'ampiezza degli intervalli quantici è pari ad $\frac{1}{16}$ di quella dovuta alla quantizzazione lineare ed i livelli che ad esso competono sono compresi fra il 16° ed il 31°; mentre nel quarto tratto l'ampiezza dell'intervallo quantico è pari a $\frac{1}{2}$ di quello uniforme ed i livelli sono compresi fra il 64° ed il 79°.

VI.9 - Modulazione PCM.

Il processo di campionamento e di quantizzazione trasforma il messaggio $s(t)$ in un segnale $v_q(t)$ ad M livelli. Ad ogni livello di quantizzazione q_i si può far corrispondere un elemento l_i dell'insieme di numeri naturali $\{l_1, l_2, \dots, l_M\}$; tale corrispondenza offre

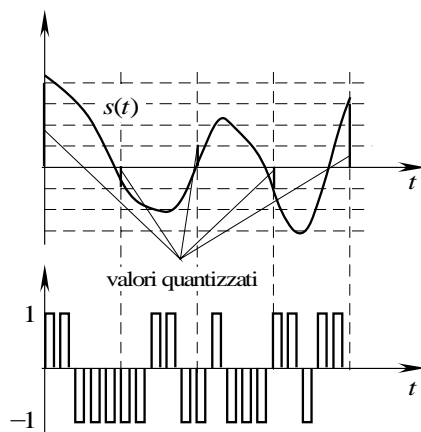


Fig. VI.8 - Codifica PCM.

l'opportunità di convertire ciascun valore l_i secondo una numerazione a base b . La rappresentazione del numero in questa base sarà ottenuta da una successione del tipo

$$(VI.6.1) \quad \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\dots\alpha_1\alpha_0 \quad \alpha_i \in B$$

composta da n cifre α_i scelti da un opportuno insieme B , che costituisce l'alfabeto. È ovvio che il massimo numero di interi che possono essere rappresentati nella base B è b^n e quindi dalla

$$(VI.6.2) \quad M = b^n$$

si deduce:

$$(VI.6.3) \quad n = \log_b M$$

Di norma la conversione si effettua su base binaria ($b = 2$). In tal caso risulta:

$$(VI.6.4) \quad n = \log_2 M$$

e l'insieme B è costituito dalle cifre 0 e 1.

I simboli binari 0 e 1 possono essere codificati con una codifica binaria (ad es. la codifica bipolare) cosicché ogni valore q_i del segnale quantizzato è convertito in un treno di impulsi, come è indicato in Fig. VI.8, denominato **blocco** o **parola**.

I sistemi di trasmissione che utilizzano le tecniche di quantizzazione e successiva codifica, sin qui esaminate, sono comunemente noti con il nome di **sistemi di modulazione a impulsi codificati** o **sistemi PCM** (*Pulse Code Modulation*).

Per quanto la codifica del segnale può essere fatta impiegando un sistema di numerazione a base B (PCM a più livelli) di gran lunga il più adoperato è il sistema PCM binario al quale d'ora in avanti ci si riferisce.

Con riferimento alla Fig. V.8, si deduce che, detto T_0 il periodo di campionamento, la cadenza degli impulsi PCM è:

$$(VI.6.5) \quad T = \frac{T_0}{n}$$

al quale corrisponde una velocità di trasmissione data dalla:

$$(VI.6.6) \quad r = \frac{1}{T} = \frac{n}{T_0}$$

D'altra parte, se con f_m si denota l'ampiezza di banda del segnale $s(t)$, per il teorema del campionamento deve essere $\frac{1}{T_0} \geq 2f_m$; inoltre perchè il segnale numerico in banda base possa essere trasmesso in un canale di banda B si deve avere $\frac{1}{T} \leq 2B$. Queste limitazioni comportano:

$$(VI.6.7) \quad 2nf_m \leq \frac{1}{T} \leq 2B$$

dalle quali:

$$(VI.6.8) \quad n \leq \text{Int} \left[\frac{B}{f_m} \right]$$

Nei sistemi di trasmissione telefonica, la banda del segnale è scelta pari a $f_m = 4 \text{ kHz}$ ed il numero delle cifre del segnale codificato è pari a $n = 8$. Quindi è:

$$(VI.6.9) \quad T_0 = \frac{1}{8 \cdot 10^3} = 125 \mu\text{sec} \quad T = \frac{125}{8} = 15,6 \mu\text{sec} \quad M = 2^8 = 256$$

Nei sistemi PCM a standard europeo la prima cifra dell'ottetto, corrispondente alla parola codificata, denotata con S , è il bit di segno. Ad esso si attribuisce il simbolo 1 se il campione è positivo, 0 se è negativo.

Le rimanenti 7 cifre cui corrispondono un numero di $2^7 = 128$ di livelli sono distinti in due gruppi:

a) le prime tre cifre, denotate con A, B, C , individuano il segmento della caratteristica. Se i denota il numero d'ordine del segmento, le cifre A, B, C sono definite dalla:

$$(VI.6.10) \quad i = A2^2 + B2^1 + C2^0$$

che corrisponde alla codifica binaria del numero i .

Per determinare il valore dell'indice i , detto x il generico valore del campione da trasmettere, il numero d'ordine del segmento si ottiene dalla condizione:

$$(VI.6.11) \quad a_i \leq x < b_i$$

Con $i \neq 0$, tenendo conto delle (VI.5.10) è:

$$(VI.6.12) \quad \frac{1}{2^{8-i}} \leq x < \frac{1}{2^{7-i}}$$

da cui:

$$(VI.6.13) \quad i = \text{Int}[8 + \log_2 x] = \text{Int}\left[8 + \frac{\log x}{\log 2}\right]$$

Se è $x < b_0$ è ovviamente $i = 0$.

b) le ultime quattro cifre, denotate con x, y, z, w , individuano il livello di quantizzazione l , nell'ambito del segmento, che compete al campione quantizzato. Esse sono ottenute dalla codifica binaria del livello l :

$$(VI.6.14) \quad l = x2^3 + y2^2 + z2^1 + w2^0$$

Per determinare il livello l , basta osservare che, detto

$$(VI.6.15) \quad \begin{aligned} r &= x & i &= 0 \\ r &= x - a_i & i &= 1, 2, \dots, 7 \end{aligned}$$

il residuo, l'ordine del livello è definito dalla:

$$(VI.6.16) \quad l \leq \frac{r}{\delta_i} < l+1$$

dove δ_i denota l'ampiezza del gradino relativa al segmento in cui è contenuto il campione x . D'altra parte, essendo per $i \neq 0$, $b_i = 2a_i$ e ricordando che in ogni segmento sono contenuti $2^4 = 16$ gradini, è:

$$(VI.6.17) \quad \begin{aligned} \delta_i &= \frac{b_i - a_i}{16} = 2^{-4} a_i = 2^{-4} 2^{i-8} = 2^{i-12} \quad i = 1, 2, \dots, 7 \\ \delta_0 &= 2^{-11} \end{aligned}$$

e quindi:

$$(VI.6.18) \quad l = \text{Int}\left[\frac{r}{\delta_i}\right]$$

In Fig. VI.11 è riportato uno schema di trasmissione PCM. Il rivelatore è costituito da un filtro adattato cui segue un circuito di decisione del tipo di quelli esaminati nel Cap. I. Il decodificatore fornisce un segnale analogico (PAM quantizzato).

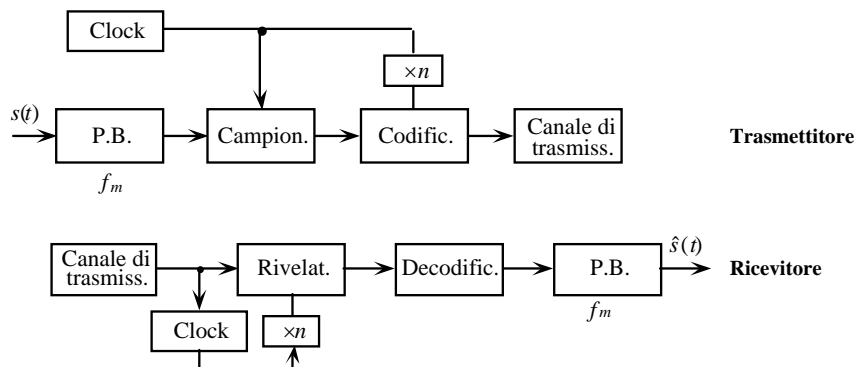


Fig. VI.11 - Trasmissione PCM in banda base.

Il segnale di sincronismo generato da un orologio (clock) serve per comandare i dispositivi di campionamento e conversione. Tale clock è ricostruito al ricevitore a partire dal segnale in arrivo e viene adoperato per il comando del rivelatore e dei dispositivi di conversione.

La ricostruzione del messaggio $\hat{s}(t)$ avviene filtrando con un filtro passa-basso il segnale PAM rigenerato al ricevitore.

VI.10 - Valutazione delle prestazioni di un sistema PCM.

In un sistema di modulazione PCM la qualità della trasmissione è influenzata dall'errore di quantizzazione e di rivelazione; cosicchè il segnale rivelato può essere rappresentato dalla:

$$(VI.7.1) \quad \hat{s}(t) = s(t) + n_q(t) + n_r(t)$$

in cui gli effetti del rumore di quantizzazione e di quello di rivelazione, dovuto al rumore introdotto nel canale, sono stati schematizzati rispettivamente con $n_q(t)$ e $n_r(t)$ rispettivamente.

Per valutare l'efficienza di un sistema di modulazione si introduce il rapporto segnale rumore γ , che è definito dalla:

$$(VI.7.2) \quad \gamma = \frac{E\{s^2(t)\}}{E\{[n_q(t) + n_r(t)]^2\}}$$

Se i segnali che intervengono nella (VI.7.1) sono stazionari, la quantità γ può essere calcolata in corrispondenza al generico istante di campionamento $t_k = kT_0$ per cui si può scrivere:

$$(VI.7.3) \quad \gamma = \frac{E\{s^2(t_k)\}}{E\{[n_q(t_k) + n_r(t_k)]^2\}}$$

In quel che segue si suppone la quantizzazione uniforme e la codifica del generico livello di quantizzazione l_k avvenga secondo la legge:

$$(VI.7.4) \quad l_k = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{ik} 2^i \quad \alpha_{ik} \in \{0,1\}$$

Con riferimento alla (VI.7.3), la potenza specifica N del rumore che interviene nella modulazione PCM vale:

$$(VI.7.5) \quad N = E\{[n_q(t_k) + n_r(t_k)]^2\} = E\{n_q^2(t_k)\} + 2E\{n_q(t_k)n_r(t_k)\} + E\{n_r^2(t_k)\}$$

che, supponendo i rumori di quantizzazione e di rivelazione indipendenti, diventa:

$$(VI.7.6) \quad N = E\{n_q^2(t_k)\} + 2E\{n_q(t_k)\}E\{n_r(t_k)\} + E\{n_r^2(t_k)\}$$

Il valore quadratico medio del rumore di quantizzazione, supponendo una quantizzazione uniforme con passo q e un numero di livelli sufficientemente elevato, vale $\frac{q^2}{12}$; esso inoltre è manifestamente a media nulla.

Per valutare il valore quadratico medio dell'errore di rivelazione $E\{n_r^2(t_k)\}$ basta osserva-

re che il rumore introdotto dal canale provoca delle decisioni al ricevitore che conducono ad un errore nella rivelazione del dato. Occorre quindi considerare tali errori nella sequenza di n cifre che compongono la parola del messaggio trasmesso. Se nel processo di rivelazione si commette un errore nella cifra meno significativa la stima \hat{s}_q del segnale quantizzato sarà affetta da un errore q . Il valore quadratico medio dell'errore sarà quindi $q^2 P_e$ dove P_e rappresenta la probabilità di errore di rivelazione. Se la cifra rivelata erroneamente si trova al penultimo posto della parola trasmessa, l'errore sul segnale rivelato sarà $2q$ e il suo valore quadratico medio $(2q)^2 P_e$. E così di seguito. Se la probabilità di errore è sufficientemente bassa, è estremamente improbabile che più di una cifra della parola trasmessa sia rivelata erroneamente; di conseguenza il valore quadratico medio dell'errore di rivelazione può scriversi nella forma:

$$(VI.7.7) \quad \begin{aligned} E\{n_r^2(t_k)\} &= q^2 P_e + (2q)^2 P_e + \dots + (2^{n-1} q)^2 P_e = \\ &= q^2 P_e \sum_{i=0}^{n-1} (2^i)^2 = q^2 P_e \frac{2^{2n} - 1}{2^2 - 1} = \frac{1}{3} q^2 P_e (2^{2n} - 1) \end{aligned}$$

La (VI.7.6) diventa:

$$(VI.7.8) \quad N = \frac{q^2}{12} + \frac{1}{3} q^2 P_e (2^{2n} - 1) = \frac{q^2}{12} [1 + 4P_e (2^{2n} - 1)]$$

e quindi il rapporto segnale rumore è:

$$(VI.7.9) \quad \gamma = \frac{P_s}{\frac{q^2}{12} [1 + 4P_e (2^{2n} - 1)]} = \frac{3M^2}{1 + 4P_e (M^2 - 1)} \left(\frac{P_s}{V^2} \right)$$

dove si è tenuto conto della (VI.6.4) e si è denotato con P_s il valore quadratico medio del segnale $s(t)$.

VI.11. - Sistema PCM differenziale.

Nei sistemi PCM, presi sin qui in considerazione, la quantizzazione di un campione del segnale in ingresso è effettuata indipendentemente dalla presenza degli altri campioni adiacenti. In realtà, a causa della correlazione esistente tra i campioni del segnale, i campioni precedenti possono essere adoperati per prevedere il valore del campione corrente. Di conseguenza se si pensa di quantizzare la differenza fra il valore corrente e quello predetto sulla base di N precedenti campioni, è possibile ottenere un sistema che, a parità di altre condizioni, richieda un numero minore di bit. Tali sistemi vanno sotto il nome di **sistemi PCM differenziali** (DPCM).

Nei sistemi DPCM la predizione \hat{x}_n del campione x_n è ottenuta da una combinazione lineare dei valori degli N campioni che lo precedono (predizione lineare) secondo la legge:

$$(VI.7.10) \quad \hat{x}_n = \sum_{i=1}^N c_i x_{n-i}$$

Il predittore risulta così costituito da un filtro trasversale di lunghezza N i cui pesi coincidono con i coefficienti c_i . Se x_n è il valore del campione corrente, l'errore di predizione vale:

$$(VI.7.11) \quad \varepsilon_n = x_n - \hat{x}_n = x_n - \sum_{i=1}^N c_i x_{n-i}$$

ed il suo valore quadratico medio è:

$$(VI.7.12) \quad e_n = E\{\varepsilon_n^2\} = E\left\{\left[x_n - \sum_{i=1}^N c_i x_{n-i}\right]^2\right\} =$$

$$= E\{x_n^2\} - 2 \sum_{i=1}^N c_i E\{x_{n-i} x_n\} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j E\{x_{n-i} x_{n-j}\}$$

Se con $R_x(k)$ si denota l'autocorrelazione della sequenza $\{x_n\}$, supposta stazionaria:

$$(VI.7.13) \quad R_x(k) = E\{x_n x_{n+k}\}$$

la precedente può scriversi come segue:

$$(VI.7.14) \quad e_n = R_x(0) - 2 \sum_{i=1}^N c_i R_x(i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j R_x(i-j)$$

L'errore di predizione dipende dall'insieme dei coefficienti c_i ; cosicché un'opportuna scelta per le c_i è quella che conduce al minimo di e_n e cioè quella che si ottiene dalla soluzione delle equazioni

$$(VI.7.15) \quad \frac{\partial e_n}{\partial c_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Tenendo conto della (VI.7.14) le (VI.7.15) diventano:

$$(VI.7.16) \quad \sum_{j=1}^N c_j R_x(i-j) = R_x(i) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

che costituiscono un sistema lineare di N equazioni nelle N incognite c_i .

Lo schema di un trasmettitore e di un ricevitore DPCM si presenta come è indicato in Fig. VI.13.

Nello schema di Fig. VI.12 a) l'errore di predizione e_n è sottoposto ad una quantizzazione uniforme, codificato e inviato al canale di trasmissione. Al ricevitore al segnale ricevuto \tilde{e}_n è sommata la predizione \hat{x}_n del campione per ottenerne l'esatto valore x_n .

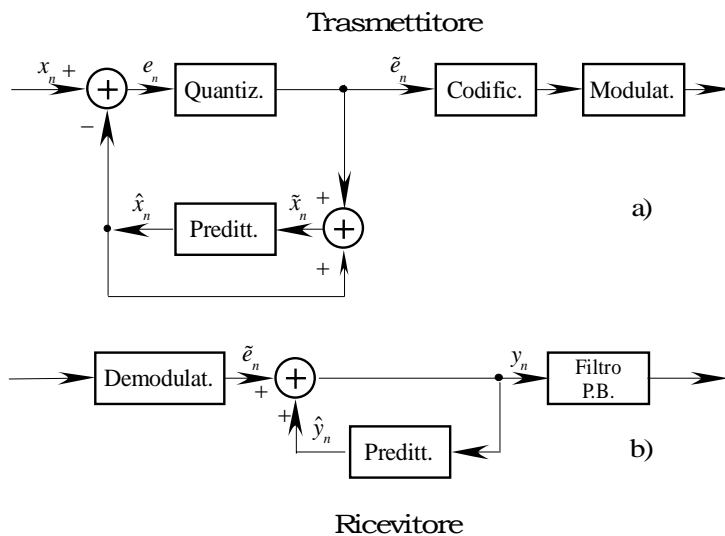


Fig. VI.12. - Sistema DPCM.

Per meglio comprendere il funzionamento del sistema si prenda in esame lo schema del trasmettitore. Si ha:

$$(VI.7.17) \quad e_n = x_n - \hat{x}_n$$

e

$$(VI.7.18) \quad \tilde{x}_n = \tilde{e}_n + \hat{x}_n$$

che, tenendo conto della (VI.7.10), diventa:

$$(VI.7.19) \quad \tilde{x}_n = \tilde{e}_n + \sum_{i=1}^N c_i \tilde{x}_{n-i}$$

Facendo riferimento allo schema del ricevitore si può scrivere:

$$(VI.7.20) \quad y_n = \tilde{e}_n + \hat{y}_n = \tilde{e}_n + \sum_{i=1}^N c_i y_{n-i}$$

Dal confronto tra la (VI.7.19) e la (VI.7.20) si può concludere che le sequenze $\{\tilde{x}_n\}$ e $\{y_n\}$ obbediscono alla stessa equazione alle differenze; di conseguenza, se in entrambi i casi sono eguali le condizioni iniziali, ad esempio se è $\tilde{x}_{-1} = \tilde{x}_{-2} = \dots = \tilde{x}_{-N} = 0$ e $y_{-1} = y_{-2} = \dots = y_{-N} = 0$, si ha che, per ogni n , vale l'eguaglianza:

$$(VI.7.21) \quad y_n = \tilde{x}_n$$

e cioè il segnale ricevuto y_n equivale ad una forma quantizzata del segnale in ingresso.

Con riferimento alla Fig. VI.12, a), l'errore di quantizzazione vale:

$$(VI.7.22) \quad \varepsilon_q = \tilde{e}_n - e_n = \tilde{e}_n - (x_n - \hat{x}_n) = \tilde{e}_n - x_n + \hat{x}_n = \tilde{x}_n - x_n$$

che in base alla (VI.7.21) diventa:

$$(VI.7.23) \quad \varepsilon_q = y_n - x_n$$

Ciò significa che la differenza fra x_n e la sua riproduzione y_n è la stessa di quella fra l'ingresso e l'uscita del quantizzatore facente parte del modulatore. Ma poiché l'entità della variazione $\tilde{x}_n - x_n$ è limitata, il segnale in uscita dal trasmettitore può essere quantizzato in un numero minore di livelli e di conseguenza la parola trasmessa presenta un numero minore di simboli binari.

VI.12. - Modulazione delta (DM)

Nella modulazione delta la predizione del generico campione avviene secondo la legge:

$$(VI.8.1) \quad \hat{x}_n = x_{n-1}$$

Il corrispondente valore quadratico medio dell'errore di predizione risulta:

$$(VI.8.2) \quad E\{(x_n - \hat{x}_n)^2\} = E\{x_n^2\} - 2E\{x_{n-1}x_n\} + E\{x_{n-1}^2\} = 2[R_x(0) - R_x(1)]$$

dalla quale si deduce che per poter prevedere correttamente il valore del campione corrente è necessario che la sequenza $\{x_n\}$ sia fortemente correlata cosicché $R_x(1)$ sia abbastanza

prossimo a $R_x(0)$. Tale circostanza può essere ottenuta se si riduce il periodo di campionamento del segnale o, che è lo stesso, se si campiona il segnale con una velocità superiore del limite di Nyquist.

Per ridurre il numero dei simboli binari inviati nell'unità di tempo nel canale di trasmissione è necessario semplificare la struttura del quantizzatore.

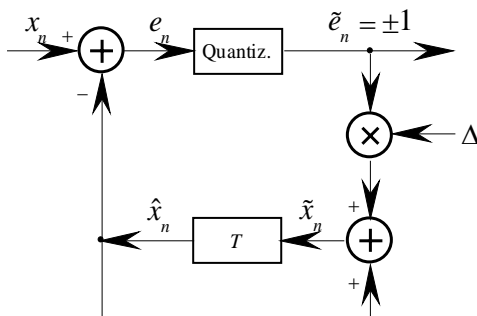


Fig. VI.13 - Schema di un trasmettitore per sistema DM.

Nei sistemi DM il quantizzatore è a due livelli; il segnale restituito può assumere il valore ± 1 a seconda

se il dato in ingresso sia positivo o negativo.

Lo schema di un trasmettitore DM si presenta così come è mostrato in Fig. VI.13. dove il predittore è composto da una cella di ritardo di valore eguale al periodo di campionamento del segnale.

Se si fa riferimento allo schema di Fig. VI.13 si ha:

$$(VI.8.3) \quad \hat{x}_n = \tilde{x}_{n-1} = \Delta \tilde{e}_{n-1} + \hat{x}_{n-1}$$

che, supposte nulle le condizioni iniziali, equivale alla:

$$(VI.8.4) \quad \hat{x}_n = \Delta \sum_{i=0}^n \tilde{e}_i$$

e cioè il segnale \hat{x}_n è ottenuto semplicemente mediante un accumulatore operando cioè la somma

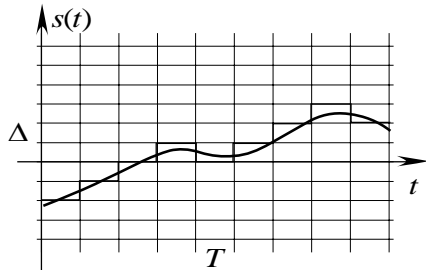


Fig. VI.15 - Segnale approssimante.

delle quantità $\Delta \tilde{e}_n$ come è mostrato in Fig. VI.14. In Fig. VI.15 è indicato l'andamento del segnale approssimante per un'assegnata forma del segnale in ingresso. Il ricevitore infine può essere realizzato come è indicato in Fig. VI.16. Nella modulazione delta il valore della quantità Δ è critico. Infatti un alto valore di Δ comporta un notevole errore di approssimazione (rumore granulare), mentre un piccolo valore di Δ può dare problemi poiché la funzione approssimante non riesce a seguire l'andamento del segnale $s(t)$ laddove quest'ultimo presenta una pendenza relativamente alta (distorsione per elevata pendenza).

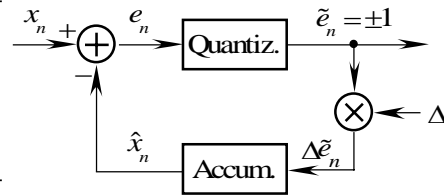


Fig. VI.14 - Trasmettitore per sistemi DM.

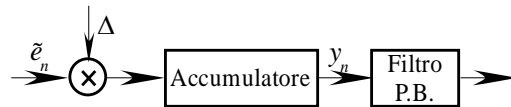


Fig. VI.16 - Ricevitore per sistemi DM.