

LA MODULAZIONE D'ANGOLO

Un importante tipo di modulazione, discussa in questo Capitolo, è costituito dalla modulazione d'angolo che comprende le modulazioni di fase e di frequenza. In particolare è determinata la potenza specifica del segnale modulato, e l'estensione spettrale del segnale modulato è valutata usando la formula di Carson. Sono anche presentati gli schemi più comuni dei modulatori e dei rivelatori per la modulazione di frequenza con particolare attenzione al rivelatore ad aggancio di fase.

II.1 - Premessa.

L'espressione generale di un segnale modulato d'angolo è:

$$(II.1.1) \quad v(t; s(t)) = V_0 \cos[2\pi f_0 t + \varphi(t) + \varphi_0]$$

dove f_0 e φ_0 rappresentano la frequenza e la fase propria della portante non modulata e $\varphi(t)$ la deviazione istantanea di fase. La deviazione istantanea di frequenza è definita dalla:

$$(II.1.2) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

A seconda della natura della relazione fra la deviazione istantanea di fase o di frequenza e il segnale modulante $s(t)$ si possono distinguere due diverse forme di modulazione d'angolo; precisamente:

a) la **modulazione di fase (PM Phase Modulation)** in cui la deviazione istantanea di fase varia proporzionalmente al segnale modulante:

$$(II.1.3) \quad \varphi(t) = k_P s(t)$$

dove la costante k_P dipende dalle caratteristiche del modulatore. Il segnale modulato è quindi:

$$(II.1.4) \quad v(t; s(t)) = V_0 \cos[2\pi f_0 t + k_P s(t) + \varphi_0]$$

b) la **modulazione di frequenza (FM Frequency Modulation)** in cui la deviazione istantanea di frequenza è proporzionale al segnale modulante secondo la:

$$(II.1.5) \quad \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_F s(t)$$

essendo k_F una costante dipendente dalle caratteristiche del modulatore.

Per il segnale modulato in frequenza la (II.1.5) assume la forma:

$$(II.1.6) \quad v(t; s(t)) = V_0 \cos \left[2\pi f_0 t + 2\pi k_F \int_{t_0}^t s(\tau) d\tau + \varphi_0 \right]$$

essendo t_0 l'istante scelto come iniziale.

È facile dedurre che l'espressione generale di un segnale modulato in angolo può essere posta nella seguente forma generale:

$$(II.1.7) \quad v(t; s(t)) = V_0 \cos[2\pi f_0 t + \beta m(t) + \varphi_0]$$

dove $m(t)$ denota il segnale "modulante" normalizzato

$$(II.1.8) \quad |m(t)| \leq 1$$

e la costante β rappresenta l'**indice di modulazione**.

Nel caso di modulazione di fase la (II.1.4) si identifica con la (II.1.7) ponendo:

$$(II.1.9) \quad m(t) = \frac{s(t)}{\left|s(t)\right|_{\max}} \quad \beta = k_p \left|s(t)\right|_{\max}$$

mentre, nel caso di modulazione di frequenza, l'identità tra le (II.1.6) e (II.1.7) comporta:

$$(II.1.10) \quad m(t) = \frac{\int_{t_0}^t s(\tau) d\tau}{\left|\int_{t_0}^t s(\tau) d\tau\right|_{\max}} \quad \beta = 2\pi k_f \left|\int_{t_0}^t s(\tau) d\tau\right|_{\max}$$

Esempio E.II.1

Nel caso in cui il segnale modulante è costituito da una componente monocromatica del tipo:

$$s(t) = V_m \cos(2\pi f_m t)$$

le quantità $m(t)$ e β valgono:

$$m(t) = \cos(2\pi f_m t) \quad \beta = k_p V_m \quad \text{PM}$$

$$m(t) = \sin(2\pi f_m t) \quad \beta = \frac{k_f V_m}{f_m} \quad \text{FM}$$

cosicché nel caso della modulazione di fase la massima deviazione della fase istantanea è:

$$\Delta\phi = \beta = k_p f_m$$

e, nel caso della modulazione di frequenza, la massima deviazione della frequenza istantanea è:

$$\Delta f = \frac{\beta}{2\pi} \left| \frac{dm(t)}{dt} \right|_{\max} = \beta f_m = k_f V_m$$

II.2 - Potenza specifica del segnale modulato.

La potenza specifica del segnale modulato in angolo è espressa dalla:

$$(II.2.1) \quad P_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T v^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V_0^2 \cos^2 [2\pi f_0 t + \beta m(t) + \phi_0] dt$$

dove si fatto uso della (II.1.7). Si ha:

$$(II.2.2) \quad P_v = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{V_0^2}{2} \int_{-T}^T \{1 + \cos [4\pi f_0 t + 2\beta m(t) + 2\phi_0]\} dt$$

che, supponendo che l'ampiezza do banda f_m del segnale modulante $m(t)$ sia molto minore della frequenza della portante ($f_m \ll f_0$), si riduce alla

$$(II.2.3) \quad P_v = \frac{V_0^2}{2}$$

dato che il secondo integrale può ritenersi trascurabile.

La potenza specifica di un segnale modulato in angolo non dipende dal segnale modulante e si riduce alla sola potenza della portante non modulata.

II.3 - Caratteristiche spettrali del segnale modulato.

Con riferimento alla (II.1.7) è facile rendersi conto che la dipendenza del segnale modulato $v(t)$ dal segnale modulante $m(t)$ non è lineare; per questo motivo è difficile determinare, nel caso generale, lo spettro di $v(t)$ in dipendenza delle caratteristiche del messaggio $m(t)$. Tuttavia se $m(t)$ è un segnale periodico è facile dedurre la forma dello spettro di $v(t)$.

A tal proposito ponendo per semplicità di trattazione $\phi_0 = 0$ nella (II.1.7) si ha:

$$(II.3.1) \quad v(t) = V_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{j2\pi f_0 t} e^{j\beta m(t)} \right\}$$

Detto T_m il periodo di $m(t)$, la quantità $e^{j\beta m(t)}$ è una funzione periodica di periodo T_m e pertanto si può scrivere:

$$(II.3.2) \quad e^{j\beta m(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_m t}$$

dove $f_m = \frac{1}{T_m}$ e i coefficienti C_k sono dati dalla:

$$(II.3.3) \quad C_k = \frac{1}{T_m} \int_{T_m} e^{j\beta m(t)} e^{-j2\pi k f_m t} dt$$

Se il segnale è sinusoidale, si ha per la (II.3.3):

$$(II.3.4) \quad C_k = \frac{1}{T_m} \int_{-\frac{T_m}{2}}^{\frac{T_m}{2}} e^{j[\beta \sin 2\pi f_m t - 2\pi k f_m t]} dt$$

che, con la posizione $x = 2\pi f_m t$, diventa:

$$(II.3.5) \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j[\beta \sin x - kx]} dx = J_k(\beta)$$

essendo $J_k(\beta)$ la funzione di Bessel di prima specie di ordine k . È pertanto:

$$(II.3.6) \quad e^{j\beta m(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{j2\pi k f_m t}$$

e quindi dalla (II.3.1) discende:

$$(II.3.7) \quad v(t) = V_0 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) e^{j2\pi k f_m t} e^{j2\pi f_0 t} \right\} = V_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cos[2\pi(f_0 + k f_m)t]$$

Notando che

$$(II.3.8) \quad \begin{aligned} J_{-k}(\beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j[\beta \sin x + kx]} dx = -\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^0 e^{j[\beta \sin(\pi-y) + k(\pi-y)]} dy = \\ &= e^{jk\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j[\beta \sin y - ky]} dy = (-1)^k J_k(\beta) \end{aligned}$$

risulta:

$$(II.3.9) \quad \begin{aligned} v(t) &= V_0 J_0(\beta) \cos 2\pi f_0 t + \\ &+ V_0 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos[2\pi(f_0 + 2k f_m)t] + V_0 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta) \cos[2\pi(f_0 - 2k f_m)t] + \\ &+ V_0 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \cos[2\pi(f_0 + (2k+1)f_m)t] - V_0 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \cos[2\pi(f_0 - (2k+1)f_m)t] \end{aligned}$$

che trasformata secondo Fourier fornisce:

$$(II.3.10) \quad \begin{aligned} V(f) &= \frac{V_0 J_0(\beta)}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \frac{V_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\beta) \left\{ \delta[f - (f_0 + 2k f_m)] + \delta[f + (f_0 + 2k f_m)] + \right. \\ &\left. + \delta[f - (f_0 - 2k f_m)] + \delta[f + (f_0 - 2k f_m)] \right\} + \\ &+ \frac{V_0}{2} \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k+1}(\beta) \left\{ \delta[f - (f_0 + (2k+1)f_m)] + \delta[f + (f_0 + (2k+1)f_m)] + \right. \\ &\left. + \delta[f - (f_0 - (2k+1)f_m)] + \delta[f + (f_0 - (2k+1)f_m)] \right\} \end{aligned}$$

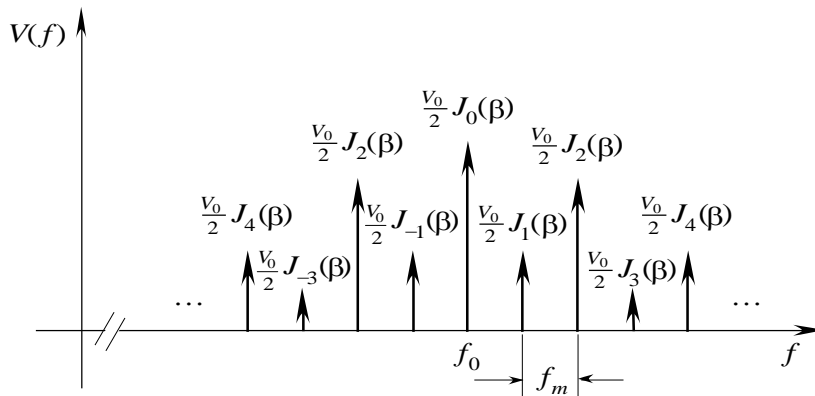


Fig. II.1 - Spettro di un segnale modulato in angolo con modulante sinusoidale.

Dalla (II.3.10) si deduce che lo spettro del segnale $v(t)$ si compone di una serie di righe disposte simmetricamente attorno a f_0 e a $-f_0$ com'è mostrato in Fig. II.1 per un assegnato valore dell'indice di modulazione β e tali righe si succedono ad intervalli di frequenza regolari e di valore pari a f_m .

II.4 - Ampiezza di banda del segnale modulato.

Da quanto esposto nel paragrafo precedente si può dedurre che l'ampiezza di banda di un segnale modulato d'angolo, almeno nel caso di modulante sinusoidale, è infinita. Tuttavia se si considera il fatto che le ampiezze delle armoniche presenti nello spettro decrescono se ci si allontana dalla frequenza della portante è possibile definire un'ampiezza di banda efficace limitata. È da osservare inoltre che tale ampiezza di banda dipende dall'indice di modulazione β poiché il coefficiente dell'armonica di ordine n è proporzionale alla funzione $J_n(\beta)$. In Fig. II.2 è riportato l'andamento di alcune funzioni di Bessel in dipendenza del parametro β .

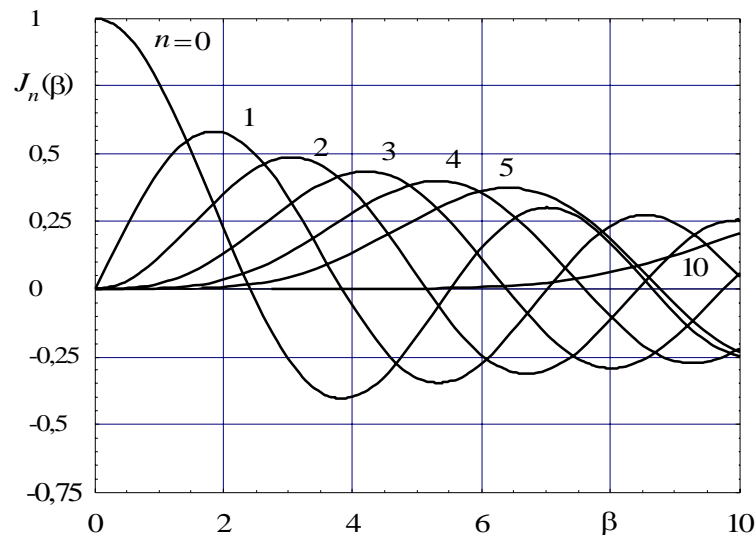


Fig. II.2 - Funzioni di Bessel di prima specie.

Facendo riferimento alla (II.3.9) è immediato riconoscere che la potenza $P_v = \frac{V_0^2}{2}$ del segnale modulato può essere espressa, nel caso di modulante sinusoidale, nella forma:

$$(II.4.1) \quad P_v = \frac{V_0^2}{2} \left[J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(\beta) \right]$$

Di conseguenza l'aliquota di potenza che, per un assegnato valore dell'indice di modulazione, è contenuta nelle prime N armoniche dello spettro, vale:

$$(II.4.2) \quad P_N = \frac{V_0^2}{2} \left[J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^N J_n^2(\beta) \right]$$

Questo comporta che se si vuole definire la banda equivalente sulla base della potenza, basta considerare il valore dell'intero N in corrispondenza del quale le N armoniche contenute nello spettro del segnale danno luogo a una potenza che sia un'aliquota ϵ della potenza totale. E cioè

$$(II.4.3) \quad J_0^2(\beta) + 2 \sum_{n=1}^{N(\epsilon)} J_n^2(\beta) = \epsilon$$

Ritenendo sufficiente un'ampiezza spettrale che contenga il 98% della potenza totale del segnale è $N(\epsilon) = \beta + 1$. Poiché le righe dello spettro si distanziano l'una dall'altra di f_m , la banda equivalente vale:

$$(II.4.4) \quad B = 2(1 + \beta)f_m$$

Facendo riferimento all'Esempio E.II.1 si riconosce che l'indice di modulazione β può essere definito come il rapporto fra la massima deviazione di frequenza Δf del segnale modulato e la frequenza della modulante f_m . Queste considerazioni consentono di estendere la formula (II.4.4) a una modulante non sinusoidale, sostituendo nella (II.4.4) la quantità $D = \frac{\Delta f}{f_m}$, al posto di β , dove stavolta f_m rappresenta il valore massimo della frequenza contenuta nel segnale modulante. La banda equivalente vale dunque:

$$(II.4.5) \quad B = 2(1 + D)f_m = 2(f_m + \Delta f)$$

che costituisce la **regola di Carson**.

Esempio E.II.3

Nel caso di modulante sinusoidale $s(t) = V_m \cos(2\pi f_m t)$ le (II.4.4) calcolate per alti valori dell'indice di modulazione, diventano:

$$B \cong 2\beta f_m = 2k_P V_m f_m \quad \text{PM}$$

$$B \cong 2\beta f_m = 2k_F V_m \quad \text{FM}$$

dalle quali si evince che l'ampiezza di banda risulta indipendente da f_m per la modulazione di frequenza e proporzionale a f_m per la modulazione di fase. La modulazione di frequenza è allora in grado di utilizzare meglio il canale di trasmissione che non la modulazione di fase.

Nei sistemi di radiodiffusione FM la variazione di frequenza, come consigliata dal FCC (Federal Communications Commission) è fissata a 75 kHz. Se si assume che la massima frequenza contenuta in un segnale audio è di 15 kHz allora il corrispondente valore di β è pari a 5. La banda del segnale modulato risulta allora eguale a $B = 2 \cdot 6 \cdot 15 = 180 \text{ kHz}$.

Esempio E.II.4

Una particolare applicazione della modulazione FM si riscontra nel funzionamento del radar ad onda continua per la misura della distanza. A tale scopo si consideri un segnale modulato in FM la cui frequenza istantanea vari secondo la

$$f(t) = f_0 + \gamma t$$

detto segnale "chirp". Il segnale modulato allora è:

$$v(t) = V_0 \cos \left[2\pi \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + \varphi \right] = V_0 \cos \left[2\pi f_0 t + \pi \gamma t^2 + \varphi_0 \right]$$

$$\text{essendo } \varphi_0 = \varphi - (f_0 t_0 + \pi \gamma t_0^2).$$

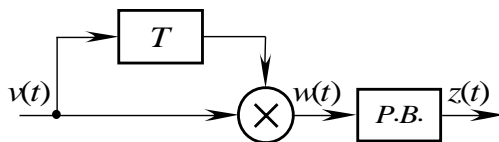


Fig. E.II.1

Si supponga adesso che il segnale $v(t)$ subisca un ritardo T ed il segnale così ritardato venga impiegato

come è indicato schematicamente in Fig. E.II.1. Con riferimento alle notazioni di detta figura, si ha:

$$w(t) = v(t)v(t - T) =$$

$$= V_0^2 \cos \left[2\pi f_0 t + \pi \gamma t^2 + \varphi_0 \right] \cdot \cos \left[2\pi f_0 (t - T) + \pi \gamma (t - T)^2 + \varphi_0 \right] =$$

$$= \frac{V_0^2}{2} \left\{ \cos \left[2\pi f_0 T + \pi \gamma (t^2 - (t - T)^2) \right] + \cos \left[2\pi f_0 (2t - T) + \pi \gamma (t^2 + (t - T)^2) + 2\varphi_0 \right] \right\} =$$

$$= \frac{V_0^2}{2} \left\{ \cos \left[2\pi(\gamma T)t + (2\pi f_0 T - \pi \gamma T^2) \right] + \cos \left[2\pi(2f_0 - \gamma T)t + 2\pi \gamma t^2 + (\pi \gamma T^2 + 2\varphi_0) \right] \right\}$$

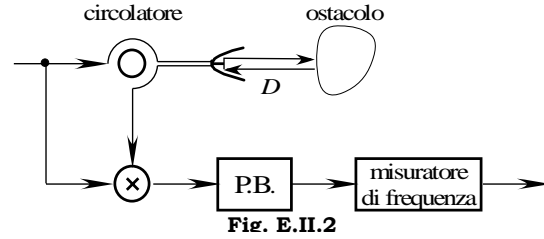
Il segnale $w(t)$ contiene una componente a frequenza γT ed una componente il cui contenuto in frequenza è centrato attorno alla frequenza $2f_0 - \gamma T$. Supposto che la quantità γT sia molto più piccola di $2f_0$, è possibile isolare tale componente con un filtro passa basso per cui il segnale in uscita diviene:

$$z(t) = \frac{V_0^2}{2} \cos \left[2\pi(\gamma T)t + (2\pi f_0 T - \pi\gamma T^2) \right]$$

In un radar ad onda continua il segnale modulato è inviato ad un'antenna. Il segnale di ritorno, riflesso da un ostacolo posta a distanza D dall'antenna, è moltiplicato con il segnale riferimento e filtrato come è indicato in Fig. E.II.2. La lettura della frequenza del segnale in uscita fornisce il valore della frequenza $F = \gamma T$ che vale:

$$F = \frac{2\gamma D}{c}$$

dalla quale si può dedurre la distanza essendo c la velocità di propagazione dell'onda pari alla velocità della luce (300.000 km/sec).



II.5 - Rivelatori FM.

La rivelazione di segnali modulati in frequenza può essere realizzata in due modi distinti e cioè con i rivelatori a discriminatore e i rivelatori ad anello ad aggancio di fase.

II.5.1 - Discriminatori di frequenza.

Si consideri la derivata della (II.1.7). Si ha:

$$(II.5.1) \quad \frac{dv}{dt} = -V_0 \left[2\pi f_0 + \beta \frac{dm}{dt} \right] \cos \left[2\pi f_0 t + \beta m(t) + \phi_0 \right]$$

Essa rappresenta un segnale modulato sia in ampiezza che in frequenza. In particolare l'involuppo di modulazione è:

$$(II.5.2) \quad V(t) = V_0 \left| 2\pi f_0 + \beta \frac{dm}{dt} \right|$$

Se $m(t)$ è un segnale di tipo passa basso di banda f_m , la trasformata di Fourier di $\frac{dm}{dt}$ è $F \left\{ \frac{dm(t)}{dt} \right\} = j2\pi f F \{ m(t) \} = j2\pi f M(f)$. Si ha allora:

$$(II.5.3) \quad \left| \frac{dm(t)}{dt} \right| = \left| \int_{-f_m}^{f_m} j2\pi f M(f) e^{j2\pi f t} df \right| \leq \int_{-f_m}^{f_m} |2\pi f| |M(f)| df \leq 2\pi f_m \int_{-f_m}^{f_m} |M(f)| df$$

che significa che $\frac{dm}{dt}$ è un segnale limitato. Di conseguenza, se si verifica la condizione:

$$(II.5.4) \quad 2\pi f_0 > 2\pi \beta f_m \int_{-f_m}^{f_m} |M(f)| df$$

l'involuppo di modulazione dipende linearmente da $\frac{dm}{dt}$ per cui si ha:

$$(II.5.5) \quad V(t) = \begin{cases} V_0 [2\pi f_0 + 2\pi k_F s(t)] & \text{modulazione FM} \\ V_0 [2\pi f_0 + k_P \frac{ds(t)}{dt}] & \text{modulazione PM} \end{cases}$$

Queste considerazioni portano ad individuare uno schema del ricevitore (detto ricevitore a discriminatore) come quello rappresentato in Fig. II.7.



Fig. II.7 - Schema di un discriminatore

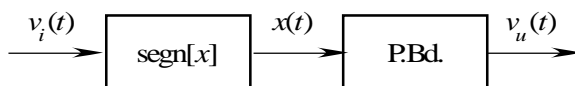


Fig. II.8 - Schema di un limitatore

Il limitatore è stato introdotto per eliminare le eventuali variazioni dell'ampiezza del segnale in arrivo. Esso è

sostanzialmente costituito da un elemento non lineare la cui caratteristica ingresso-uscita è data dalla $y = \text{segn}[x]$ seguito da un filtro passa-banda la cui banda è centrata alla frequenza f_0 della portante, come è mostrato in Fig. II.8. Se

$$(II.5.6) \quad v_i(t) = V(t) \cos[\vartheta(t)]$$

in cui $\vartheta(t) = 2\pi f_0 t + 2\pi k_F \int_{t_0}^t s(\tau) d\tau + \varphi_0$ denota il segnale in ingresso al limitatore, si ha:

$$(II.5.7) \quad x(t) = \text{segn}[V(t) \cos \vartheta]$$

che considerata come funzione della variabile ϑ costituisce un'onda quadra di periodo 2π che sviluppata in serie di Fourier diventa:

$$(II.5.8) \quad x(t) = \frac{4}{\pi} \left[\cos \vartheta - \frac{1}{3} \cos 3\vartheta + \frac{1}{5} \cos 5\vartheta + \dots \right]$$

Ricordando l'espressione di ϑ , si riconosce che il segnale $x(t)$ è pari alla somma di segnali modulati in FM con portanti pari a $f_0, 3f_0, 5f_0, \dots$ per cui all'uscita del filtro passa-banda si ha:

$$(II.5.9) \quad v_u(t) = V_0 \cos \left[2\pi f_0 t + 2\pi k_F \int_{t_0}^t s(\tau) d\tau + \varphi_0 \right]$$

Con riferimento alla Fig. II.7 è facile verificare che essendo:

$$(II.5.10) \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

la relazione ingresso-uscita del derivatore, sua risposta in frequenza è data dalla:

$$(II.5.11) \quad H(f) = j2\pi f \quad f_0 - \frac{B}{2} \leq |f| \leq f_0 + \frac{B}{2}$$

Essa quindi è caratterizzata da un modulo teoricamente dipendente dalla frequenza come è

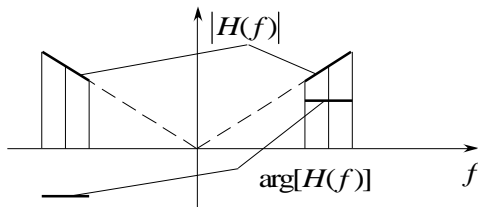


Fig. II.9 - Caratteristiche spettrali del derivatore

mostrato in Fig. II. 9.

II.5.2 - Il rivelatore ad aggancio di fase.

Il rivelatore ad aggancio di fase PLL (**Phase Locked Loop**) è un sistema a retroazione il cui schema è riportato in Fig. II.10.

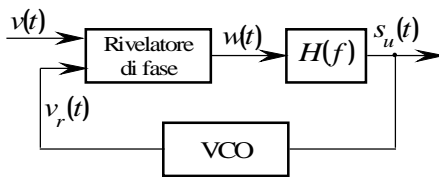


Fig. II.10 - Dispositivo ad aggancio di fase.

Il rivelatore di fase è un dispositivo che fornisce in uscita un segnale che è una funzione monotona della differenza delle fasi istantanee dei segnali in ingresso. Normalmente esso è costituito nella forma riportata in Fig. II.11; per cui se i segnali in ingresso sono della forma:

$$(II.5.12) \quad v(t) = V_0 \cos[2\pi f_0 t + \phi(t)]$$

$$(II.5.13) \quad v_r(t) = V_r \sin[2\pi f_0 t + \vartheta(t)]$$

il segnale in uscita vale:

$$(II.5.14) \quad w(t) = \frac{V_0 V_r}{2} \sin[\phi(t) - \vartheta(t)]$$

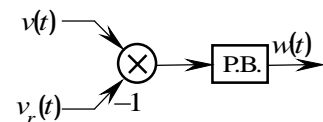


Fig. II.11 - Rivelatore di fase.

in quanto il filtro passa-basso, supposto ideale, presenta una caratteristica spettrale tale da lasciare inalterata la componente a frequenza zero ma da impedire il transito alla componente di frequenza $2f_0$. La caratteristica del rivelatore di fase si presenta come è mostrato in Fig. II.12 in cui si è denotata con

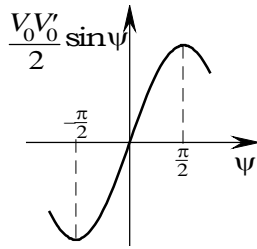


Fig. II.12 – Caratteristica del rivelatore di fase.

$$(II.5.15) \quad \psi(t) = \phi(t) - \vartheta(t)$$

la differenza fra le fasi.

Il blocco denotato con VCO (**V**oltage **C**ontrolled **O**scillator) è denominato oscillatore controllato in tensione ed il cui funzionamento è assimilabile a quello di un modulatore di frequenza. Esso cioè fornisce in uscita il segnale (II.5.13) dove $\vartheta(t)$ è dato dalla:

$$(II.5.16) \quad \vartheta(t) = 2\pi k_r \int_{t_0}^t s_u(\tau) d\tau + \vartheta_0$$

in cui k_r denota un coefficiente denotato *sensibilità in frequenza del VCO* le cui dimensioni sono Hz/Volt.

Tenendo conto delle (II.5.14) e (II.5.15), l'uscita del filtro passa basso potrà pertanto essere espressa dalla:

$$(II.5.17) \quad s_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) h(t - \tau) d\tau = \frac{V_0 V_r'}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[\psi(\tau)] h(t - \tau) d\tau$$

Derivando la (II.5.15) rispetto al tempo e tenendo conto delle (II.5.16) e (II.5.17) si ottiene:

$$(II.5.18) \quad \begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= \frac{d\phi(t)}{dt} - \frac{d\vartheta(t)}{dt} = \frac{d\phi(t)}{dt} - 2\pi k_r s_u(t) = \\ &= \frac{d\phi(t)}{dt} - 2\pi k_r \frac{V_0 V_r'}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin[\psi(\tau)] h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

la quale, ponendo

$$(II.5.19) \quad K = k_r \frac{V_0 V_r'}{2}$$

può essere scritta nella forma:

$$(II.5.20) \quad \frac{d\psi(t)}{dt} + 2\pi K \int_{-\infty}^{\infty} \sin[\psi(\tau)] h(t - \tau) d\tau = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

che rappresenta l'equazione che descrive il comportamento del rivelatore.

Tale equazione però è del tipo non lineare a causa della presenza del termine $\sin[\psi(\tau)]$; tuttavia, se l'errore di fase si mantiene abbastanza piccolo (o, come suol dirsi, il rivelatore funziona in regime di aggancio o di lock-in), la funzione $\sin[\psi(\tau)]$ può approssimarsi con il suo argomento. La (II.5.20) pertanto si riduce alla:

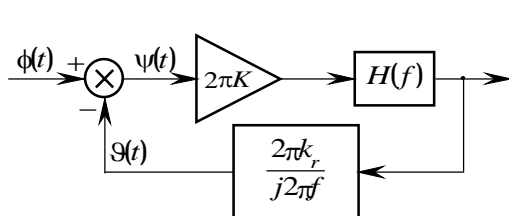


Fig. II.13 – Schema a blocchi del PLL linearizzato.

$$(II.5.21) \quad \frac{d\psi(t)}{dt} + 2\pi K \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) h(t - \tau) d\tau = \frac{d\phi(t)}{dt}$$

che dà luogo allo schema riportato in Fig. II.13.

Trasformando secondo Fourier la (II.5.21) e denotando con le lettere maiuscole le corri-

spondenti trasformate, si ha:

$$(II.5.22) \quad (j2\pi f)\Psi(f) + 2\pi K\Psi(f)H(f) = (j2\pi f)\Phi(f)$$

da cui:

$$(II.5.23) \quad \Psi(f) = j2\pi f \frac{\Phi(f)}{j2\pi f + 2\pi K H(f)}$$

In regime di aggancio la (II.5.17) diviene:

$$(II.5.24) \quad s_u(t) = \frac{V_0 V_r}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

che, trasformata, fornisce:

$$(II.5.25) \quad S_u(f) = \frac{V_0 V_r}{2} \Psi(f) H(f) = \frac{K}{k_r} \Psi(f) H(f)$$

Tenendo conto della (II.5.23) risulta infine:

$$(II.5.26) \quad S_u(f) = j2\pi f \frac{K}{k_r} \frac{H(f)}{j2\pi f + 2\pi K H(f)} \Phi(f)$$

Se entro la banda del sistema, che coincide con la banda f_m del segnale in uscita la quantità $H(f)$ possa ritenersi tale da risultare:

$$(II.5.27) \quad |H(f)| \gg 2\pi f_m \quad |f| \leq f_m$$

la (II.5.26) può essere approssimata dalla:

$$(II.5.28) \quad S_u(f) = \frac{j2\pi f}{2\pi k_r} \Phi(f)$$

che, nel dominio del tempo corrisponde alla:

$$(II.5.29) \quad s_u(t) = \frac{1}{2\pi k_r} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

Se il segnale in ingresso è un segnale modulato in frequenza, essendo:

$$(II.5.30) \quad \phi(t) = 2\pi k_F \int_{t_0}^t s(\tau) d\tau$$

la (II.5.29) diventa:

$$(II.5.31) \quad s_u(t) = \frac{k_F}{k_r} s(t)$$

e pertanto il segnale in uscita dal sistema è proporzionale al segnale modulante. Il sistema quindi si comporta come un rivelatore di frequenza.