

LA RIVELAZIONE DEI SEGNALI MODULATI

III.1 – Premessa.

Uno degli aspetti fondamentali della Teoria della modulazione consiste nella valutazione delle prestazioni dei rivelatori quando il segnale modulato è corrotto da rumore. In quel che segue si considera il caso in cui il segnale ricevuto $v_i(t)$ all'ingresso del ricevitore sia composto dalla somma del segnale modulato $v(t)$ e dal rumore $n(t)$ ⁽¹⁾:

$$(III.1.1) \quad v_i(t) = v(t) + n(t)$$

Se l'amplificazione degli stadi a monte del rivelatore risulta sufficientemente elevata è lecito trascurare il rumore introdotto dal rivelatore; il che equivale ad ammettere ideale il processo di rivelazione. Di conseguenza lo schema del rivelatore che sarà preso in esame si presenta come è indicato in Fig. III.1 in cui il filtro passa-banda, supposto ideale, di banda pari a quella del segnale modulato, schematizza gli stadi amplificatori a monte del rivelatore.

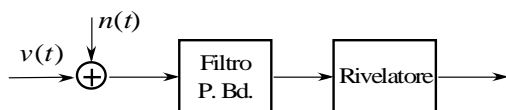


Fig.III.1 - Schema di principio del rivelatore.

È importante osservare infine che l'entità del rumore in uscita dal rivelatore dipende dal dispositivo di rivelazione adoperato. Risulta opportuno, al fine di un efficace confronto fra i vari metodi di modulazione, definire una cifra di merito che tenga conto della degradazione del segnale indotta dal rumore.

Se il segnale in uscita $v_u(t)$ si presenta nella forma:

(III.1.4)
$$v_u(t) = s_u(t) + n_u(t)$$
 cioè come somma del segnale modulante $s_u(t)$ e del rumore $n_u(t)$ con esso incorrelato è naturale assumere come cifra di merito la quantità:

(III.1.5)
$$z_u = \frac{E \left\{ \left(s_u(t) - E \{ s_u(t) \} \right)^2 \right\}}{E \left\{ \left(n_u(t) - E \{ n_u(t) \} \right)^2 \right\}}$$

denotata come rapporto segnale rumore.

In caso contrario è difficile procedere al calcolo delle quantità che intervengono nella (III.1.5) poiché non sono facilmente individuabili le componenti di "segnale" e di "rumore" contenute nel segnale $v_u(t)$.

III.2 – Caratterizzazione statistica del rumore.

È ovvio che per studiare adeguatamente le prestazioni del sistema di rivelazione è neces-

⁽¹⁾ In quel che segue sarà omessa la variabile ζ nella rappresentazione di un segnale aleatorio.

sario caratterizzare statisticamente il rumore all'ingresso del ricevitore. A tal fine $n(t)$ si suppone un segnale aleatorio gaussiano a media nulla e con densità spettrale uniforme (rumore bianco almeno entro la banda del segnale modulato) ed indipendente dal segnale modulante $s(t)$. A causa della presenza del filtro passa-banda di ingresso, la sua densità spettrale è supposta localizzata attorno alle frequenze $\pm f_0$ ed occupa una banda (monolaterale) di ampiezza B . La generica manifestazione di $n(t)$, con probabilità 1, può pertanto essere posta nella forma:

$$(III.2.1) \quad n(t) = n_f(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - n_q(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

in cui $n_f(t)$ e $n_q(t)$ sono due segnali di tipo passa-basso con densità spettrali confinate in $(-\frac{B}{2}, \frac{B}{2})$ denominati **componente in fase** e **componente in quadratura** di $n(t)$ e la fase φ_0 si considera una variabile aleatoria, indipendente dalle componenti in fase ed in quadratura, e uniformemente distribuita nell'intervallo $[0, 2\pi)$.

Se le componenti in fase ed in quadratura sono gaussiane anche $n(t)$ lo è in quanto combinazione lineare di segnali gaussiani. Viceversa è facile dimostrare che se $n(t)$ è gaussiano anche $n_f(t)$ e $n_q(t)$ lo sono.

Infatti sia $n_C(t)$ il segnale definito dalla:

$$(III.2.2) \quad n_C(t) = 2n(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

Tenendo conto della (III.2.1) si ha:

$$(III.2.3) \quad \begin{aligned} n_C(t) &= 2 \left\{ n_f(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi_0) - n_q(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \right\} = \\ &= n_f(t) [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)] - n_q(t) \sin(4\pi f_0 t + 2\varphi_0) \end{aligned}$$

dalla quale si riconosce che la componente in fase di $n(t)$ può essere ricostruita considerando la porzione dello spettro di $n_C(t)$ contenuta $(-\frac{B}{2}, \frac{B}{2})$ dal momento che i segnali $n_f(t) \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)$ e $n_q(t) \sin(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)$ hanno contenuti spettrali in bande di ampiezza B posizionate attorno alle frequenze $\pm 2f_0$.

In modo analogo definendo $n_S(t)$:

$$(III.2.4) \quad n_S(t) = -2n(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

risulta:

$$(III.2.5) \quad \begin{aligned} n_S(t) &= -2 \left\{ n_f(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - n_q(t) \sin^2(2\pi f_0 t + \varphi_0) \right\} = \\ &= -n_f(t) \sin(4\pi f_0 t + 2\varphi_0) + n_q(t) [1 - \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi_0)] \end{aligned}$$

dalla quale si evince che la componente in quadratura di $n(t)$ può essere ricostruita considerando la porzione dello spettro di $n_S(t)$ che è contenuta in $(-\frac{B}{2}, \frac{B}{2})$. Le componenti in fase ed in quadratura di $n(t)$ possono essere ottenute dal segnale $n(t)$ mediante operazioni lineari e pertanto sono segnali gaussiani.

Per determinare la statistica di $n_f(t)$ basta osservare che essa ha valor medio nullo. Per dedurre la funzione di autocorrelazione occorre innanzi tutto determinare la funzione di autocorrelazione di $n_C(t)$. Si ha:

$$(III.2.6) \quad R_C(t, \tau) = E \{ n_C(t) n_C(t + \tau) \}$$

dove $E\{\cdot\}$ deve intendersi l'operatore di media congiunta rispetto alle quantità n_f , n_q e φ_0 .

Per le ipotesi fatte riguardo all'indipendenza della variabile aleatoria φ_0 rispetto alle grandezze n_f e n_q , la (III.2.6) diviene:

$$\begin{aligned}
 R_C(t, \tau) &= 4E \{n(t)n(t+\tau) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \cos[2\pi f_0(t+\tau) + \varphi_0]\} = \\
 (III.2.7) \quad &= 2E \{n(t)n(t+\tau)\} E_{\varphi_0} \{ \cos 2\pi f_0 \tau + \cos[2\pi f_0(2t+\tau) + 2\varphi_0] \} = \\
 &= 2R_n(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau
 \end{aligned}$$

essendo manifestamente:

$$(III.2.8) \quad E_{\varphi_0} \{ \cos[2\pi f_0(2t+\tau) + 2\varphi_0] \} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[2\pi f_0(2t+\tau) + 2\varphi_0] d\varphi_0 = 0$$

In modo analogo è:

$$\begin{aligned}
 R_S(t, \tau) &= 4E \{n(t)n(t+\tau) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \sin[2\pi f_0(t+\tau) + \varphi_0]\} = \\
 (III.2.9) \quad &= 2E \{n(t)n(t+\tau)\} E_{\varphi_0} \{ \cos 2\pi f_0 \tau - \cos[2\pi f_0(2t+\tau) + 2\varphi_0] \} = \\
 &= 2R_n(\tau) \cos 2\pi f_0 \tau
 \end{aligned}$$

I segnali $n_C(t, \zeta)$ e $n_S(t, \zeta)$ sono entrambi stazionari e sono caratterizzati da una medesima funzione di autocorrelazione. Essi pertanto sono caratterizzati da una stessa densità spettrale. Ricordando che le componenti in fase ed in quadratura del rumore si possono considerare come le porzioni a bassa frequenza dei segnali $n_C(t)$ e $n_S(t)$, la densità spettrale vale:

$$(III.2.10) \quad W(f) \equiv W_f(f) = W_q(f) = [W_n(f - f_0) + W_n(f + f_0)] \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

Se $n(t)$ è un rumore bianco con densità spettrale pari a $\frac{N_0}{2}$, come è mostrato in Fig. III.2,

si ottiene:

$$(III.2.11) \quad W_f(f) = W_q(f) = N_0 \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$$

Per caratterizzare completamente la coppia delle componenti in fase ed in quadratura occorre valutare la loro mutua correlazione.

Con riferimento ai segnali $n_C(t)$ e $n_S(t)$, la loro correlazione incrociata vale:

$$\begin{aligned}
 R_{CS}(t, \tau) &= E \{n_C(t)n_S(t+\tau)\} = \\
 (III.2.12) \quad &= -4E \{n(t)n(t+\tau) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \sin[2\pi f_0(t+\tau) + \varphi_0]\} = \\
 &= -2E \{n(t)n(t+\tau)\} E_{\varphi_0} \{ \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \sin[2\pi f_0(t+\tau) + \varphi_0] \} = \\
 &= -2R_n(\tau) \sin 2\pi f_0 \tau
 \end{aligned}$$

È dunque:

$$(III.2.13) \quad W_{CS}(f) = F \{R_{CS}(\tau)\} = j[W_n(f - f_0) - W_n(f + f_0)]$$

Nell'ipotesi di rumore bianco, la densità spettrale incrociata nella banda $(-\frac{B}{2}, \frac{B}{2})$ è nulla e quindi è:

$$(III.2.14) \quad R_{f\dot{q}}(\tau) = 0$$

Le componenti in fase ed in quadratura di un rumore passa-banda e bianco sono incorrelate.

Dalle precedenti considerazioni, ricordando la (III.2.11), si ottiene:

$$(III.2.15) \quad E \{n_f^2(t)\} = E \{n_q^2(t)\} = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} W(f) df = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} [W_n(f - f_0) + W_n(f + f_0)] df$$

che, ponendo $x = f - f_0$ nel primo integrale e $y = f + f_0$ nel secondo diventa:

$$(III.2.16) \quad E \{n_f^2(t)\} = E \{n_q^2(t)\} = \int_{-f_0-\frac{B}{2}}^{-f_0+\frac{B}{2}} W_n(x) dx + \int_{f_0-\frac{B}{2}}^{f_0+\frac{B}{2}} W_n(y) dy = E \{n^2(t)\}$$

e cioè il valore quadratico medio della componente in fase ed della componente in quadra-

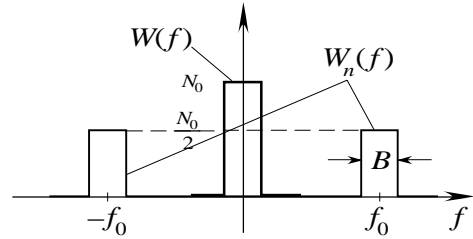


Fig. III.2 - Rumore bianco di tipo passa-banda.

tura coincide con il valore quadratico medio del rumore passa-banda.

III.3 - Modulazione d'ampiezza.

In tal caso il segnale modulato all'ingresso del ricevitore vale:

$$(III.3.1) \quad v_i(t) = V_0 \left[v_f(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - v_q(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \right] + \\ + n_f(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - n_q(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

in cui le quantità $v_f(t)$ e $v_q(t)$ dipendono dal segnale modulante $s(t)$. Com'è noto un tale tipo di modulazione può essere rivelato in modo coerente o non coerente.

III.3.1 - Rivelazione coerente.

Nel caso di rivelazione coerente il segnale in ingresso $v_i(t)$ è moltiplicato per la portante locale:

$$(III.3.2) \quad v_r(t) = V_r \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

ottenendosi così:

$$(III.3.3) \quad v_i(t)v_r(t) = \\ = V_0 V_r \left[v_f(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi_0) - v_q(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \right] + \\ + V_r n_f(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi_0) - V_r n_q(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

per cui il segnale in uscita dal filtro passa-basso è:

$$(III.3.4) \quad s_u(t) = \frac{V_0 V_r}{2} v_f(t) + \frac{V_r}{2} n_f(t)$$

Il rapporto segnale rumore vale pertanto:

$$(III.3.5) \quad z_u = \frac{\frac{V_0^2 V_r^2}{4} E \left\{ \left(v_f - E \{ v_f \} \right)^2 \right\}}{\frac{V_r^2}{4} E \{ n_f^2 \}} = V_0^2 \frac{E \left\{ \left(v_f - E \{ v_f \} \right)^2 \right\}}{E \{ n_f^2 \}}$$

Se $\frac{N_0}{2}$ denota la densità spettrale del rumore in ingresso, si ha:

$$(III.3.6) \quad E \{ n_f^2 \} = E \{ n_q^2 \} = \begin{cases} 2N_0 f_m & \text{AM o DSB} \\ N_0 f_m & \text{SSB} \end{cases}$$

Per quanto riguarda la potenza del segnale, a media nulla e a potenza specifica P_s :

$$(III.3.7) \quad E \{ s(t) \} = 0 \quad E \{ s^2(t) \} = P_s$$

e quindi:

a) modulazione AM

$$(III.2.8) \quad E \left\{ \left(v_f - E \{ v_f \} \right)^2 \right\} = E \left\{ \left(1 + k_A s - 1 - k_A E \{ s \} \right)^2 \right\} = k_A^2 P_s$$

b) modulazione DSB

$$(III.3.8) \quad E \left\{ \left(v_f - E \{ v_f \} \right)^2 \right\} = E \left\{ \left(k_A s - k_A E \{ s \} \right)^2 \right\} = k_A^2 P_s$$

c) modulazione SSB

$$(III.3.9) \quad E \left\{ \left(v_f - E \{ v_f \} \right)^2 \right\} = E \left\{ \left(\frac{1}{2} k_A s - \frac{1}{2} k_A E \{ s \} \right)^2 \right\} = \frac{k_A^2}{4} P_s$$

La quantità z_u , nei tre casi considerati, vale:

$$(III.3.10) \quad z_u = \begin{cases} V_0^2 \frac{k_A^2 P_s}{2N_0 f_m} & \text{AM} \\ V_0^2 \frac{k_A^2 P_s}{2N_0 f_m} & \text{DSB} \\ V_0^2 \frac{k_A^2 P_s}{4N_0 f_m} & \text{SSB} \end{cases}$$

che, in termini della potenza specifica della portante non modulata $P_0 = \frac{V_0^2}{2}$ si scrive nella forma:

$$(III.3.11) \quad z_u = \begin{cases} \frac{k_A^2 P_0 P_s}{N_0 f_m} & \text{AM} \\ \frac{k_A^2 P_0 P_s}{N_0 f_m} & \text{DSB} \\ \frac{k_A^2 P_0 P_s}{2N_0 f_m} & \text{SSB} \end{cases}$$

III.2.2 - Rivelazione non coerente.

Com'è noto dal Cap. I, la rivelazione non coerente è effettuata, nel caso della modulazione AM, per mezzo del rivelatore ad involuppo. Il segnale in ingresso al rivelatore può essere scritto come segue:

$$(III.3.12) \quad v_i(t) = \{V_0 [1 + k_A s(t)] + n_f(t)\} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - \{n_q(t)\} \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

al quale corrisponde l'involuppo:

$$(III.3.13) \quad V(t) = \left\{ \left[V_0 (1 + k_A s) + n_f \right]^2 + [n_q]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

che è manifestamente un'espressione non lineare sia del segnale che del rumore.

Per ridurre $V(t)$ ad una forma lineare occorre introdurre alcune semplificazioni. Più precisamente si supponga che le probabilità che $|n_f(t)|$ e $|n_q(t)|$ siano molto minori di V_0 sia molto prossima all'unità:

$$(III.3.14) \quad \Pr\{|n_f(t)| \ll V_0\} \cong 1 ; \quad \Pr\{|n_q(t)| \ll V_0\} \cong 1$$

Ciò comporta che nella (III.2.17) si può ritenere, con probabilità quasi 1, che $V_0 [1 + k_A s(t)]$ sia grande rispetto a $|n_f(t)|$ e a $|n_q(t)|$, cosicchè $V(t)$ si può approssimare nel modo seguente:

$$(III.3.15) \quad \begin{aligned} V(t) &= V_0 [1 + k_A s(t)] \sqrt{1 + \frac{2n_f(t)}{V_0 [1 + k_A s(t)]} + \frac{n_f^2(t) + n_q^2(t)}{V_0^2 [1 + k_A s(t)]^2}} \cong \\ &\cong V_0 [1 + k_A s(t)] \left\{ 1 + \frac{n_f(t)}{V_0 [1 + k_A s(t)]} \right\} \cong V_0 [1 + k_A s(t)] + n_f(t) \end{aligned}$$

e, di conseguenza, l'uscita del rivelatore è:

$$(III.3.16) \quad v_u(t) = V_0 [1 + k_A s(t)] + n_f(t)$$

È da osservare che, essendo $n_f(t)$ e $n_q(t)$ distribuite con legge gaussiana di valor medio nullo e varianza $\sigma_n^2 = 2N_0 f_m$, le probabilità (III.3.14), detto ε una quantità sufficientemente piccola, si esprimono come segue:

$$(III.3.17) \quad \Pr\{|n| \leq \varepsilon V_0\} = \int_{-\varepsilon V_0}^{\varepsilon V_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-n^2/2\sigma_n^2} dn = 1 - 2 \int_{\varepsilon V_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-n^2/2\sigma_n^2} dn = 1 - Q \left\{ \varepsilon \sqrt{\frac{V_0^2}{\sigma_n^2}} \right\}$$

dalla quale si deduce che per elevati valori di $\frac{V_0^2}{2\sigma_n^2}$ la probabilità che $n(t)$ sia contenuto in $(-\varepsilon V_0, \varepsilon V_0)$ può ritenersi unitaria. Ciò comporta che la condizione (III.3.17) può ritenersi soddisfatta se è verificata la seguente:

$$(III.3.18) \quad \frac{V_0^2}{2\sigma_n^2} \gg 1$$

In queste condizioni il rapporto segnale rumore in uscita è:

$$(III.3.19) \quad z_u = \frac{V_0^2 k_A^2 P_s}{2N_0 f_m} = \frac{P_0}{N_0 f_m} k_A^2 P_s$$

Paragonando la (III.3.19) con la (III.3.10) si deduce che nei confronti del rumore la rivelazione coerente e quella ad involuppo presentano le medesime caratteristiche purché, in quest'ultimo caso, la condizione (III.3.18) risulti soddisfatta.

III.4 - Modulazione d'angolo.

Nella modulazione d'angolo il segnale in ingresso $v_i(t)$ può essere posto nella forma:

$$(III.4.1) \quad v_i(t) = V_0 \cos[2\pi f_0 t + \beta m(t)] + r(t) \cos[2\pi f_0 t + \vartheta(t)]$$

Ricorrendo alla rappresentazione fasoriale delle grandezze sinusoidali, il segnale $v_i(t)$ può essere rappresentato come è indicato in Fig. III.4. La deviazione di fase del segnale $v_i(t)$ può allora essere approssimata dalla (si fa riferimento al triangolo OAB rettangolo in A):

$$(III.4.2) \quad \psi(t) = \beta m(t) + \arctg \frac{r(t) \sin[\vartheta(t) - \beta m(t)]}{V_0 + r(t) \cos[\vartheta(t) - \beta m(t)]}$$

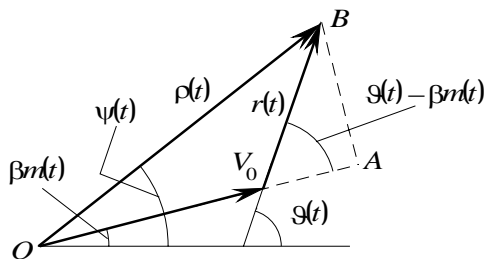


Fig. III.4 - Rappresentazione vettoriale del segnale $v_i(t)$.

Supponendo inoltre che la quantità $r(t)$ sia, con probabilità molto prossima all'unità, piccola rispetto a V_0 ; cosa che si verifica quando è:

$$(III.4.3) \quad \frac{V_0^2}{2\sigma_n^2} \gg 1$$

la (III.4.2) può essere semplificata nel modo

seguito:

$$(III.4.4) \quad \psi(t) \cong \beta m(t) + \arctg \frac{r(t)}{V_0} \sin[\vartheta(t) - \beta m(t)] \cong \beta m(t) + \frac{r(t)}{V_0} \sin[\vartheta(t) - \beta m(t)]$$

e cioè:

$$(III.4.5) \quad \psi(t) \cong \beta m(t) + \frac{r(t)}{V_0} \{ \sin[\vartheta(t)] \cos[\beta m(t)] - \cos[\vartheta(t)] \sin[\beta m(t)] \}$$

che, introducendo le componenti in fase ed in quadratura del rumore:

$$(III.4.6) \quad n_f(t) = r(t) \cos \vartheta(t) \quad ; \quad n_q(t) = r(t) \sin \vartheta(t)$$

può essere scritta come segue:

$$(III.4.7) \quad \psi(t) = \beta m(t) + \frac{n_q(t)}{V_0} \cos \beta m(t) - \frac{n_f(t)}{V_0} \sin \beta m(t)$$

La fase istantanea $\psi(t)$ risulta così pari al segnale "utile" $\beta m(t)$ a cui è sommato un disturbo:

$$(III.4.8) \quad d(t) = \frac{n_q(t)}{V_0} \cos \beta m(t) - \frac{n_f(t)}{V_0} \sin \beta m(t)$$

che, come si evince dalla (III.4.8), dipende anche dal segnale modulante $m(t)$.

Per valutare il rapporto segnale rumore in uscita dal ricevitore occorre procedere alla determinazione della potenza specifica del disturbo $d(t)$. A tale scopo, detta R_d la funzione di autocorrelazione di $d(t)$, si ha:

$$\begin{aligned}
 R_d &= E\{d(t)d(t+\tau)\} = \\
 &= \frac{1}{V_0^2} \left\{ E\{n_f(t)n_f(t+\tau)\} \cdot E\{\sin\beta m(t)\sin\beta m(t+\tau)\} + \right. \\
 &\quad - E\{n_f(t)n_q(t+\tau)\} \cdot E\{\sin\beta m(t)\cos\beta m(t+\tau)\} + \\
 &\quad - E\{n_f(t+\tau)n_q(t)\} \cdot E\{\cos\beta m(t)\sin\beta m(t+\tau)\} + \\
 &\quad \left. + E\{n_q(t)n_q(t+\tau)\} \cdot E\{\cos\beta m(t)\cos\beta m(t+\tau)\} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{III.4.9}$$

avendo supposto il segnale indipendente dal rumore.

Osservando che, essendo il rumore all'ingresso gaussiano e a banda stretta risulta:

$$\begin{aligned}
 E\{n_f(t)n_f(t+\tau)\} &= E\{n_q(t)n_q(t+\tau)\} \equiv R(\tau) \\
 E\{n_f(t)n_q(t+\tau)\} &= E\{n_f(t+\tau)n_q(t)\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{III.4.10}$$

la precedente si riduce alla:

$$\psi(t) = \beta m(t) + \frac{n_q(t)}{V_0} \cos\beta m(t) - \frac{n_f(t)}{V_0} \sin\beta m(t)
 \tag{III.4.11}$$

Se il segnale $m(t)$ è stazionario la quantità $E\{\cos\beta[m(t)-m(t+\tau)]\}$ dipende solo da τ per cui, ponendo

$$\phi(\tau) = E\{\cos\beta[m(t)-m(t+\tau)]\}
 \tag{III.4.12}$$

si può scrivere:

$$R_d(\tau) = \frac{1}{V_0^2} R(\tau)\phi(\tau)
 \tag{III.4.13}$$

Denotando con $W(f)$ e con $\Phi(f)$ le trasformate di Fourier di $R(\tau)$ e di $\phi(\tau)$ rispettivamente, la densità spettrale di $d(t)$ vale dunque:

$$W_d(f) = \frac{1}{V_0^2} W(f) * \Phi(f)
 \tag{III.4.14}$$

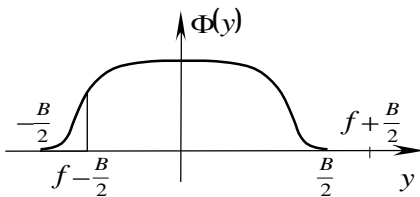


Fig. III.5 - Determinazione di $W_d(f)$.

D'altra parte, se il rumore in ingresso è bianco con densità spettrale pari a $\frac{N_0}{2}$ è:

$$W(f) = N_0 \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)
 \tag{III.3.18}$$

e quindi è:

$$W_d(f) = \frac{N_0}{V_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f-y) \text{rect}\left(\frac{y}{B}\right) dy = \frac{N_0}{V_0^2} \int_{f-\frac{B}{2}}^{f+\frac{B}{2}} \Phi(x) dx
 \tag{III.3.19}$$

Poiché la banda interessata dal segnale in uscita dal ricevitore è $(-f_m, f_m)$, la funzione $W_d(f)$ interessa solo per $|f| \leq f_m$. Se la banda B del segnale modulato è molto maggiore di f_m (modulazione ad alto indice), la $W_d(f)$ può allora essere approssimata come segue (cfr. Fig. III.5):

$$W_d(f) \cong \frac{N_0}{V_0^2} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \Phi(y) dy \cong \frac{N_0}{V_0^2} \phi(0) = \frac{N_0}{V_0^2}
 \tag{III.4.15}$$

poichè l'area della curva $\Phi(y)$ nelle regioni $(-\infty, f - \frac{B}{2})$ e $(f + \frac{B}{2}, \infty)$ può ritenersi trascurabile

rispetto all'area sottesa dalla curva in $(-f_m, f_m)$.

III.4.1 - Modulazione di fase.

Nel caso della modulazione di fase, il segnale in uscita dal rivelatore coincide con la fase istantanea del segnale in ingresso dato dalla (III.4.7). Essendo $\beta m(t) = k_p s(t)$, ha:

$$(III.4.16) \quad v_u(t) = k_p s(t) + d(t)$$

La potenza specifica del disturbo in uscita vale dunque:

$$(III.4.17) \quad N_u = \int_{-f_m}^{f_m} W_d(f) df = \frac{2N_0 f_m}{V_0^2}$$

e quella del segnale:

$$(III.4.18) \quad P_u = k_p^2 P_s$$

e di conseguenza il rapporto segnale rumore in uscita è:

$$(III.4.19) \quad z_u = \frac{V_0^2 k_p^2 P_s}{2N_0 f_m} = k_p^2 \frac{P_0 P_s}{N_0 f_m}$$

dove, come prima, P_0 denota la potenza specifica della portante non modulata.

III.4.2 - Modulazione di frequenza.

Nel caso della modulazione di frequenza, l'uscita dal rivelatore risulta pari alla deviazione istantanea della frequenza del segnale $v_i(t)$ e cioè:

$$(III.4.20) \quad v_u(t) = \frac{1}{2\pi} [\beta \dot{m}(t) + \dot{d}(t)] = k_F s(t) + \frac{1}{2\pi} \dot{d}(t)$$

essendo $\beta \dot{m}(t) = 2\pi k_F s(t)$.

Tenendo conto della (III.4.15), interpretando il segnale $\dot{d}(t)$ come il segnale in uscita da un derivatore quando al suo ingresso è presente $d(t)$, la densità spettrale del disturbo in uscita diventa $W_d(f) = \frac{1}{4\pi^2} (2\pi f)^2 W_d(f) = \frac{N_0}{V_0^2} f^2 \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$ come è mostrato in Fig. III.6.

La potenza specifica del disturbo in uscita è allora

$$(III.4.21) \quad N_u = \int_{-f_m}^{f_m} W_d(f) df = \frac{N_0}{V_0^2} \int_{-f_m}^{f_m} f^2 df = \frac{2N_0}{3V_0^2} f_m^3$$

e quella del segnale:

$$(III.4.22) \quad P_u = k_F^2 P_s$$

Il rapporto segnale rumore è:

$$(III.4.23) \quad z_u = \frac{3V_0^2 k_F^2 P_s}{2N_0 f_m^3} = 3 \left(\frac{k_F}{f_m} \right)^2 \left(\frac{P_0 P_s}{N_0 f_m} \right)$$

Dal confronto della (III.4.23) con la (III.4.19) discende che la modulazione di frequenza si comporta meglio di quella di fase nei confronti del rumore poiché il rapporto segnale rumore nella FM può essere reso grande quanto si vuole incrementando la quantità $\frac{k_F}{f_m}$, mentre nella PM questo incremento è limitato dalla condizione $k_p |s(t)|_x = \pi$. Si deve tuttavia tener presente che un aumento dell'indice di modulazione $\frac{k_F}{f_m}$ nella FM comporta un aumento della banda occupata; in altri termini buone prestazioni nei confronti del rumore sono ottenute a scapito di un'ampia estensione dello spettro del segnale modulato.

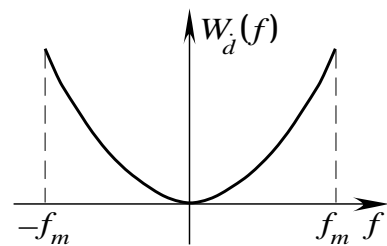


Fig. III.6 - Densità spettrale del disturbo in uscita dal rivelatore.

III.5 - Pre-enfasi e de-enfasi.

Le caratteristiche del rivelatore in FM possono essere migliorate con l'impiego dei cosiddetti filtri di pre-enfasi e di de-enfasi disposti il primo all'ingresso del trasmettitore ed il secondo all'uscita del rivelatore come è schematicamente indicato in Fig. III.7.

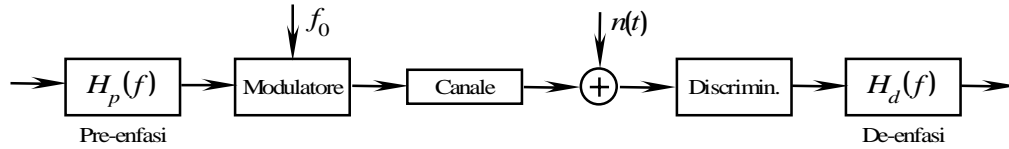


Fig. III.7 - Sistema FM con filtri di pre-enfasi e di de-enfasi.

Naturalmente per non introdurre distorsioni dovrà aversi:

$$(III.5.1) \quad H_p(f)H_d(f) = e^{-j2\pi fT_d}$$

dove T_d denota il ritardo di trasmissione.

Con la presenza del filtro di de-enfasi, tenendo conto della (III.3.25) il rumore diventa:

$$(III.5.2) \quad N_{ud} = \frac{N_0}{V_0^2} \int_{-f_m}^{f_m} f^2 |H_d(f)|^2 df$$

Il vantaggio conseguente all'introduzione dei filtri di pre- e de-enfasi può essere valutato mediante il rapporto fra N_u e N_{ud} che vale:

$$(III.5.3) \quad \xi = \frac{N_{ud}}{N_u} = \frac{\int_{-f_m}^{f_m} f^2 |H_d(f)|^2 df}{\int_{-f_m}^{f_m} f^2 df}$$

e risulta $\xi < 1$ se è:

$$(III.5.4) \quad |H_d(f)| < 1 \quad (-f_m \leq f \leq f_m)$$

Per la scelta dei filtri di pre-enfasi e di de-enfasi si impone inoltre che la potenza del segnale enfatizzato si mantenga inalterata. Ciò significa che se $W_m(f)$ denota la densità spettrale del messaggio $m(t)$ si dovrà avere:

$$(III.5.5) \quad \int_{-f_m}^{f_m} W_m(f) df = \int_{-f_m}^{f_m} W_m(f) |H_p(f)|^2 df$$