

LA TRASMISSIONE NUMERICA IN BANDA BASE

I.1 - Generalità.

Nella trasmissione numerica binaria il messaggio inviato dalla sorgente è costituito da una sequenza ordinata di cifre:

$$d \equiv \dots, d_{-2}, d_{-1}, d_0, d_1, d_2, \dots$$

appartenenti all'alfabeto binario i cui elementi si denotano con 0 e 1. Se le cifre d_n sono emesse dalla sorgente con cadenza regolare la trasmissione si dice **sincrona**, altrimenti è chiamata **asincrona**. Nel caso di trasmissioni sincrone, nel seguito considerate, detto T_d il periodo di cifra, la quantità:

$$(I.1.1) \quad r = \frac{1}{T_d}$$

costituisce il **ritmo binario** (bit rate) e si misura in bit/sec.

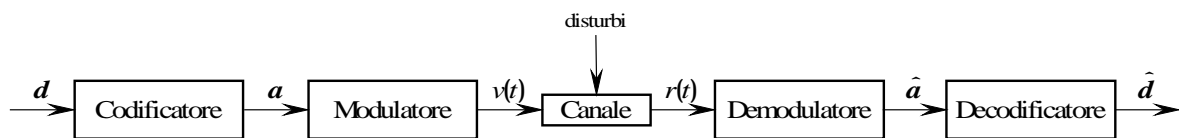


Fig. I.1 - Schema di principio di un sistema di trasmissione numerica in banda base.

Un sistema di trasmissione numerica può essere schematizzato come mostra la Fig. I.1. In essa si distinguono i seguenti blocchi:

a) un **codificatore** che trasforma la sequenza di cifre binarie nel messaggio

$$a \equiv \dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots$$

composto da elementi numerici, appartenenti ad un alfabeto di dimensioni finite;

b) un **modulatore** che, in corrispondenza alla sequenza a produce un segnale $v(t)$;

c) un **canale di trasmissione** la cui uscita $r(t)$ è, in generale, una replica poco fedele del segnale in ingresso $v(t)$ per effetto delle distorsioni, dei disturbi prodotti dal canale e delle interferenze;

d) un **demodulatore** il quale, a partire da $r(t)$, fornisce in uscita il messaggio

$$\hat{a} \equiv \dots, \hat{a}_{-2}, \hat{a}_{-1}, \hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots$$

in genere diverso da quello originario;

e) un **decodificatore** che opera la trasformazione inversa del codificatore fornendo in uscita la sequenza

$$\hat{d} \equiv \dots, \hat{d}_{-2}, \hat{d}_{-1}, \hat{d}_0, \hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots$$

I.2 - Struttura del segnale numerico.

Nel caso di trasmissioni numeriche in banda base il segnale $v(t)$ all'uscita del modulatore è costituito da una sequenza di forme di segnalazione traslate nel tempo nella forma:

$$(I.2.1) \quad v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(a_n; t - nT_0)$$

dove $s(a_n; t)$ è la forma di segnalazione, supposta di tipo passa-basso, associata alla cifra a_n . Inoltre si suppone che le segnalazioni $s(a_n; t)$ siano confinate nell'intervallo $[0, T_0)$.

È necessario precisare che in generale la forma di segnalazione oltre che dalla cifra a_n corrente può dipendere da L cifre precedenti $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-L}$ (codifica con memoria). In questo contesto si prendono in considerazione solo le codifiche prive di memoria.

La quantità T_0 , in generale diversa da T_d , costituisce il periodo di cifra ed il suo inverso:

$$(I.2.2) \quad R = \frac{1}{T_0}$$

rappresenta la **velocità di modulazione** ed individua il numero di cifre trasmesse nell'unità di tempo.

Una particolare forma di segnalazione è data dalla:

$$(I.2.3) \quad s(a_n; t) = a_n p(t)$$

dove a_n rappresenta un simbolo numerico appartenente ad un alfabeto di M elementi e $p(t)$ il cosiddetto **impulso di segnalazione**, supposto confinato in $[0, T_0)$. Un segnale di questo tipo è denominato **segnale PAM (Pulse Amplitude Modulation) multilivello** o **segnale PAM M-ario**. L'espressione del segnale PAM è quindi:

$$(I.2.4) \quad v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p(t - nT)$$

Nel caso di segnale PAM binario si ha la seguente corrispondenza:

$$(I.2.5) \quad \begin{aligned} d_n = 0 &\Rightarrow a_n = -1 \\ d_n = 1 &\Rightarrow a_n = +1 \end{aligned}$$

meglio nota come **codifica bipolare**.

Nel caso di segnalazione binaria si può adoperare la seguente corrispondenza (**codifica unipolare**):

$$(I.2.6) \quad \begin{aligned} d_n = 0 &\Rightarrow a_n = 0 \\ d_n = 1 &\Rightarrow a_n = 1 \end{aligned}$$

Un'ulteriore alternativa è costituita dal **codice bipolare alternato** definito dalla:

$$(I.2.7) \quad \begin{aligned} d_n = 0 &\Rightarrow a_n = 0 \\ d_n = 1 &\Rightarrow a_n = \pm 1 \end{aligned}$$

dove la scelta del segno è fatta imponendo che nella sequenza a le cifre $+1$ e -1 si alternino. In tal caso le cifre a_n appartengono all'alfabeto ternario composto dagli elementi $\{-1, 0, 1\}$. Per questo motivo quest'ultimo codice è denominato anche **codice pseudo-ternario** giacché i simboli $+1$ e -1 assumono lo stesso significato informativo. Si osservi che in questo caso la codifica della cifra $d_n = 1$ può essere effettuata solo se si conosce il valore del simbolo corrispondente alla cifra $d_n = 1$ precedente. Un tale tipo di codifica costituisce un esempio di codifica con memoria a differenza dei codici bipolare ed unipolare che possono essere classificati come codici privi di memoria o istantanei.

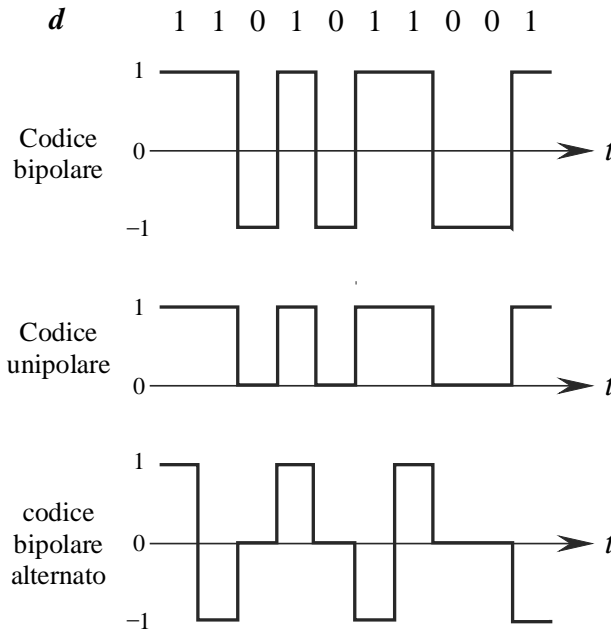


Fig I.3 – Struttura del segnale modulato per segnalazione PAM binaria.

In Fig. I.3 è rappresentato il segnale PAM binario $v(t)$ in corrispondenza delle codifiche sopra presentate e nel caso in cui l’impulso di segnalazione sia un rettangolo di durata T_0 .

I.3 – La rivelazione del segnale numerico PAM.

Il segnale $r(t)$ in uscita dal canale, supposto ideale e privo di rumore, assume la forma:

$$(I.3.1) \quad r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p(t - nT_0 - t_d)$$

essendo t_d il ritardo di propagazione.

Nel generico intervallo di simbolo $[kT_0, (k+1)T_0)$, se l’impulso di segnalazione è confinato in $[0, T_0)$, il segnale ricevuto vale:

$$(I.3.2) \quad r(t) = a_k p(t - kT_0 - t_d) + n(t) \quad t \in (kT_0, (k+1)T_0]$$

e dipende dal valore della cifra a_k inviata dal trasmettitore.

Per procedere alla stima della cifra trasmessa il ricevitore campiona il segnale ricevuto con una velocità pari a $\frac{1}{T_0}$. Il valore del segnale letto al generico istante $t_k = kT_0 + t_d + \tau$, essendo τ un’opportuna quantità appartenente all’intervallo $[0, T_0)$, vale:

$$(I.3.3) \quad r(t_k) = a_k p(\tau) + n(t_k)$$

In quel che segue la precedente si scrive nella forma:

$$(I.3.4) \quad r = \alpha a + n$$

dove si è posto $r \equiv r(t_k)$, $\alpha \equiv p(\tau)$, $a \equiv a_k$ e $n \equiv n(t_k)$.

È ovvio che in dipendenza dei valori assunti dal rumore n si possono commettere errori nella rivelazione dei dati; nasce pertanto spontaneo valutare le prestazioni del ricevitore in termini della probabilità di errore definita dalla:

$$(I.3.5) \quad P_e = \Pr\{\hat{d}_k \neq d_k\}$$

e cioè alla probabilità che si verifichi l’evento $\{\hat{d}_k \neq d_k\}$ che corrisponde alla circostanza che il simbolo rivelato \hat{d}_k risulti diverso da quello d_k inviato dalla sorgente.

Se con a_0 ed a_1 si denotano le cifre corrispondenti ai simboli $d = 0$ e $d = 1$ rispettivamente, in assenza di rumore il campione del segnale ricevuto r assume i valori αa_0 o αa_1 così

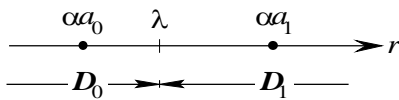


Fig. I.4 - Costellazione dei segnali.

come è mostrato in Fig. I.4. In presenza del rumore, il campione r si identifica con un generico punto dell'asse r . Una decisione può essere presa individuando un valore di soglia λ e decidere a favore del simbolo $d_k = 0$

($d_k = 1$) se il valore del campione ricevuto è inferiore (superiore) al valore della soglia λ . Con riferimento alla Fig. I.4 il criterio di decisione comporta che dette $D_0 = \{r : r < \lambda\}$ e $D_1 = \{r : r > \lambda\}$ le cosiddette *regioni di decisione*, si prende la decisione a favore del simbolo $d_k = 0$ ($d_k = 1$) se r è contenuto in D_0 (D_1). È ovvio che si ha $D_0 \cup D_1 = \mathbb{R}$ e $D_0 \cap D_1 = \emptyset$.

Nel caso di trasmissione PAM binaria, considerata in questo paragrafo, lo schema del ricevitore si presenta come è indicato in Fig. I.5. Il valore campionato del segnale all'istante t_k , è confrontato con una soglia λ e, secondo il segno della quantità $r - \lambda$, è presa una decisione sul simbolo d_k da rivelare.

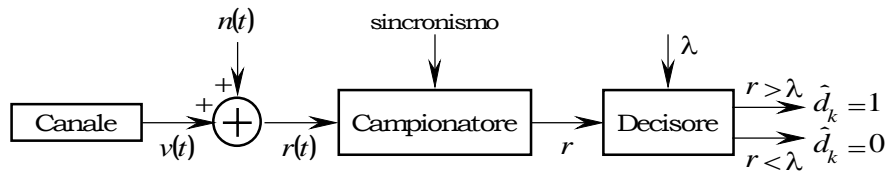


Fig. I.5 - Schema di principio del ricevitore.

Per definire completamente la struttura del ricevitore occorre determinare il valore della soglia λ . Con riferimento alla Fig. I.5, è evidente che la decisione sulla cifra d_k è ottenuta secondo lo schema seguente:

$$(I.3.6) \quad \begin{aligned} \text{se } r > \lambda &\Rightarrow \hat{d}_k = 1 \\ \text{se } r < \lambda &\Rightarrow \hat{d}_k = 0 \end{aligned}$$

In base alla (I.3.4) è facile riconoscere che:

1) se è $d_k = 0$ il simbolo trasmesso, si commette errore quando si verifica la condizione:

$$(I.3.7) \quad r = a_0\alpha + n > \lambda$$

ovvero quando è:

$$(I.3.8) \quad n > \lambda - a_0\alpha$$

2) se è $d_k = 1$ il simbolo trasmesso, si commette errore quando si verifica la condizione:

$$(I.3.9) \quad r = a_1\alpha + n < \lambda$$

ovvero quando è:

$$(I.3.10) \quad n < \lambda - a_1\alpha$$

Poiché gli eventi $\{d_k = 0\}$ e $\{d_k = 1\}$ sono disgiunti, se si suppongono equiprobabili con $\Pr\{d_k = 0\} = \Pr\{d_k = 1\} = \frac{1}{2}$, la probabilità di errore vale:

$$(I.3.11) \quad P_e = \frac{1}{2} \Pr\{r > \lambda \mid d_k = 0\} + \frac{1}{2} \Pr\{r < \lambda \mid d_k = 1\}$$

che, tenendo conto delle (I.3.9) e (I.3.11), diventa:

$$(I.3.12) \quad P_e = \frac{1}{2} \Pr\{n > \lambda - a_0\alpha\} + \frac{1}{2} \Pr\{n < \lambda - a_1\alpha\}$$

Detta $p_n(n)$ la densità di probabilità del primo ordine associata alla variabile aleatoria n , la precedente può essere riscritta come:

$$(I.3.13) \quad P_e = \frac{1}{2} \int_{\lambda - a_0 \alpha}^{\infty} p_n(n) dn + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\lambda - a_1 \alpha} p_n(n) dn$$

Tale quantità dipende dal valore di soglia λ ; di conseguenza può determinarsi il valore ottimo λ_0 di λ che rende minimo la P_e imponendo la condizione:

$$(I.3.14) \quad \left. \frac{\partial P_e}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = 0$$

che in base alla (I.3.13) equivale alla:

$$(I.3.15) \quad \frac{p_n(\lambda - a_0 \alpha)}{p_n(\lambda - a_1 \alpha)} = 1$$

Se il rumore $n(t)$ si suppone stazionario, gaussiano a valor medio nullo e varianza σ^2 , risulta:

$$(I.3.16) \quad p_n(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right]$$

e la condizione (I.3.15) dà luogo alla:

$$(I.3.17) \quad \lambda_0 = \alpha \frac{a_0 + a_1}{2}$$

Tenendo conto della (I.3.17), la (I.3.13) vale:

$$(I.3.18) \quad P_e = \frac{1}{2} \int_{\frac{\alpha}{2}(a_1 - a_0)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-\frac{\alpha}{2}(a_1 - a_0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn = \int_{\frac{\alpha}{2}(a_1 - a_0)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn$$

che, ricordando l'espressione della funzione $Q(x)$:

$$(I.3.19) \quad Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

assume la forma:

$$(I.3.20) \quad P_e = Q\left(\frac{\alpha}{\sigma} \frac{a_1 - a_0}{2}\right)$$

Dall'esame della (I.3.20) si deduce che la probabilità di errore dipende dal parametro $\alpha = q(\tau)$. Poiché la funzione $Q(x)$ è una funzione decrescente del suo argomento, si raggiunge una condizione ottima quando si sceglie τ pari all'istante in cui l'impulso di segnalazione $q(t)$ raggiunge il massimo.

Nel caso di codifica unipolare, essendo $a_0 = 0$; $a_1 = 1$, la (I.3.20) diventa:

$$(I.3.21) \quad P_e = Q\left(\frac{\alpha}{2\sigma}\right)$$

Ne caso di codifica bipolare, essendo $a_0 = -1$; $a_1 = 1$, si ottiene:

$$(I.3.22) \quad P_e = Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$$

I.4 - Il ricevitore ottimo.

Come si deduce dalla (I.3.20) la probabilità di errore di rivelazione dipende, a parità di forma di segnalazione, dalla quantità $\frac{\alpha}{\sigma}$ attraverso la funzione $Q(x)$ definita dalla (I.3.19). Poiché la funzione $Q(x)$ è strettamente decrescente all'aumentare del suo argomento, si conclude che la massimizzazione della quantità $\frac{\alpha}{\sigma}$ conduce ad un ricevitore che fornisce le

migliori prestazioni in termini di probabilità di errore.

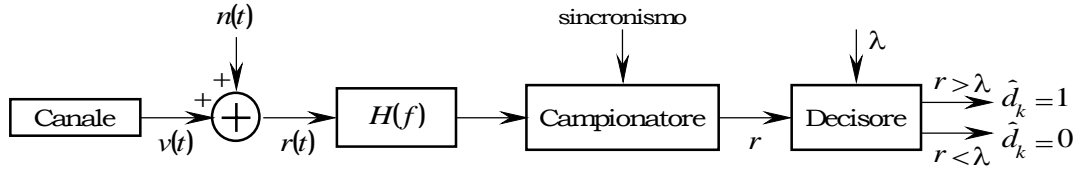


Fig. I.6 - Struttura del ricevitore ottimo.

Limitandosi a considerare la classe dei ricevitori la cui struttura è riportata in Fig. I.6, comprendente un filtro in ingresso, supposto lineare e tempo invariante, caratterizzato da una risposta in frequenza uguale a $H(f)$, il problema del ricevitore ottimo consiste nel determinare la forma $H_o(f)$ della risposta in frequenza del filtro che renda massima la quantità $\frac{\alpha}{\sigma}$ (o che è lo stesso di $(\frac{\alpha}{\sigma})^2$) che corrisponde al rapporto fra il segnale utile e la deviazione standard del rumore all'istante di campionamento:

$$(I.4.1) \quad t_k = kT_0 + t_d + \tau \quad \tau \in [0, T_0)$$

scelto nell'intervallo $[kT_0, (k+1)T_0)$.

Se $Q(f)$ denota la trasformata di Fourier dell'impulso di segnalazione all'ingresso del filtro è:

$$(I.4.2) \quad \alpha = q(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(f)H(f)e^{j2\pi f\tau} df$$

D'altra parte, se il rumore $n(t)$ in ingresso è stazionario, bianco (con densità spettrale $\frac{N_0}{2}$), a valor medio nullo, la varianza del rumore in uscita dal filtro vale:

$$(I.4.3) \quad \sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

La quantità $(\frac{\alpha}{\sigma})^2$ allora diviene:

$$(I.4.4) \quad \gamma^2 = \left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^2 = \frac{2}{N_0} \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} Q(f)H(f)e^{j2\pi f\tau} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$

Per determinare il valore ottimo di $H(f)$ basta far riferimento alla disuguaglianza di Schwarz secondo la quale se $U(f)$ e $V(f)$ sono due funzioni complesse di variabile reale f , a quadrato integrabile in \mathbb{R} , si ha:

$$(I.4.5) \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} U(f)V^*(f)df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |U(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df$$

dove il segno di uguaglianza vale solo se è

$$(I.4.6) \quad U(f) = k \cdot V(f)$$

e cioè se le due funzioni sono proporzionali.

Ponendo nella (I.4.5):

$$(I.4.7) \quad U(f) = H(f) \quad V(f) = Q^*(f)e^{-j2\pi f\tau}$$

si ottiene:

$$(I.4.8) \quad \gamma \leq \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |Q(f)|^2 df \equiv \gamma_o$$

Ciò significa che al variare di $H(f)$ la quantità γ non supera il limite γ_o che costituisce pertanto il suo valore massimo. Tale massimo si raggiunge quando è verificata la condizione (I.4.6) che, tenendo conto delle posizioni fatte, consente di dedurre l'espressione della carat-

teristica del filtro ottimo:

$$(I.4.9) \quad H_o(f) = kQ^*(f)e^{-j2\pi f\tau}$$

cui corrisponde la risposta impulsiva:

$$(I.4.10) \quad h_o(t) = Kq(\tau - t)$$

dependente dalla forma dell'impulso di segnalazione. Per questo motivo il filtro in questione prende il nome di **filtro adattato**.

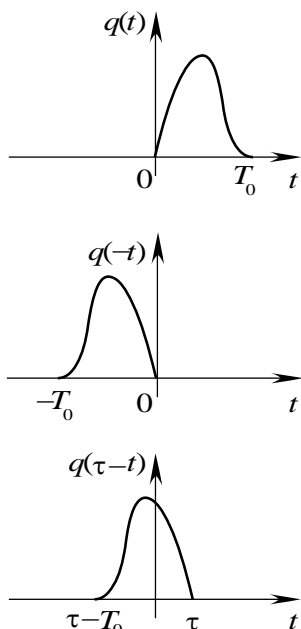


Fig. I.7 - Condizioni di causalità per il filtro adattato.

La quantità γ_o diventa:

$$(I.4.11) \quad \gamma_o = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |Q(f)|^2 df = \frac{2}{N_0} \int_{T_0} q^2(t) dt = \frac{2E}{N_0}$$

dove E rappresenta l'energia dell'impulso di segnalazione $q(t)$.

Si noti infine che non sempre il filtro, definito dalla (I.4.10) risulta fisicamente realizzabile, giacché la funzione $h_o(t)$ può violare la condizione di causalità espressa dalla

$$(I.4.12) \quad h_o(t) \equiv 0 \text{ per } t < 0$$

Tuttavia, se $q(t)$ è un impulso di durata T_0 , $h_o(t)$ risulta fisicamente realizzabile solo se (v. Fig. I.7) è $\tau = T_0$. In tal caso $h_o(t)$ diventa:

$$(I.4.13) \quad h_o(t) = Kq(T_0 - t)$$

Nel caso particolare in cui $q(t)$ sia un impulso rettangolare limitato nell'intervallo $[0, T_0)$, di altezza unitaria e durata

T_0 , la risposta $y(t)$ del filtro adattato a un ingresso $x(t)$ è:

$$(I.4.14) \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \lambda)h_o(\lambda)d\lambda = K \int_{t-T_0}^t x(\lambda)d\lambda$$

che, nel generico istante di campionamento $t_k = (k + 1)T_0$ vale:

$$(I.4.15) \quad y(t_k) = K \int_{kT_0}^{(k+1)T_0} x(\lambda)d\lambda$$

Un tale filtro può essere quindi realizzato da un integratore il quale è azzerato negli istanti $t_k = (k + 1)T_0$, provenienti dal sincronismo generato al ricevitore, come è mostrato in Fig. I.8.

Se $q(t)$ ha una forma diversa dalla rettangolare ma pur sempre limitata nell'intervallo $[0, T_0)$ il segnale in uscita dal filtro adattato, quando al suo ingresso è applicato il segnale $x(t)$ e valutato all'istante T_0 ,

vale:

$$(I.4.16) \quad y(T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h_o(T_0 - \lambda)d\lambda = k \int_0^{T_0} x(\lambda)q(\lambda)d\lambda$$

Dalla (I.4.15) si deduce che lo schema del ricevitore ottimo può assumere la struttura a **correlatore** riportata in Fig. I.9, che comporta le operazioni di prodotto e successiva integrazione.

Rispetto alla struttura a filtro adattato lo schema a correlatore è più flessibile quando è necessario variare la forma dell'impulso di segnalazione; in tal caso basta infatti generare al

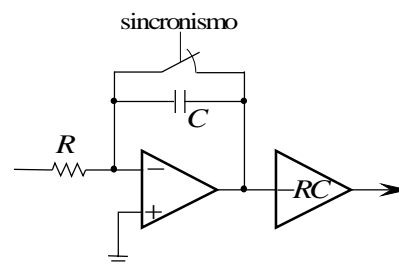


Fig. I.8 - Integratore - azzeratore.

ricevitore la sequenza $\Sigma q(t - kT_0)$ senza dover sostituire il filtro come nel caso di ricevitore a filtro adattato.

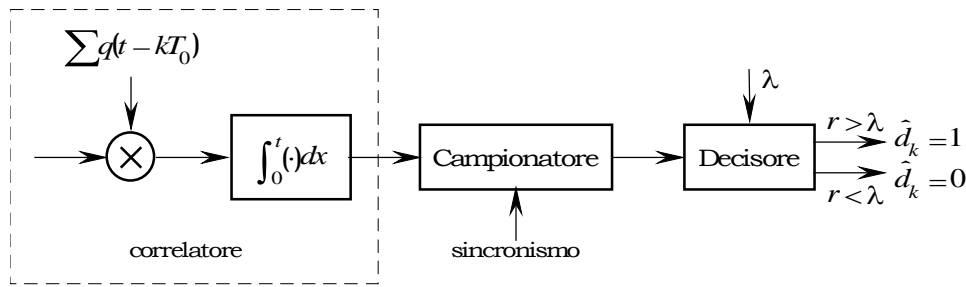


Fig. I.9 – Ricevitore ottimo a correlazione.

Rispetto alla struttura a filtro adattato lo schema a correlatore è più flessibile quando è necessario variare la forma dell'impulso di segnalazione; in tal caso basta infatti generare al ricevitore la sequenza $\Sigma q(t - kT_0)$ senza dover sostituire il filtro come nel caso di ricevitore a filtro adattato.

Tenendo conto della (I.4.11) la probabilità di errore, data dalla (I.3.20), diventa:

$$(I.4.17) \quad P_e = Q\left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{N_0}} \frac{a_1 - a_0}{\sqrt{2}}\right)$$

Nel caso di codifica bipolare ($a_0 = -1$; $a_1 = 1$), la (I.4.17) fornisce:

$$(I.4.18) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

Nel caso di codifica unipolare, essendo $a_0 = 0$ $a_1 = 1$, si ha:

$$(I.4.19) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

Al fine di paragonare i due sistemi di segnalazione è opportuno introdurre l'energia media per simbolo E_m definita dalla:

$$(I.4.20) \quad E_m = E\{a_k^2\} \int_{T_0} q^2(t) dt = E\{a_k^2\} E$$

che vale:

$$(I.4.21) \quad E_m = \begin{cases} E & \text{codifica bipolare} \\ \frac{1}{2} E & \text{codifica unipolare} \end{cases}$$

e quindi la probabilità di errore P_e , in termini del rapporto $\frac{E_m}{N_0}$, diventa:

$$(I.4.22) \quad P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{\frac{2E_m}{N_0}}\right) & \text{codifica bipolare} \\ Q\left(\sqrt{\frac{E_m}{N_0}}\right) & \text{codifica unipolare} \end{cases}$$

In Fig. I.10 sono riportati gli andamenti della probabilità di errore in funzione di $\frac{E_m}{N_0}$ per i due tipi di codifica esaminati. A parità di $\frac{E_m}{N_0}$ la probabilità di errore è minore nel caso di codifica bipolare rispetto a

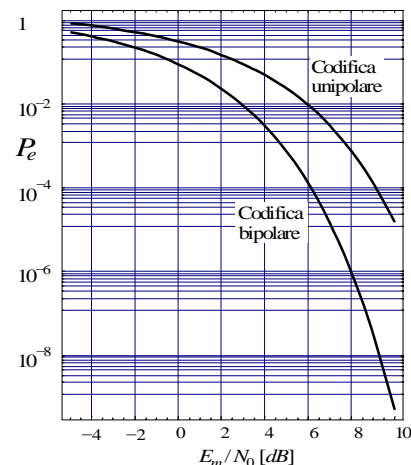


Fig. I.10 - Probabilità di errore in funzione di E_m/N_0 .

quella che si ottiene con codifica unipolare; per ottenere lo stesso valore di P_e , infatti, la codifica bipolare comporta una riduzione del rapporto $\frac{E_m}{N_0}$ di 2 che espresso in dB vale circa $(10 \log_{10} 2 \text{ dB})$ e cioè 3 dB .

I.5 - Codifica PAM multilivello.

I.5.1 - Codifica di Gray.

Nel caso di codifica multilivello i simboli a_n possono assumere valori appartenenti ad un alfabeto composto da M elementi distinti.

Supponendo che i simboli a_n siano distribuiti simmetricamente rispetto allo zero e che la distanza fra un livello e il successivo sia 2 si ha:

$$(I.5.1) \quad a_n = 2n - (M - 1) \quad n = 0, 2, \dots, M - 1$$

La codifica multilivello può essere usata nella trasmissione di dati binari. In tal caso le cifre d_n del messaggio sono raggruppate in blocchi di m elementi ed ad ogni configurazione di cifre si fa corrispondere un valore a_n scelto fra

$$(I.5.2) \quad M = 2^m$$

possibili secondo opportune regole all'uopo stabilite. Così ad esempio nel caso di codifica a $M = 4$ livelli, adottando lo schema di codifica riportato nella Tab. I.1, il segnale numerico assume la forma indicata in Fig. I.11.

Tabella I.1

d_{n-1}	d_n	a_n
0	0	-3
0	1	-1
1	1	1
1	0	3

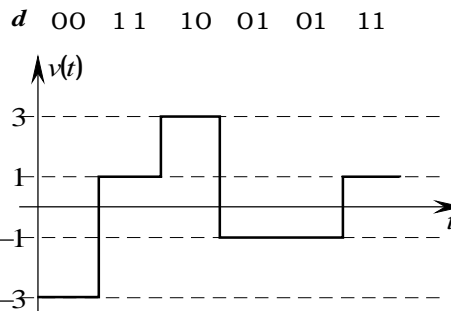


Fig. I.11- Codifica multilivello.

Codici di questo tipo sono detti **codici di Gray**. Essi sono caratterizzati dal fatto che sequenze binarie corrispondenti a due livelli contigui differiscono solo per un bit.

Si noti che, con $m = 4$ risulta $T_0 = 2T_d$. Più in generale è $T_0 = mT_d$ e di conseguenza la velocità di modulazione vale:

$$(I.5.3) \quad R = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{T_d \log_2 M} = \frac{r}{\log_2 M}$$

e risulta inferiore al ritmo binario r . È da osservare, però, che se i livelli a_n sono equiprobabili, l'informazione media associata ad ogni simbolo a_n è $\log_2 M$, cosicché la velocità d'informazione risulta pari a $R \cdot \log_2 M = r$ come nel caso della trasmissione binaria.

I.5.2 - Probabilità di errore.

Nel caso di codifica multilivello è opportuno far distinzione fra la probabilità di errore per bit definita dalla $P_{eb} = \Pr\{\hat{d}_k \neq d_k\}$ e la probabilità di errore per simbolo M -ario data dalla $P_e = \Pr\{\hat{a}_k \neq a_k\}$. In generale è complicato mettere in relazione le due probabilità di errore;

tuttavia se si adotta una codifica di Gray e se si considera trascurabile la probabilità che si rilevi un livello non adiacente da quello trasmesso, la probabilità di errore per bit sarà allora data dalla

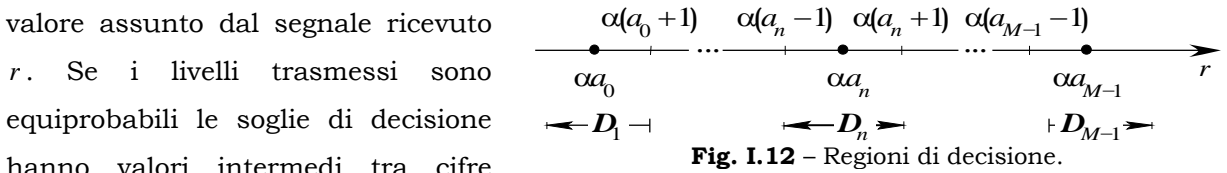
$$(I.5.4) \quad P_{eb} = \frac{P_e}{m} = \frac{P_e}{\log_2 M}$$

Per valutare la probabilità di errore per simbolo basta ricordare che, nell'ipotesi che il canale di trasmissione sia ideale, il segnale in ingresso al demodulatore è:

$$(I.5.5) \quad r = \alpha a + n$$

essendo, come prima, r ed n i valori dei campioni del segnale ricevuto e del rumore nell'istante di campionamento $t_k = kT_0 + t_d + \tau$. L'attenuazione di canale α , come precedentemente, è pari a $q(\tau)$ ed a denota il generico simbolo M -ario trasmesso.

Seguendo lo stesso criterio di decisione adottato per il caso binario, il ricevitore decide sul simbolo a_n trasmesso secondo il



valore assunto dal segnale ricevuto r . Se i livelli trasmessi sono equiprobabili le soglie di decisione hanno valori intermedi tra cifre adiacenti per cui la decisione sul livello a_n è presa:

- a) per i livelli intermedi, se r è contenuto nell'intervallo $(\alpha(a_n - 1), \alpha(a_n + 1)]$;
- b) per i livelli terminali, si decide a favore del livello a_0 se r cade in $(-\infty, \alpha(a_0 + 1)]$ e a favore del livello a_{M-1} se r è contenuto in $[\alpha(a_{M-1} - 1), +\infty)$. (v. Fig. I.12).

Detto allora D_n ($n = 0, 2, \dots, M-1$) il generico intervallo di decisione è:

$$(I.5.6) \quad P_e = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \Pr\{r \notin D_n | a = a_n\}$$

in cui

$$(I.5.7) \quad \begin{aligned} \Pr\{r \notin D_n | a = a_n\} &= \Pr\{r < \alpha(a_n - 1); r > \alpha(a_n + 1) | a = a_n\} = \\ &= \Pr\{r < \alpha(a_n - 1) | a = a_n\} + \Pr\{r > \alpha(a_n + 1) | a = a_n\} = \\ &= \Pr\{n < -\alpha\} + \Pr\{n > \alpha\} \end{aligned} \quad 1 \leq n \leq M-2$$

dove si è tenuto conto del fatto che gli eventi $\{r < \alpha(a_n - 1) | a = a_n\}$ e $\{r > \alpha(a_n + 1) | a = a_n\}$ sono disgiunti. Inoltre è:

$$(I.5.8) \quad \begin{aligned} \Pr\{r \notin D_0 | a = a_0\} &= \Pr\{r > \alpha(a_0 + 1) | a = a_0\} = \Pr\{n > \alpha\} \\ \Pr\{r \notin D_{M-1} | a = a_{M-1}\} &= \Pr\{r < \alpha(a_{M-1} - 1) | a = a_{M-1}\} = \Pr\{n < -\alpha\} \end{aligned}$$

Se il rumore $n(t)$ è un processo stazionario gaussiano a media nulla e varianza σ^2 si ha:

$$(I.5.9) \quad \Pr\{n > \alpha\} = \Pr\{n < -\alpha\} = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn = Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$$

dove si è fatto uso della funzione $Q(x)$ definita dalla (I.3.19). Tenendo conto delle (I.5.7) e (I.5.8), la (I.5.6) diventa

$$(I.5.10) \quad P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$$

Tenendo conto della (I.5.10) la probabilità di errore per bit, data dalla (I.5.4), diventa:

$$(I.5.11) \quad P_{eb} = 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$$

Come nel caso binario la P_{eb} dipende dal rapporto α/σ cosicché il minimo di tale quanti-

tà si ottiene in presenza di filtro adattato. Supponendo che il rumore introdotto dal canale sia bianco e con densità spettrale pari a $\frac{N_0}{2}$, il minimo della P_{eb} è dato dalla:

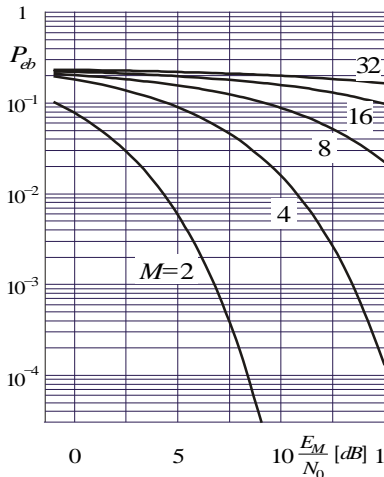


Fig. I.13 - Probabilità di errore per segnali PAM multilivello in funzione di E_M / N_0 .

$$(I.5.12) \quad P_{eb} = 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \right)$$

Introducendo anche in questo caso l'energia media per simbolo, definita dalla:

$$(I.5.13) \quad E_M = E \{a_n^2\} E = \frac{1}{M} \left[\sum_{n=1}^M a_n^2 \right] E = \frac{M^2-1}{3} E$$

in cui E denota l'energia dell'impulso di segnalazione in arrivo dal canale.

In termini dell'energia media per simbolo la probabilità di errore per bit vale:

$$(I.5.14) \quad P_{eb} = 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q \left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}} \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right)$$

In Fig. I.13 sono rappresentati gli andamenti della P_{eb} in funzione di E_M / N_0 per diversi valori di M .

I.6 - Trasmissione su canali reali.

Nei casi reali il canale di trasmissione introduce distorsioni ed il segnale è corrotto da disturbi ed interferenze provenienti da altre trasmissioni; cosicché, supponendo il canale lineare e tempo invariante e il rumore introdotto di tipo additivo, si può scrivere:

$$(I.6.1) \quad r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q(t-nT-t_d) + n(t)$$

in cui $q(t)$ denota la risposta del canale all'impulso di segnalazione $p(t)$ ed $n(t)$ il rumore in uscita. Nella (I.6.1) t_d denota il ritardo introdotto dal canale, $\frac{1}{T}$ la velocità di modulazione e a la sequenza numerica trasmessa in cui le cifre a_n appartengono ad un alfabeto ad M dimensioni. Supponendo che il ricevitore si avvalga di un perfetto sincronismo, il valore r_k di $r(t)$ all'istante $t_k = kT + t_d + \tau$ si può porre nella forma:

$$(I.6.2) \quad r_k = a_k q(\tau) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq k)}}^{\infty} a_n q[(k-n)T + \tau] + n(t_k)$$

Nella (I.6.2) si distinguono tre termini:

- la quantità $a_k q(\tau)$ che costituisce il segnale utile dato che essa è proporzionale al valore a_k del simbolo che si vuole rivelare;
- la quantità $\sum_{n \neq k} a_n q[(k-n)T + \tau]$ che tiene conto della presenza di tutti i simboli a_k della sequenza trasmessa, eccetto il k -esimo, e che pertanto costituisce la cosiddetta **interferenza d'intersimbolo** (ISI *InterSymbol Interference*);

$$(I.6.3) \quad i(t_k) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} a_n q[(k-n)T + \tau] = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} a_{k-m} q(mT + \tau)$$

- la quantità $n(t_k)$ che tiene conto del rumore introdotto dal canale.

Se l'impulso di segnalazione $p(t)$ si suppone nullo per $t < 0$, la condizione di causalità imposta al canale comporta che $q(t) = 0$ per $t < 0$ cosicché l'interferenza d'intersimbolo diven-

ta $\sum_{n=-\infty}^{k-1} a_n q[(k-n)T + \tau]$ dato che tiene conto soltanto di tutti gli elementi della sequenza a che precedono quello di posto k . Poiché il termine $i(t_k)$ può ritenersi indipendente dal rumore additivo $n(t_k)$, il segnale utile è allora corrotto da un disturbo equivalente $i(t_k) + n(t_k)$ la cui potenza specifica è maggiore di quella del solo rumore $n(t_k)$; ciò comporta quindi un incremento della probabilità di errore P_e .

I.7 - Condizione di Nyquist.

Allo scopo di migliorare le prestazioni di un sistema di trasmissione numerica in presenza di ISI è opportuno realizzare le condizioni che consentono di annullare l'interferenza d'intersimbolo; supponendo, per semplicità, che sia $\tau = 0$, tale condizione può essere realizzata solo se l'impulso ricevuto $q(t)$ sia tale da aversi:

$$(I.7.1) \quad q(mT) = \begin{cases} \alpha & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

Nel dominio della frequenza le (I.7.1) corrispondono alle:

$$(I.7.2) \quad q(mT) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(f) e^{j2\pi m f T} df = \begin{cases} \alpha & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

dove $Q(f)$ denota la trasformata di Fourier dell'impulso $q(t)$.

Poiché il termine esponenziale che compare nella (I.7.2) è una funzione di f periodica di periodo $\frac{1}{T}$, conviene segmentare l'intervallo di integrazione nell'insieme numerabile di intervalli contigui del tipo $[\frac{k}{T} - \frac{1}{2T}, \frac{k}{T} + \frac{1}{2T}]$ di ampiezza $\frac{1}{T}$. Si ha allora:

$$(I.7.3) \quad \begin{aligned} q(mT) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{k}{T} - \frac{1}{2T}}^{\frac{k}{T} + \frac{1}{2T}} Q(f) e^{j2\pi m f T} df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} Q(f + \frac{k}{T}) e^{j2\pi m (f + \frac{k}{T}) T} df = \\ &= \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q(f + \frac{k}{T}) e^{j2\pi m f T} df = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} Q_{eq}(f) e^{j2\pi m f T} df \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della trasformazione $f \rightarrow f - \frac{k}{T}$ e si è posto:

$$(I.7.4) \quad Q_{eq}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q(f + \frac{k}{T})$$

Poiché, come è facile riconoscere, la funzione $Q_{eq}(f)$ è una funzione periodica in f con periodo $\frac{1}{T}$ essa pertanto potrà essere espansa nella seguente serie di Fourier:

$$(I.7.5) \quad Q_{eq}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f T}$$

il cui generico coefficiente C_n vale:

$$(I.7.6) \quad C_n = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} Q_{eq}(f) e^{-j2\pi n f T} df$$

che, tenendo conto delle (I.7.1) e (I.7.3), si riduce alla

$$(I.7.7) \quad C_n = \begin{cases} \alpha T & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Di conseguenza, per la (I.7.5), la $Q_{eq}(f)$ diventa,

$$(I.7.8) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q(f + \frac{k}{T}) = \alpha T$$

che costituisce la cosiddetta **condizione di Nyquist**.

Se il canale di trasmissione si suppone a banda limitata, la funzione $Q(f)$ deve essere tale da aversi:

$$(I.7.9) \quad Q(f) \equiv 0 \text{ per } |f| > B$$

essendo B l'ampiezza di banda del canale. Di conseguenza, come si rileva dalla (I.7.8) la possibilità di annullamento dell'interferenza d'intersimbolo dipende dai valori della banda B del canale e dalla velocità di modulazione $R = \frac{1}{T}$.

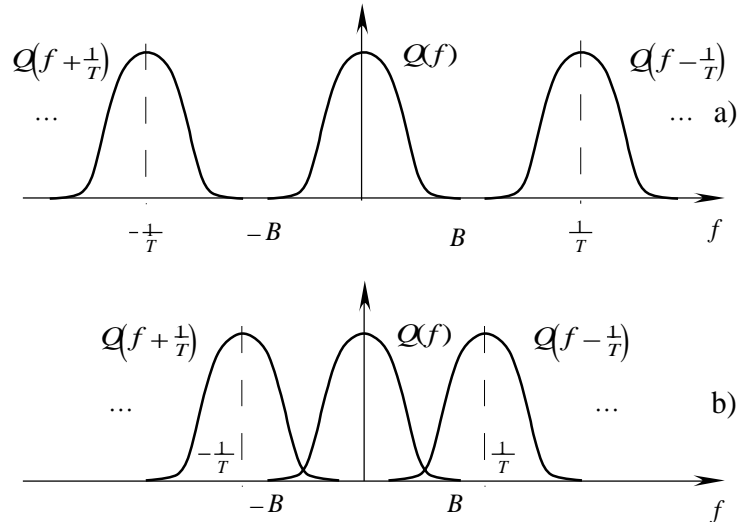


Fig. I.17 - Condizioni per l'annullamento dell'interferenza d'intersimbolo

Si deduce infatti dalla Fig. I.17,a) che se risulta $\frac{1}{T} > 2B$ la condizione (I.7.8) non può essere soddisfatta. Se è:

$$(I.7.10) \quad \frac{1}{T} \leq 2B$$

è possibile rendere $Q_{eq}(f)$ costante a patto di sagomare la forma di $Q(f)$ in modo tale da aversi:

$$(I.7.11) \quad \begin{aligned} Q\left(f + \frac{1}{T}\right) + Q(f) &= \alpha T & -\frac{1}{T} \leq f \leq 0 \\ Q(f) + Q\left(f - \frac{1}{T}\right) &= \alpha T & 0 \leq f \leq \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Ponendo $f = \varphi - \frac{1}{2T}$ nella prima delle (I.7.11) e $f = \varphi + \frac{1}{2T}$ nella seconda, le precedenti si riducono alle (scrivendo f al posto di φ):

$$(I.7.12) \quad Q\left(\frac{1}{2T} + \varphi\right) + Q\left(\varphi - \frac{1}{2T}\right) = Q\left(\frac{1}{2T} + \varphi\right) + Q^*\left(\frac{1}{2T} - \varphi\right) = \alpha T \quad \left(-\frac{1}{2T} \leq \varphi \leq \frac{1}{2T}\right)$$

che costituisce la cosiddetta condizione di **simmetria vestigiale**.

Denotando con $\vartheta(f)$ l'argomento della $Q(f)$, dalla precedente si ottiene:

$$(I.7.13) \quad \left|Q\left(\frac{1}{2T} + \varphi\right)\right| e^{j\vartheta\left(\frac{1}{2T} + \varphi\right)} + \left|Q\left(\frac{1}{2T} - \varphi\right)\right| e^{-j\vartheta\left(\frac{1}{2T} - \varphi\right)} = \alpha T$$

che è soddisfatta quando è:

$$(I.7.14) \quad \begin{aligned} \vartheta\left(\frac{1}{2T} + \varphi\right) &= \vartheta\left(\frac{1}{2T} - \varphi\right) = 2k\pi \\ \left|Q\left(\frac{1}{2T} + \varphi\right)\right| + \left|Q\left(\frac{1}{2T} - \varphi\right)\right| &= \alpha T \end{aligned}$$

In conclusione se tra i valori di B e T sussiste la disuguaglianza (I.7.10) è possibile trasmettere su canali a banda limitata in assenza di interferenza d'intersimbolo; occorre in tal caso inserire all'uscita del canale un filtro opportuno detto **filtro equalizzatore** tale che

l'impulso di segnalazione $q(t)$, in uscita dalla cascata canale-filtro equalizzatore, soddisfi le condizioni (I.7.8).

Normalmente le condizioni (I.7.8) sono ottenute sagomando $Q(f)$ secondo la forma detta **a coseno rialzato**:

$$(I.7.15) \quad Q(f) = \begin{cases} \alpha T & |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \alpha T \cos^2 \frac{\pi T}{2\beta} \left(|f| - \frac{1-\beta}{2T} \right) & \frac{1-\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & \frac{1+\beta}{2T} \leq |f| \end{cases}$$

in cui la quantità β che compare nella (I.7.15), nota come coefficiente di **roll-off**, può assumere valori compresi fra 0 e 1.

In Fig. I.18 sono riportati gli andamenti di $\frac{Q(f)}{\alpha T}$ per alcuni valori di β . La banda del segnale $Q(f)$ è in tal caso pari a $B = \frac{1+\beta}{2T}$. Per $\beta = 0$ la (I.7.15) si riduce ad un rettangolo con $B = \frac{1}{2T}$ mentre per $\beta = 1$, la banda B vale $\frac{1}{T}$.

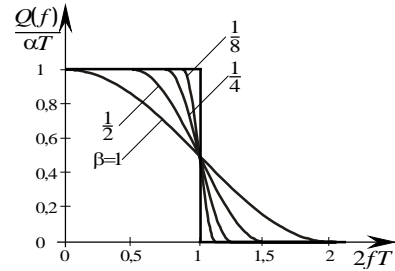


Fig. I.18 - Caratteristiche a coseno rialzato per diversi valori di β .

Se si riguardano tali caratteristiche mantenendo costante la banda B del segnale si ottengono le curve di Fig. I.19 in cui il parametro di roll-off misura lo scostamento di $\frac{1}{T}$ da B .

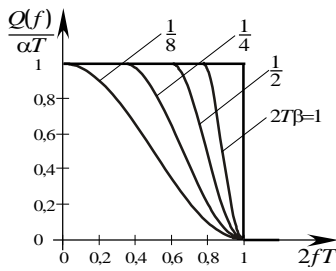


Fig. I.19 - Caratteristiche a coseno rialzato a parità di banda.

Dalla Fig. I.19 si rileva allora che è possibile trasmettere un segnale numerico in modo da annullare l'interferenza d'intersimbolo finché si ha $\frac{1}{2T} \leq B$. La massima velocità di trasmissione si ottiene con caratteristiche di forma rettangolare e risulta $R = 2B$.

Nel dominio del tempo, gli impulsi a coseno rialzato assumono la forma:

$$(I.7.16) \quad q(t) = \alpha T \frac{\cos\left(\frac{2\pi\beta t}{T}\right)}{1 - \left(\frac{2\beta t}{T}\right)^2} \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

e sono rappresentati in Fig. I.20 dalla quale si deduce infine che al tendere di t all'infinito la $q(t)$

va a zero secondo la legge $\frac{1}{1 - \left(\frac{2\beta t}{T}\right)^2}$. Da ciò

consegue che un'incertezza sul sincronismo induce un'interferenza che è tanto limitata quanto maggiore è il parametro β . Per $\beta = 0$, l'interferenza può assumere valori inaccettabili. La segnalazione con impulsi $q(t)$ sagomati secondo la funzione sinc consente pertanto la massima velocità di trasmissione, ma è particolarmente critica riguardo a possibili errori nella ricostruzione del sincronismo.

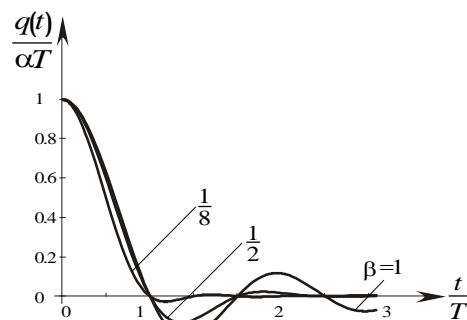


Fig. I.20 - Impulsi $q(t)$ corrispondenti a caratteristiche a coseno rialzato.