

## LA MODULAZIONE NUMERICA

---

---

### II.1- Generalità.

Quando un segnale numerico deve essere trasmesso su canali di tipo passa banda (come ad es. nel caso di collegamenti wireless, comunicazioni su fibre ottiche o su guide d'onda, etc.) è necessario ricorrere al processo di modulazione.

La schema di principio di un sistema di trasmissione si presenta come è indicato in Fig. I.1 del Cap.I. Nella sua forma più generale il segnale modulato è un segnale costituito da una sequenza di forme di segnalazione del tipo:

$$(II.1.1) \quad v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(a_n; t - nT)$$

dove le forme di segnalazione  $s(a_n; t)$  sono di tipo passa-banda e scelte in un insieme  $S_M \equiv \{s_m(t)\}_{m=1}^M$  ad  $M$  dimensioni. Come nel caso della trasmissione numerica in banda base, le forme di segnalazione si suppongono confinate nell'intervallo  $[0, T)$ . Ovviamente è:

$$(II.1.2) \quad M = 2^k$$

Più precisamente in ogni intervallo di durata  $T$ , detto intervallo di segnalazione, multiplo del periodo di simbolo, il codificatore associa ad ogni parola  $D_n \equiv \{d_n, d_{n-1}, \dots, d_{n-(k-1)}\}$ , definita da una  $k$ -pla di dati binari, una cifra  $a_n$  alla quale corrisponde la forma d'onda  $s(a_n; t)$  scelta nell'insieme  $S_M$ .

È opportuno precisare che la forma d'onda  $s(a_n; t)$  può dipendere, in generale, oltre che dal simbolo  $M$ -ario  $D_n$  corrente anche da  $L$  simboli  $M$ -ari precedenti  $[D_{n-1}, D_{n-2}, \dots, D_{n-L}]$  (modulazione con memoria). In questo Capitolo la forma di segnalazione si suppone dipenda solo dal simbolo  $D_n$ , (modulazione **priva di memoria**).

### II.2 – Sistemi di modulazione binari.

In questo paragrafo sono presi in esame i sistemi di modulazione binari in cui cioè l'informazione da trasmettere è costituita da una sequenza di simboli binari  $d$ , supposti equiprobabili, indipendenti ed emessi con velocità pari a  $\frac{1}{T}$  [bit/sec]. È ovvio che in questo caso ad ogni simbolo binario  $d_n$  si associa una cifra  $a_n$  che definisce la forma d'onda  $s(a_n; t)$  scelta in un insieme a 2 dimensioni.

#### III.2.1 – Modulazione ASK binaria.

Nel caso di modulazione ASK (**A**mplitude **S**hift **K**eying) le forme di segnalazione sono definite dalle:

$$(II.2.1) \quad s_m(t) = V_0 a_m \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \text{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) \quad (m = 0, 1)$$

in la corrispondenza tra le cifre  $a_m$  e i simboli binari  $d_m$  obbedisce alla regola:

$$(II.2.2) \quad \begin{aligned} d_m = 0 &\Rightarrow a_m = -1 \\ d_m = 1 &\Rightarrow a_m = 1 \end{aligned}$$

Nella (II.2.1) la quantità  $\varphi$  si suppone una costante indipendente dalla sequenza  $\mathbf{d}$ .

### III.2.2 - Modulazione OOK binaria.

Nella modulazione OOK (**O**n **O**ff **K**eying) le forme di segnalazione sono le stesse della modulazione ASK binaria ma la corrispondenza fra le cifre  $a_m$  e i simboli  $d_m$  è data dalla:

$$(II.2.3) \quad \begin{aligned} d_m = 0 &\Rightarrow a_m = 0 \\ d_m = 1 &\Rightarrow a_m = 1 \end{aligned}$$

### III.2.3 - Modulazione PSK binaria.

Nella modulazione PSK (**P**hase **S**hift **K**eying) le forme di segnalazione sono:

$$(II.2.4) \quad s_m(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t + \vartheta_m + \varphi) \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 0, 1)$$

in cui la corrispondenza tra le fasi  $\vartheta_m$  e i simboli binari  $d_m = 0$  e  $d_m = 1$  segue la regola:

$$(II.2.5) \quad \begin{aligned} d_m = 0 &\Rightarrow \vartheta_m = \pi \\ d_m = 1 &\Rightarrow \vartheta_m = 0 \end{aligned}$$

Confrontando la seconda delle (II.2.4) con la (II.2.1) si riconosce immediatamente che, nel caso binario, le modulazioni ASK e PSK sono indistinguibili, dato che danno luogo allo stesso segnale modulato.

### II.2.3 - Modulazione FSK binaria.

Nella modulazione FSK (**F**requency **S**hift **K**eying) le forme di segnalazione sono:

$$(II.2.6) \quad s_m(t) = V_0 \cos[2\pi(f_0 + a_m \Delta f)t + \varphi] \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 0, 1)$$

dove ai simboli binari  $d_m = 0$  e  $d_m = 1$  sono associate le cifre  $a_m$  come appresso indicato:

$$\begin{aligned} d_m = 0 &\Rightarrow a_m = -1 \\ d_m = 1 &\Rightarrow a_m = 1 \end{aligned}$$

In questo tipo di modulazione la frequenza della portante è aumentata di  $\Delta f$  tutte le volte che è presente il dato  $d_m = 1$  e diminuita di  $\Delta f$  quando è presente il dato  $d_m = 0$ .

In Fig II.2 sono rappresentati gli andamenti del segnale modulato  $v(t)$  per modulazioni ASK, OOK e PSK binaria. Nella stessa figura è riportato l'andamento del corrispondente segnale in banda base dato dalla  $\sum_n a_n \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2} - nT}{T}\right)$ .

## II.3 - Sistemi di modulazione $M$ -ari.

### III.3.1 - Modulazione ASK $M$ -aria.

Nel caso della modulazione ASK  $M$ -aria, le forme di segnalazione sono definite dalle:

$$(II.3.1) \quad s_m(t) = V_0 a_m \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 0, 1, \dots, M-1)$$

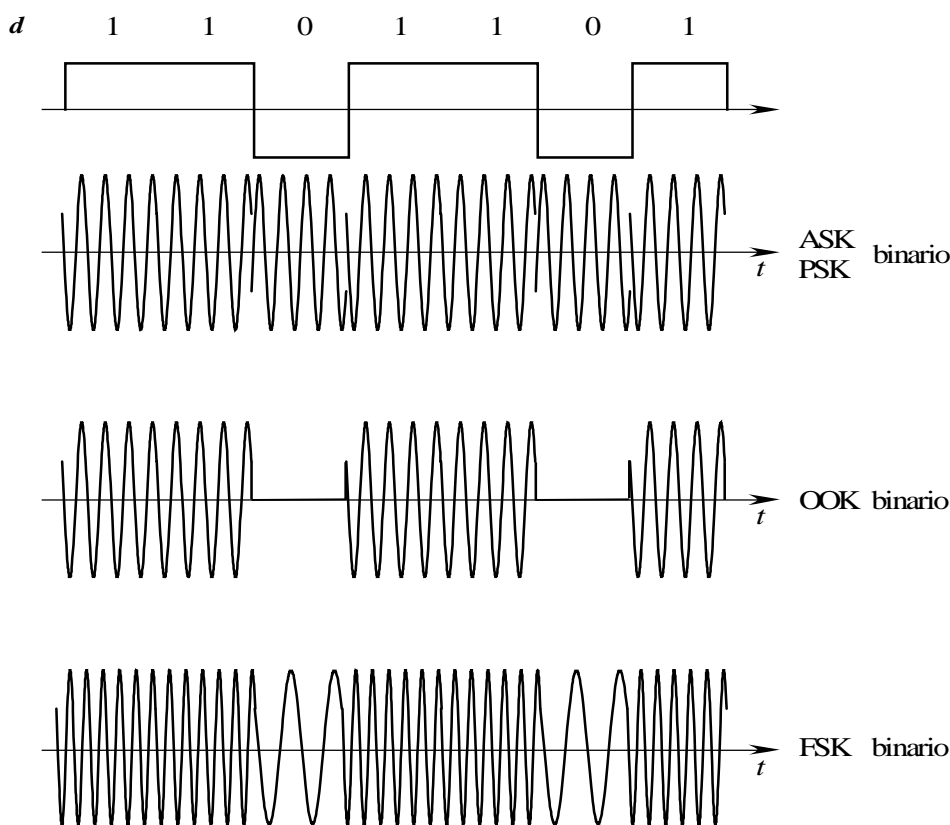
in cui le cifre  $M$ -arie  $a_m$ , poste in corrispondenza con i simboli  $M$ -ari  $D_m$ , sono scelte nell'insieme:

$$(II.3.2) \quad a_m = 2m - (M-1) \quad (m = 0, 1, \dots, M-1)$$

L'insieme delle forme di segnalazione può essere rappresentato per mezzo di un'unica funzione di base  $u(t)$  ottenuta normalizzando il segnale  $s(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \operatorname{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$ .

L'energia specifica di  $s(t)$  vale:

$$\begin{aligned}
 E_s &= \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \\
 &= \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \\
 \text{(II.3.3)} \quad &= \frac{1}{2} \int_0^T [1 + \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)] dt = \\
 &= \frac{T}{2} \left[ 1 + \frac{\sin(4\pi f_0 T + 2\varphi) - \sin(2\varphi)}{4\pi f_0 T} \right]
 \end{aligned}$$



**Fig. II.2** - Rappresentazione dei segnali ASK, OOK e FSK binari.

Nelle normali applicazioni la frequenza della portante è molto maggiore di  $\frac{1}{T}$ , per cui, tenendo conto che è  $f_0 T \gg 1$ , l'energia di  $s(t)$  si può approssimare come segue:

$$\text{(II.3.4)} \quad E_s = \frac{T}{2}$$

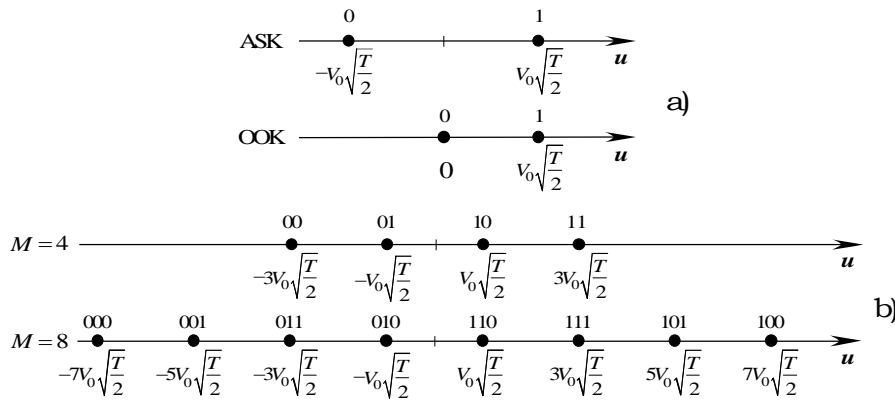
Di conseguenza la funzione di base è:

$$\text{(II.3.5)} \quad u(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

Quanto detto comporta che le forme di segnalazione  $\{s_m(t)\}_{m=0}^{M-1}$  possono essere rappresentate in uno spazio monodimensionale  $S_1$  definito dalla funzione di base  $u(t)$  e si ha:

$$\text{(II.3.6)} \quad s_m = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \cdot a_m \mathbf{u} \quad (m = 0, 1, \dots, M-1)$$

dove  $s_m$  e  $\mathbf{u}$  denotano i vettori rappresentativi dei segnali  $s_m(t)$  e  $u(t)$  rispettivamente.



**Fig. II.3** - Rappresentazione vettoriale delle forme di segnalazione per modulazioni ASK  $M$ -arie ( $M=2$ ,  $M=4$  e  $M=8$ ).

In Fig. II.3 a) è rappresentata la costellazione dei segnali per modulazioni binarie ASK e OOK; in Fig. II.3 b) è riportata la rappresentazione vettoriale dell'insieme dei vettori  $s_m$  per diversi valori di  $M$ . Nelle suddette figure si sono indicati anche le configurazioni dei simboli binari da associare alle forme di segnalazione nell'ipotesi che si adotti il codice di Gray.

Si deduce inoltre facilmente che l'energia  $E_m$  associata alla generica forma di segnalazione  $s_m(t)$  vale:

$$(II.3.7) \quad E_m = \frac{V_0^2 T}{2} a_m^2$$

Essa dipende dal particolare simbolo trasmesso. Di conseguenza, se i simboli  $a_m$  si suppongono equiprobabili, il valore medio di  $E_m$  è:

$$(II.3.8) \quad E = \frac{V_0^2 T}{2} E\{a_m^2\} = \frac{V_0^2 T}{2} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} [2m - (M-1)]^2 = V_0^2 T \frac{M^2 - 1}{6}$$

### II.3.2 - Modulazione PSK $M$ -aria.

Nel caso della modulazione PSK  $M$ -aria, le forme di segnalazione sono:

$$(II.3.9) \quad s_m(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t + \vartheta_m + \varphi) \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 0, 1, \dots, M-1)$$

in cui i simboli  $M$ -ari sono posti in corrispondenza con le fasi:

$$(II.3.10) \quad \vartheta_m = 2\pi \frac{m}{M} \quad (m = 0, 1, \dots, M-1)$$

e cioè:

$$(II.3.11) \quad s_m(t) = V_0 \cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi \frac{m}{M} + \varphi\right) \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 0, 1, \dots, M-1)$$

od anche:

$$(II.3.12) \quad s_m(t) = V_0 \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \left\{ \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \cdot \cos\left(2\pi \frac{m}{M}\right) - \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \cdot \sin\left(2\pi \frac{m}{M}\right) \right\}$$

È opportuno riferire l'insieme dei segnali  $s_m(t)$  alle funzioni di base:

$$(II.3.13) \quad \begin{cases} u_0(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \\ u_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \end{cases}$$

ottenute normalizzando i segnali  $\text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$  e  $\text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$  rispettivamente. È utile osservare che le due funzioni di base  $u_0(t)$  e  $u_1(t)$  sono ortogonali. Infatti, il loro prodotto scalare

$$(II.3.14) \quad (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t)u_1(t)dt = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \sin(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sin(4\pi f_0 t + 2\varphi) dt \cong 0$$

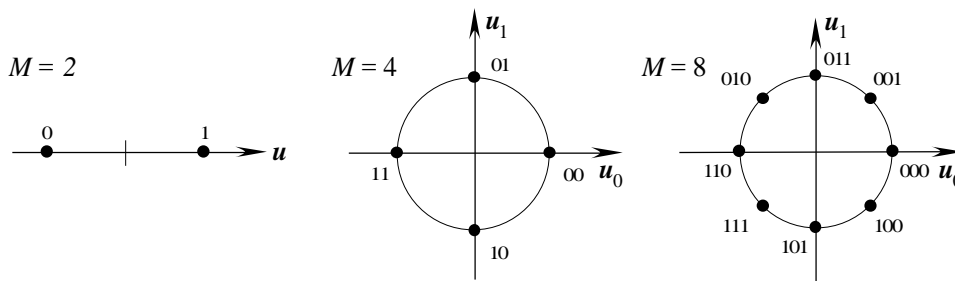
può essere considerato nullo.

Tenendo conto delle (II.3.13) il vettore  $s_m$  rappresentativo del segnale  $s_m(t)$  è:

$$(II.3.15) \quad s_m = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \left\{ \mathbf{u}_0 \cos\left(2\pi \frac{m}{M}\right) - \mathbf{u}_1 \sin\left(2\pi \frac{m}{M}\right) \right\}$$

Esso è dunque riferito ad un sistema di coordinate ortonormali  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ . I segnali  $s_m(t)$  appartengono dunque ad un sottospazio a 2 dimensioni.

Tenendo conto della condizione  $\cos^2\left(2\pi \frac{m}{M}\right) + \sin^2\left(2\pi \frac{m}{M}\right) = 1$ , la costellazione dei segnali  $s_m(t)$ , della quale in Fig. II.4 sono riportati tre esempi, è costituita da un insieme di punti uniformemente distribuiti su una circonferenza di raggio  $V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}$ . Nella stessa figura sono rappresentate le configurazioni dei simboli binari da associare ai vari valori della fase  $\vartheta_m$  nell'ipotesi che si adotti il codice di Gray



**Fig. II.4** - Rappresentazione vettoriale delle forme di segnalazione per modulazioni PSK  $M$ -arie ( $M=2$ ,  $M=4$  e  $M=8$ ).

Nel caso di modulazione PSK  $M$ -aria, l'energia specifica associata a  $s_m(t)$  vale, per la (II.3.15):

$$(II.3.16) \quad E_m = \frac{V_0^2 T}{2}$$

ed è indipendente dall'indice  $m$ . Essa pertanto coincide con l'energia media della segnalazione.

**II.3.3 - Modulazione FSK  $M$ -aria.**

Nel caso della modulazione FSK  $M$ -aria, le forme di segnalazione sono:

$$(II.3.17) \quad s_m(t) = V_0 \cos[2\pi(f_0 + a_m \Delta f)t + \varphi] \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 0, 1, \dots, M - 1)$$

in cui

$$(II.3.18) \quad a_m = 2m - (M - 1) \quad (m = 0, 1, \dots, M - 1)$$

La generica forma di segnalazione  $s_m(t)$  è:

È evidente dalla (II.3.17) che le forme di segnalazione possono essere riferite al seguente sistema di funzioni di base:

$$(II.3.19) \quad u_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos[2\pi(f_0 + a_m \Delta f)t + \varphi] \quad (m = 0, 1, \dots, M - 1)$$

Il prodotto scalare fra due generiche funzioni di base vale:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos[2\pi(f_0 + a_i \Delta f)t + \varphi] \cos[2\pi(f_0 + a_j \Delta f)t + \varphi] dt = \\
 \text{(II.3.20)} \quad &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos[2\pi \Delta f (a_i - a_j)t] + \cos[2\pi(2f_0 + \Delta f(a_i + a_j)t + 2\varphi)] dt = \\
 &= \frac{\sin[2\pi \Delta f (a_i - a_j)T]}{2\pi \Delta f (a_i - a_j)T} + \frac{\sin[2\pi(2f_0 + \Delta f(a_i + a_j)T + 2\varphi)] - \sin[2\varphi]}{2\pi(2f_0 + \Delta f(a_i + a_j)T)}
 \end{aligned}$$

che, tenendo presente la condizione  $f_0 T \gg 1$ , si riduce alla:

$$\text{(II.3.21)} \quad (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \frac{\sin[2\pi \Delta f (a_i - a_j)T]}{2\pi \Delta f (a_i - a_j)T}$$

od anche, ricordando la (II.3.18):

$$\text{(II.3.22)} \quad (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \frac{\sin[4\pi \Delta f (i - j)T]}{4\pi \Delta f (i - j)T}$$

Dalla (II.3.22) è evidente che le funzioni  $u_m(t)$  non costituiscono, in generale, un insieme di funzioni ortonormali; tuttavia se  $\Delta f$  si sceglie in modo tale che risulti:

$$\text{(II.3.23)} \quad \Delta f = \frac{k}{T}$$

si ha:

$$\text{(II.3.24)} \quad (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \delta_{i-j}$$

La rappresentazione vettoriale delle segnalazioni  $\{s_m(t)\}_{m=0}^{M-1}$  allora diventa:

$$\text{(II.3.25)} \quad s_m = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \mathbf{u}_m \quad (m = 0, 1, \dots, M-1)$$

L'insieme delle forme di segnalazioni in tal caso appartengono ad un sottospazio a  $M$  dimensioni.

Dalla (II.3.25) si deduce che l'energia associata a  $s_m(t)$  vale:

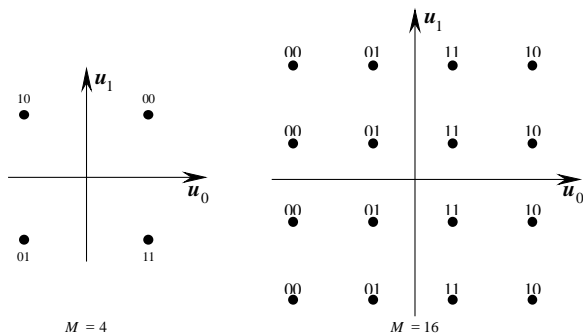
$$\text{(II.3.26)} \quad E_m = \frac{V_0^2 T}{2}$$

che, come nel caso PSK  $M$ -ario, è indipendente dal simbolo trasmesso.

### III.4.4 - Sistemi di modulazione QAM.

Una generalizzazione dei sistemi ASK  $M$ -ari si ottiene quando la costellazione dei segnali

è composta da un insieme di punti disposti lungo un graticcio quadrato come è mostrato in Fig.III.9.



**Fig. II.5** - Rappresentazione vettoriale delle forme di segnalazione per modulazioni QAM ( $M = 4$  e  $M = 16$ ).

Un sistema di modulazione di questo tipo prende il nome di modulazione **QAM** (**Q**uadrature **A**mplitude **M**odulation).

Le forme di segnalazione appartengono ad un sottospazio a due dimensioni; esse, se si denotano con:

$$\begin{aligned}
 \text{(II.3.27)} \quad u_0(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \\
 u_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \sin(2\pi f_0 t + \varphi)
 \end{aligned}$$

le funzioni di base, sono individuate dalla coppia ordinata di valori  $(V_0\sqrt{\frac{T}{2}}a_n, V_0\sqrt{\frac{T}{2}}b_m)$  essendo  $a_n$  e  $b_m$  due simboli  $M$ -ari del tipo:

$$(II.3.28) \quad \begin{aligned} a_n &= 2n - (M - 1) & (n = 0, 1, \dots, M - 1) \\ b_m &= 2m - (M - 1) & (m = 0, 1, \dots, M - 1) \end{aligned}$$

Naturalmente il numero dei punti della costellazione è  $M^2$ .

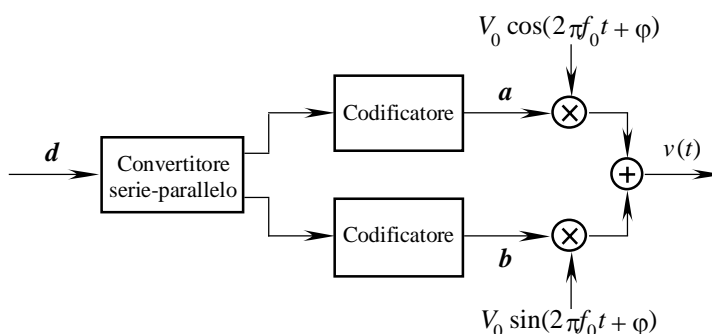
Detta  $s_{mn}(t)$  la generica forma di segnalazione risulta:

$$(II.3.29) \quad s_{mn}(t) = V_0 \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) [a_n \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + b_m \sin(2\pi f_0 t + \varphi)] \quad \begin{matrix} (n=0,1,\dots,M-1) \\ (m=0,1,\dots,M-1) \end{matrix}$$

e la sua rappresentazione vettoriale è data dalla:

$$(II.3.30) \quad s_{mn} = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} [a_n \mathbf{u}_1 + b_m \mathbf{u}_2] \quad \begin{matrix} (n=0,1,\dots,M-1) \\ (m=0,1,\dots,M-1) \end{matrix}$$

La modulazione QAM si può intendere come la sovrapposizione di due modulazioni ASK  $M$ -arie indipendenti. Essa può essere realizzata secondo lo schema riportato in Fig. II.6. I simboli  $M$ -ari  $D$  che costituiscono la sequenza d'ingresso subiscono una codifica  $M$ -aria a  $M$  livelli e i simboli così ottenuti sono distribuiti alternativamente sui due canali in uscita dal convertitore serie-parallelo.



**Fig. II.6** – Modulatore QAM.