

# Capitolo III

## LA RIVELAZIONE IN PRESENZA DI RUMORE

### Parte I - La rivelazione coerente

---

---

#### III.1 - Generalità.

Il segnale che si presenta all'ingresso del ricevitore è costituito da una replica del segnale inviato dal trasmettitore eventualmente distorta per effetto del canale di trasmissione e corrotta da disturbi ed interferenze. Nei sistemi di modulazione  $M$ -ari, com'è noto, l'informazione trasmessa è associata ad un insieme di  $M$  simboli  $\{a_m\}_{m=0}^{M-1}$ . Nelle modulazioni prive di memoria, cui si fa riferimento, il segnale trasmesso, nel generico intervallo di simbolo di durata  $T$ , dipende dal corrispondente simbolo  $a_m$ ; esso è pertanto costituito da una forma di segnalazione  $s_m(t)$ , appartenente ad un insieme composto da  $M$  elementi, scelta in corrispondenza uno ad uno con il simbolo da trasmettere. Inoltre, supponendo di poter trascurare ogni influenza fra i simboli trasmessi, la rivelazione può essere effettuata **simbolo per simbolo**. Il segnale ricevuto, nel generico intervallo di simbolo  $[kT, (k+1)T]$  può essere posto nella forma:

$$(III.1.1) \quad r(t) = \alpha s_m(t - t_d) + n(t) \quad t \in [kT, (k+1)T]$$

ammesso che il trasmettitore abbia inviato la segnalazione  $s_m(t)$ . Nella (III.1.1) si è supposto che il segnale in arrivo sia attenuato (si suppone  $\alpha < 1$ ), ritardato di una quantità  $t_d$  e corrotto da un rumore additivo  $n(t)$  che, in quel che segue, si suppone gaussiano, a media nulla e stazionario (in senso lato almeno fino al secondo ordine).

Perché il segnale possa essere correttamente rivelato occorre conoscere e il ritardo  $t_d$  e la fase  $\varphi$  della portante associata alla segnalazione  $s_m(t)$ . In quel che segue si suppone che il ricevitore sia sincronizzato al trasmettitore per cui il ritardo  $t_d$  si suppone noto. Tuttavia lo stesso non può dirsi per quanto concerne la fase anche perché la fase  $\varphi$  può variare per effetto di un'instabilità dell'oscillatore usato in trasmissione. Per questi motivi non è sempre possibile ritenere noto il valore di  $\varphi$ . Quando ciò accade, si parla di **rivelazione non coerente**; in contrasto con la **rivelazione coerente** che si verifica quando tali parametri sono

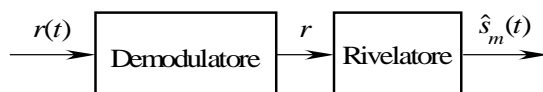


Fig. III.1 - Schema di principio di un ricevitore.

esattamente noti al ricevitore.

Da un punto di vista concettuale è utile considerare il ricevitore come composto da

due elementi in cascata (v. Fig. III.1):

il **demodulatore** che fornisce in uscita una variabile aleatoria  $r$  a partire dalla conoscenza del segnale  $r(t)$  con  $t \in [kT, (k+1)T]$ ;

il **rivelatore** che fornisce una stima del dato trasmesso sulla base della osservazione  $r$ .

In quel che segue sono presi in esame gli schemi rivelazione coerente con particolare riferimento alle loro prestazioni espresse in termini di probabilità di errore.

Per semplificare le notazioni il ritardo di trasmissione si suppone nullo ( $t_d = 0$ ) l'attenuazione unitaria ( $\alpha = 1$ ).

## III.2 - Sistemi di modulazione binari.

### III.2.1 - Modulazioni ASK (o PSK) e OOK.

Nel caso di modulazione ASK (o PSK) e OOK il segnale ricevuto, nel generico intervallo di simbolo  $[kT, (k+1)T)$ , vale:

$$(III.2.1) \quad r(t) = V_0 a_k \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + n(t) \quad t \in [kT, (k+1)T]$$

dove è  $a_k \in \{-1, 1\}$  per segnalazione ASK e  $a_k \in \{0, 1\}$  per segnalazione OOK.

Per determinare la struttura ottima del ricevitore basta far riferimento alla costellazione dei segnali discussa nel Cap. II. Nel caso di modulazione binaria ASK e OOK il sottospazio  $S_1$  che contiene le forme di segnalazione è monodimensionale. Il valore della proiezione ortogonale di  $r(t)$  su  $S_1$  vale:

$$(III.2.2) \quad \begin{aligned} \rho &= \int_{kT}^{(k+1)T} r(t) \left[ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \right] dt = \\ &= V_0 a_k \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) dt + \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} n(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \\ &= a_k V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} + \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} n(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt \end{aligned}$$

che ponendo:

$$(III.2.3) \quad v = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} n(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt$$

si scrive:

$$(III.2.4) \quad \rho = V_0 a_k \sqrt{\frac{T}{2}} + v$$

Dalla (III.2.4) si deduce che il problema della rivelazione è analogo a quello che si riscontra nella trasmissione numerica in banda base dove (cfr. Cap. I) in ricezione si confronta il valore del segnale ricevuto  $\rho$  con una soglia che, denotando con  $a_0$  e  $a_1$  i valori dei simboli  $a_k$  in corrispondenza dei dati  $d=0$  e  $d=1$ , vale:

$$(III.2.5) \quad \lambda_o = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \frac{a_0 + a_1}{2}$$

$\lambda_o$  corrisponde al valore medio aritmetico dei segnali  $V_0 a_k \sqrt{\frac{T}{2}}$  presenti in assenza di rumore.

La regola di decisione è espressa nella forma:

$$(III.2.6) \quad \begin{aligned} \rho > \lambda_o &\Rightarrow \hat{d}_k = 1 \\ \rho < \lambda_o &\Rightarrow \hat{d}_k = 0 \end{aligned}$$

che equivale a dire che tutte le volte che la variabile di decisione  $\rho$  appartiene alla regione  $[\lambda_o, +\infty)$  il ricevitore decide a favore del simbolo  $\hat{d} = 1$ , mentre quando  $\rho \in (-\infty, \lambda_o]$  il ricevitore prende la decisione a favore del simbolo  $\hat{d} = 0$ .

Le condizioni (III.2.6) danno luogo allo schema riportato in Fig. III.2.

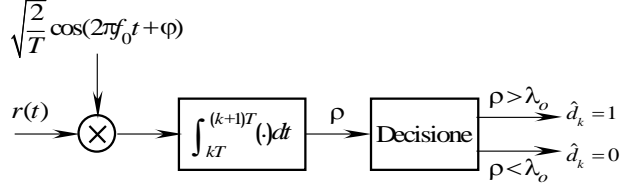
La probabilità di errore, supponendo i dati  $d_k = 0$  e  $d_k = 1$  equiprobabili, è espressa dalla:

$$(III.2.7) \quad P_e = \frac{1}{2} \Pr\{\rho > \lambda_o | d_k = 0\} + \frac{1}{2} \Pr\{\rho < \lambda_o | d_k = 1\}$$

È:

$$(III.2.8) \quad \begin{aligned} \{\rho > \lambda_o | d_k = 0\} &\Rightarrow v > \frac{V_0 T}{2} \frac{a_1 - a_0}{2} \\ \{\rho < \lambda_o | d_k = 1\} &\Rightarrow r_1 = v < -\frac{V_0 T}{2} \frac{a_1 - a_0}{2} \end{aligned}$$

Come si evince dalla posizione (III.2.3), la variabile  $v$  è ottenuta da  $n(t)$  con operazioni lineari e poiché il rumore  $n(t)$  è un segnale gaussiano anch'essa è una variabile aleatoria gaussiana. Essa è quindi caratterizzata completamente se si conoscono il suo valor medio e la sua varianza. Ricordando che  $n(t)$  è



**Fig. III.2** - Struttura del ricevitore per segnalazioni ASK o PSK binarie.

caratterizzato da un valor medio nullo e dalla funzione di autocorrelazione pari a  $\frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ , si ha:

$$(III.2.9) \quad \begin{aligned} m_v &\equiv E\{v\} = E\left\{\sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} n(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt\right\} = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} E\{n(t)\} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt = 0 \\ \sigma_v^2 &\equiv E\{(v - m_v)^2\} = E\{v^2\} = \frac{2}{T} \int_{kT}^{(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} E\{n(t_1)n(t_2)\} \cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi) \cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi) dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{N_0}{2} \frac{2}{T} \int_{kT}^{(k+1)T} \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

Si ottiene allora:

$$(III.2.10) \quad p_v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_v^2}\right)$$

Si ha:

$$(III.2.11) \quad \begin{aligned} \Pr\{\rho > \lambda_o | d_k = 0\} &= \int_{V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \frac{a_1 - a_0}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_v^2}} dx \\ \Pr\{\rho < \lambda_o | d_k = 1\} &= \int_{-\infty}^{-V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \frac{a_1 - a_0}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_v^2}} dx = \int_{V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \frac{a_1 - a_0}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_v^2}} dx \end{aligned}$$

Per segnalazioni ASK ( $a_m \in \{-1, 1\}$ ) risulta:

$$(III.2.12) \quad \Pr\{\rho > \lambda_o | d = 0\} = \Pr\{\rho < \lambda_o | d = 1\} = \int_{V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_v^2}} dx$$

Introducendo la funzione  $Q(x)$  e tenendo conto dell'espressione della varianza  $\sigma_v^2$  data dalla seconda delle (III.2.9), la  $P_e$  diventa:

$$(III.2.13) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}}\right) \text{ ASK}$$

Per segnalazioni OOK ( $a_m \in \{0, 1\}$ ) è:

$$(III.2.14) \quad \Pr\{\rho > \lambda_o | d_k = 0\} = \Pr\{\rho < \lambda_o | d_k = 1\} = \int_{V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_v^2}} dx$$

e quindi la probabilità di errore vale:

$$(III.2.15) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{V_0^2 T}{4N_0}}\right) \text{ OOK}$$

Introducendo l'energia media delle forme di segnalazione data:

$$(III.2.16) \quad E = E\left\{\int_0^T s_k^2(t)dt\right\} = V_0^2 E\{a_k^2\} \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi)dt = \frac{V_0^2 T}{2} E\{a_k^2\}$$

che, nel caso di modulazione ASK, essendo  $E\{a_k^2\} = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(-1)^2 = 1$  è:

$$(III.2.17) \quad E = \frac{V_0^2 T}{2}$$

mentre nel caso di modulazione OOK, essendo  $E\{a_k^2\} = \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{2}(0)^2 = \frac{1}{2}$  è:

$$(III.2.18) \quad E = \frac{V_0^2 T}{4}$$

la probabilità di errore diventa:

$$(III.2.19) \quad P_e = \begin{cases} Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right) & \text{ASK} \\ Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) & \text{OOK} \end{cases}$$

### III.2.2 - Modulazione FSK.

Nel caso di modulazione FSK il segnale ricevuto, nel generico intervallo di simbolo  $[kT, (k+1)T]$ , vale:

$$(III.2.20) \quad r(t) = V_0 \cos[2\pi(f_0 + a_k \Delta f)t + \varphi] + n(t) \quad t \in [kT, (k+1)T]$$

dove è  $a_k \in \{-1, 1\}$ .

Il sottospazio  $S_2$  che contiene le forme di segnalazione è bidimensionale per cui il vettore  $r_2$ , proiezione ortogonale di  $r(t)$  su  $S_2$ , è caratterizzato dalle componenti:

$$(III.2.21) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} r(t) \cos[2\pi(f_0 - \Delta f)t + \varphi]dt \\ \rho_1 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} r(t) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi]dt \end{aligned}$$

che ponendo:

$$(III.2.22) \quad \begin{aligned} v_0 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} n(t) \cos[2\pi(f_0 - \Delta f)t + \varphi]dt \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} n(t) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi]dt \end{aligned}$$

assumono la forma:

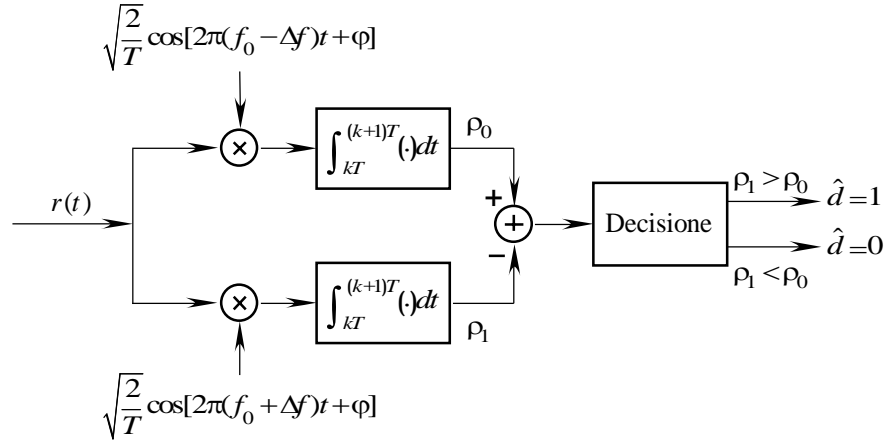
$$(III.2.23) \quad d_k = 1 \Rightarrow \begin{cases} \rho_0 = v_0 \\ \rho_1 = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} + v_1 \end{cases} \quad d_k = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho_0 = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} + v_0 \\ \rho_1 = v_1 \end{cases}$$

dove si è tenuto conto della condizione  $T\Delta f = \text{int}$ .

Nella modulazione FSK binaria, come si può dedurre dalle (III.2.23), la regola di decisione è espressa dalla:

$$(III.2.24) \quad \begin{aligned} \rho_1 > \rho_0 &\Rightarrow \hat{d}_k = 1 \\ \rho_1 < \rho_0 &\Rightarrow \hat{d}_k = 0 \end{aligned}$$

Le condizioni (III.2.24) danno luogo allo schema riportato in Fig. III.3.


**Fig. III.3** – Struttura del ricevitore per segnalazioni FSK binarie.

Se i dati sono equiprobabili, la probabilità di errore è espressa dalla:

$$(III.2.25) \quad P_e = \frac{1}{2} \Pr\{\rho_1 > \rho_0 | d_k = 0\} + \frac{1}{2} \Pr\{\rho_1 < \rho_0 | d_k = 1\}$$

Tenendo conto delle (III.2.23) gli eventi condizionati diventano:

$$(III.2.26) \quad \begin{aligned} \{\rho_1 > \rho_0 | d_k = 0\} &\Rightarrow \left\{ v_1 - v_0 > V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \right\} \\ \{\rho_1 < \rho_0 | d_k = 1\} &\Rightarrow \left\{ v_1 - v_0 < -V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \right\} \end{aligned}$$

La variabile aleatoria  $v_1 - v_0$  che compare nelle (III.2.26) è costituita dalla differenza di due variabili aleatorie gaussiane che, come è facile verificare, sono caratterizzate da un valore medio nullo e da eguali varianze ( $\sigma_v^2 = \frac{N_0}{2}$ ). Inoltre le quantità  $v_0$  e  $v_1$  sono statisticamente indipendenti essendo:

$$(III.2.27) \quad \begin{aligned} E\{v_1 v_0\} &= E\left\{ \frac{2}{T} \int_{kT}^{(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} n(t_1) n(t_2) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t_1 + \phi] \cos[2\pi(f_0 - \Delta f)t_2 + \phi] dt_1 dt_2 \right\} = \\ &= \frac{2}{T} \int_{kT}^{(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} E\{n(t_1) n(t_2)\} \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t_1 + \phi] \cos[2\pi(f_0 - \Delta f)t_2 + \phi] dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{N_0}{T} \int_{kT}^{(k+1)T} \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + \phi] \cos[2\pi(f_0 - \Delta f)t + \phi] dt = \\ &= \frac{N_0}{2T} \int_{kT}^{(k+1)T} [\cos(4\pi t \Delta f) + \cos(4\pi f_0 t + 2\phi)] dt = \frac{N_0}{2} \text{sinc}(4T \Delta f) = 0 \end{aligned}$$

La grandezza  $v_1 - v_0$  è allora una variabile aleatoria gaussiana caratterizzata da un valore medio nullo e da una varianza data da:

$$(III.2.28) \quad \sigma_{v_1 - v_0}^2 = E\{(v_1 - v_0)^2\} = E\{v_1^2 - 2v_1 v_0 + v_0^2\} = N_0$$

Si ottiene allora:

$$(III.2.29) \quad p_{v_1 - v_0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{v_1 - v_0}^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{v_1 - v_0}^2}\right)$$

Tenendo conto della (III.2.26) la probabilità di errore allora diventa:

$$(III.2.30) \quad P_e = \frac{1}{2} \int_{V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{v_1 - v_0}^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{v_1 - v_0}^2}} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{v_1 - v_0}^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{v_1 - v_0}^2}} dx = \int_{V_0 \sqrt{\frac{T}{2}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{v_1 - v_0}^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_{v_1 - v_0}^2}} dx$$

Introducendo anche qui la funzione  $Q(x)$  la  $P_e$  diventa:

$$(III.2.31) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{V_0^2 T}{2N_0}}\right)$$

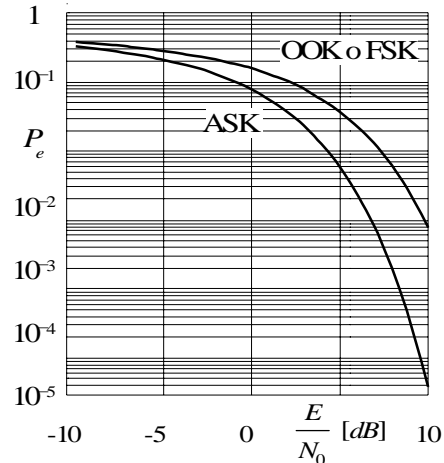
Introducendo l'energia media per simbolo:

$$(III.2.32) \quad E = \frac{V_0^2 T}{2}$$

la probabilità di errore diventa:

$$(III.2.33) \quad P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

In Fig. III.4 sono riportati gli andamenti della probabilità di errore in funzione del rapporto segnale rumore  $E/N_0$  per i sistemi di modulazione binari fin qui analizzati.



**Fig. III.4** - Probabilità di errore per i sistemi di modulazione binari in funzione del rapporto segnale rumore  $E_m / N_0$

### III.3 - Sistemi di modulazione M-ari.

#### III.3.1 - Sistemi di modulazione ASK M-ari.

Nella modulazione ASK M-aria il segnale ricevuto nel  $k$ -esimo intervallo di simbolo, vale:

$$(III.3.1) \quad v(t) = V_0 a_k \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + n(t) \quad t \in [kT, (k+1)T]$$

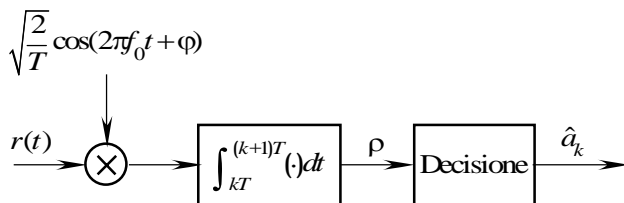
dove  $a_m = 2m - (M - 1)$  con  $(m = 0, 1, \dots, M - 1)$ .

Nel caso di modulazione binaria ASK M-aria il sottospazio  $S_1$  che contiene le forme di segnalazione è monodimensionale. La proiezione ortogonale di  $r(t)$  su  $S_1$  vale quindi:

$$(III.3.2) \quad \begin{aligned} \rho &= \int_{kT}^{(k+1)T} r(t) \left[ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \right] dt = \\ &= V_0 a_k \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) dt + \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} n(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt = \\ &= V_0 a_k \sqrt{\frac{T}{2}} + v \end{aligned}$$

dove, anche qui, si è posto:

$$(III.3.3) \quad v = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_{kT}^{(k+1)T} n(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt$$

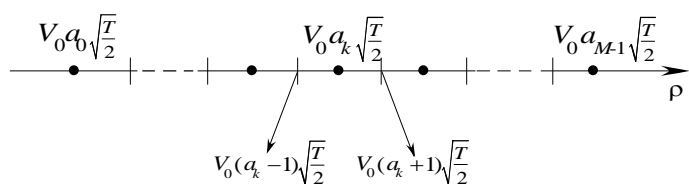


**Fig. III.5** - Struttura del ricevitore per segnalazione ASK M-aria.

La struttura del ricevitore per la segnalazione ASK M-aria è riportata in Fig. III.5.

Seguendo lo stesso criterio di decisione adottato per il caso binario, il ricevitore decide sul simbolo  $a_k$  tra-

smesso secondo il valore assunto da  $\rho$ . Se i livelli trasmessi sono equiprobabili, la decisione su  $a_k$  è presa se  $\rho$  appartiene all'intervallo  $\left[ V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} (a_k - 1), V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} (a_k + 1) \right]$  per i livelli intermedi;

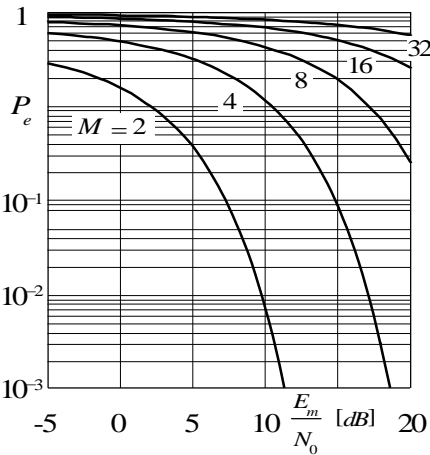


**Fig. III.6** - Decisione nel caso di modulazione ASK M-aria.

per i livelli terminali, si decide a favore del livello  $a_0$  se  $\rho$  è cade in

$(-\infty, V_0\sqrt{\frac{T}{2}}(a_0 + 1)]$  e del livello  $a_{M-1}$  se  $\rho$  è contenuto in  $[V_0\sqrt{\frac{T}{2}}(a_{M-1} - 1), +\infty)$ . (v. Fig. III.6).

Seguendo la stessa procedura sviluppata al Cap. I a proposito della codifica multilivello (par I.5.2), la probabilità di errore vale:



**Fig. III.7** - Probabilità di errore per simbolo per segnalazioni ASK  $M$ -arie in funzione del rapporto segnale rumore  $E_m / N_0$ .

$$(III.3.4) \quad P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q \left\{ \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right\}$$

L'energia media associata alle forme di segnalazione è:

$$(III.3.5) \quad E = \frac{V_0^2 T}{2} E\{a_k^2\} = \frac{V_0^2 T}{2} \frac{M^2 - 1}{3}$$

per cui la (III.3.4), scritta in funzione dell'energie media  $E_m$ , diviene:

$$(III.3.6) \quad P_e = 2 \frac{M-1}{M} Q \left\{ \sqrt{\frac{6}{(M^2 - 1)} \frac{E}{N_0}} \right\}$$

In Fig. III.7 sono rappresentati gli andamenti del rapporto segnale rumore  $E/N_0$  per diversi valori del parametro  $M$ .

### III.5.2 - Sistemi di modulazione PSK $M$ -ari.

Negli schemi di modulazione PSK  $M$ -ari, il segnale ricevuto nel generico intervallo di simbolo vale:

$$(III.3.7) \quad r(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t + \vartheta_k + \varphi) + n(t) \quad t \in [kT, (k+1)T]$$

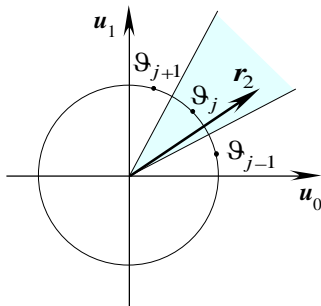
dove la fase  $\vartheta_k$  assume valori contenuti nell'insieme  $\left\{ 2\pi \frac{m}{M} \right\}_{m=0}^{M-1}$ .

Nel caso di modulazione binaria PSK  $M$ -aria il sottospazio  $S_2$  che contiene le forme di segnalazione è bidimensionale. Nel sottospazio  $S_2$  le forme di segnalazione

$$(III.3.8) \quad s_m(t) = V_0 \cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi \frac{m}{M} + \varphi\right) \text{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) \quad (m = 0, 1, \dots, M-1)$$

sono rappresentate nel sottospazio bidimensionale individuato dalle funzioni di base:

$$(III.3.9) \quad \begin{aligned} u_0(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \\ u_1(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right) \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \end{aligned}$$



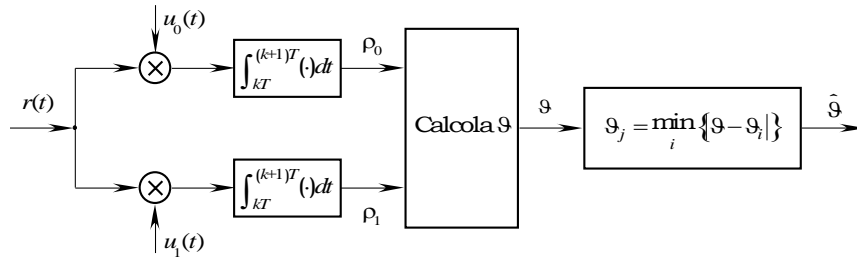
**Fig. III.8** - Regioni di decisione per modulazioni PSK  $M$ -arie.

Con riferimento alla Fig. III.8 è evidente che sotto l'ipotesi che i simboli siano emessi con eguale probabilità, il ricevitore decide a favore di quel simbolo  $a_j$  cui corrisponde la fase  $\vartheta_j = \frac{2\pi j}{M}$  che è la più vicina all'angolo formato dal vettore ricevuto  $r_2$  con il versore  $u_0$ . Detti pertanto  $\rho_0$  e  $\rho_1$  le componenti del vettore  $r_2$  lungo i versori  $u_0$  e  $u_1$  rispettivamente, la stima  $\hat{\vartheta}_j$  della fase  $\vartheta_j$  può essere effettuata valutando la quantità:

$$(III.3.10) \quad \vartheta = \arg(r_2)$$

e attribuendo a  $\hat{\vartheta}_j$  quel valore, fra le fasi possibili, che si trova più vicino a  $\vartheta$ .

Ciò dà luogo allo schema del ricevitore mostrato in Fig. III.9).



**Fig. III.9** - Ricevitore ottimo per modulazioni PSK  $M$ -arie.

**III.6.3 - Sistemi di modulazione FSK  $M$ -ari.**

Nel caso di modulazione FSK  $M$ -aria le forme di segnalazione sono:

$$(III.3.11) \quad s_m(t) = V_0 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f_m)t + \varphi] \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \quad (m = 0, 1, \dots, M - 1)$$

in cui le quantità:

$$(III.3.12) \quad \Delta f_m = [2m - (M - 1)]\Delta f \quad (m = 0, 1, \dots, M - 1)$$

rappresentano i valori della deviazione di frequenza associati ai segnali  $s_m(t)$ . Se si riferiscono le forme di segnalazione, definite dalle (III.3.11), al sistema di funzioni ortonormali (se è  $T\Delta f = k$ )

$$(III.3.13) \quad u_m(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f_m)t + \varphi] \quad (m = 0, 1, \dots, M - 1)$$

risulta:

$$(III.3.14) \quad s_m = V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} u_m$$

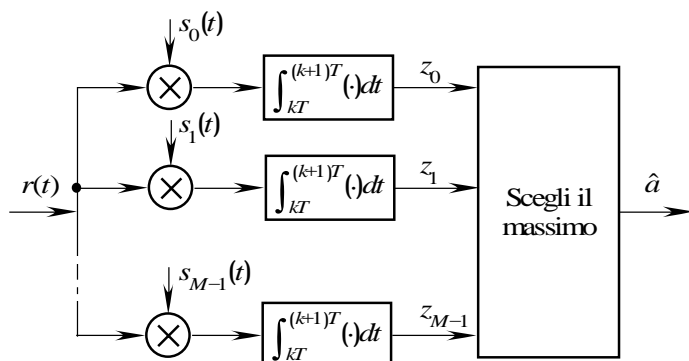
Se i simboli sono equiprobabili, è presa una decisione a favore della segnalazione  $s_j$  se,

detto  $r_N$  il vettore ricevuto, risulta:

$$(III.3.15) \quad d(r_N, s_j) = \min_i \{d(r_N, s_i)\}$$

Poiché è:

$$(III.3.16) \quad d^2(r_N, s_j) = \|r_N\|^2 - 2(r_N, s_j) + \|s_j\|^2$$



**Fig. III.10** - Schema del ricevitore ottimo per segnalazioni  $M$ -FSK.

con

$$(III.3.17) \quad \|s_i\|^2 = V_0^2 \frac{T}{2}$$

indipendente da  $i$ , la condizione

(III.3.15) si traduce nella:

$$(III.3.18) \quad (r_N, s_j) = \max_i \{(r_N, s_i)\}$$

la quale, ricordando che è:

$$(III.3.19) \quad z_i \equiv (r_N, s_i) = \int_0^T r(t)s_i(t)dt$$

conduce allo schema del rivelatore riportato in Fig. III.10.

**III.4 - Sistemi di modulazione QAM.**

La struttura del ricevitore si presenta come è mostrato in Fig. III.11. All'uscita degli integratori si ottengono le componenti  $\rho_0$  e  $\rho_1$  secondo le direzioni individuate dai vettori  $u_1$  e  $u_2$  rispettivamente e, se i simboli sono equiprobabili, è presa una decisione sul simbolo trasmesso secondo la regola:



$$(III.4.1) \quad d(r_2, s_j) = \min_i \{d(r_2, s_i)\}_{(i \neq j)}$$

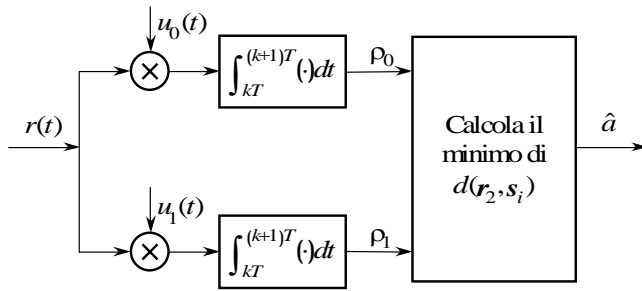


Fig. III.11 - Struttura del ricevitore QAM

Poiché le componenti in fase e in quadratura del segnale QAM ricevuto sono indipendenti, è immediato rendersi conto che la probabilità di corretta decisione per simbolo può essere espressa dalla:

$$(III.4.2) \quad P_c = (1 - p_f)(1 - p_q)$$

in cui  $p_f$  e  $p_q$  denotano le

probabilità di errore dei segnali che costituiscono le componenti in fase e in quadratura.

Limitandoci a considerare solo segnalazioni QAM la cui costellazione è costituita da un graticcio quadrato, si ha, tenendo conto della (III.3.4):

$$(III.4.3) \quad p_f = 2 \frac{M-1}{M} Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right) \quad p_q = 2 \frac{M-1}{M} Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right)$$

per cui la probabilità di errore è:

$$(III.4.4) \quad P_e = 1 - P_c = p_f + p_q - p_f p_q = 4 \frac{M-1}{M} Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right) - 4 \left( \frac{M-1}{M} \right)^2 Q^2 \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right)$$

che per elevati valori del rapporto  $\frac{V_0^2 T}{N_0}$  può

essere approssimata dalla:

$$(III.4.5) \quad P_e = 4 \frac{M-1}{M} Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0}} \right)$$

Se i simboli sono equiprobabili, l'energia media associata alle forme di segnalazione è:

$$(III.4.6) \quad E = \frac{V_0^2 T}{2} \left[ \sum_{n=1}^M a_n^2 + \sum_{m=1}^M b_m^2 \right] = V_0^2 T \frac{M^2 - 1}{3}$$

che sostituita nella (III.4.5) fornisce:

$$(III.4.7) \quad P_e = 4 \frac{M-1}{M} Q \left( \sqrt{\frac{3 E}{M^2 - 1 N_0}} \right)$$

per cui la probabilità di errore in funzione dell'energia media per simbolo (v. Fig. III.12).

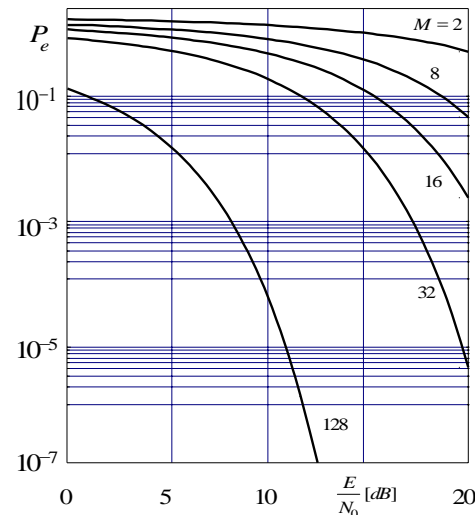


Fig. III.12 - Probabilità di errore per simbolo in funzione di  $E/N_0$  per modulazione QAM.

### III.5 - Limiti della probabilità di errore per simbolo.

Non sempre è possibile ottenere espressioni in forma chiusa della probabilità di errore per simbolo  $P_e$ ; in questi casi può essere molto utile dedurre dei limiti superiore ed inferiore entro i quali è contenuta la  $P_e$ . La determinazione di tali limiti è fondata sul fatto che la stima del segnale trasmesso è effettuata con il metodo della minima distanza euclidea; in altri termini il ricevitore decide a favore di quel simbolo che si trova alla distanza minima dal segnale ricevuto.

### III.5.1 – Limite superiore.

Un limite superiore può essere dedotto osservando che se si trasmette il segnale  $s_j$  si verifica un errore tutte le volte che esiste una segnalazione  $s_i$  con  $i \neq j$  tale che il segnale ricevuto  $r_N$  dista da  $s_i$  meno di quanto esso dista da  $s_j$ . Se pertanto  $E_{ij}$  denota l'evento:

$$(III.5.1) \quad E_{ij} = \{r_N : d(r_N, s_i) < d(r_N, s_j) \mid s_j\}$$

la probabilità di errore è espressa dalla:

$$(III.5.2) \quad P(e \mid s_j) = \Pr \left\{ \bigcup_{\substack{i=0 \\ (i \neq j)}}^{M-1} E_{ij} \right\}$$

Osservando che la probabilità dell'unione di  $M-1$  eventi è superiormente limitata dalla somma delle probabilità associate ai singoli eventi, dalla (III.5.2) si deduce:

$$(III.5.3) \quad P(e \mid s_j) \leq \sum_{\substack{i=0 \\ (i \neq j)}}^{M-1} \Pr \{E_{ij}\}$$

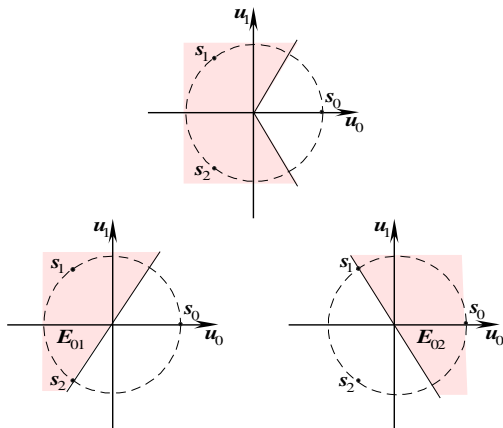
La probabilità di errore incondizionata è allora data dalla:

$$(III.5.4) \quad P_e \leq \sum_{j=0}^{M-1} P_j \sum_{\substack{i=0 \\ (i \neq j)}}^{M-1} \Pr \{E_{ij}\}$$

essendo  $P_j$  la probabilità associata alla segnalazione  $s_j$ .

Se i simboli sono equiprobabili la precedente si riduce alla:

$$(III.5.5) \quad P_e \leq \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{\substack{i=0 \\ (i \neq j)}}^{M-1} \Pr \{E_{ij}\}$$



**Fig. III.13-** Limite superiore per la probabilità di errore per simbolo.

La (III.5.3) è illustrata in Fig. IV.21 nel caso di segnalazione ternaria. Supponendo di inviare la segnalazione  $s_0$  la probabilità di errore  $P(e \mid s_0)$  è uguale alla probabilità che il vettore ricevuto  $r_2$  appartenga alla regione ombreggiata di Fig. IV.20 a), mentre le probabilità associate agli eventi  $E_1$  e  $E_2$  sono date dalle probabilità che  $r_2$  sia contenuto nelle regioni ombreggiate di Fig. IV.21 b) e c) rispettivamente.

D'altra parte è facile rendersi conto che la probabilità  $\Pr \{E_{ij}\}$  che compare nella (III.5.5)

vale (v. Appendice):

$$(III.5.6) \quad \Pr \{E_{ij}\} = Q \left( \sqrt{\frac{D_{ij}^2}{2N_0}} \right)$$

essendo  $D_{ij}$  la distanza euclidea fra  $s_i$  e  $s_j$ .

Sostituendo tale espressione nella (III.5.5) si ha:

$$(III.5.7) \quad P_e \leq \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{\substack{i=0 \\ (i \neq j)}}^{M-1} Q \left( \sqrt{\frac{D_{ij}^2}{2N_0}} \right)$$

Un'ulteriore semplificazione della (III.5.7) può essere ottenuta se si considera che la funzione complementare di errore diminuisce al crescere del suo argomento. Questo comporta che, se si denota con  $D_j$  il minimo fra le  $D_{ij}$ :

$$(III.5.8) \quad D_j = \min_{\substack{i \\ (i \neq j)}} D_{ij}$$

la quantità  $Q\left(\sqrt{\frac{D_j^2}{2N_0}}\right)$  può ritenersi trascurabile rispetto a  $Q\left(\sqrt{\frac{D_j^2}{2N_0}}\right)$  per cui si ottiene facilmente:

$$(III.5.9) \quad P_e \leq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M N_j Q\left(\sqrt{\frac{D_j^2}{2N_0}}\right)$$

dove con  $N_j$  si è denotato il numero di segnalazioni che distano  $D_j$  da  $s_j$ .

#### IV.7.2 - Limite inferiore.

Per dedurre un limite inferiore alla probabilità di errore per simbolo basta osservare che se si trasmette il simbolo  $s_j$  si commette errore quando il segnale ricevuto  $r_N$  è più vicino a  $s_i$  (con  $i \neq j$ ) che da  $s_j$ . Pertanto se si denota con  $\bar{E}_j$  quello fra gli eventi  $E_{ij}$  che corrisponde a uno dei punti della costellazione più vicini a  $s_j$ , discende:

$$(III.5.10) \quad \bar{E}_j \subset \bigcup_{\substack{i=0 \\ (i \neq j)}}^{M-1} E_{ij}$$

Ne consegue:

$$(III.5.11) \quad P(e | s_j) \geq \Pr\{\bar{E}_j\}$$

e quindi la probabilità incondizionata diventa:

$$(III.5.12) \quad P_e \geq \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \Pr\{\bar{E}_j\}$$

Anche in questo caso è facile rendersi conto che la probabilità  $\Pr\{E_j\}$  che compare nella (III.5.12) rappresenta la probabilità che il segnale ricevuto quando è trasmesso il simbolo  $s_j$  si trova più vicino a quel simbolo che presenta da  $s_j$  la minima distanza. Essa, ricordando la definizione (III.5.8) è data dalla:

$$(III.5.13) \quad \Pr\{\bar{E}_j\} = Q\left(\sqrt{\frac{D_j^2}{2N_0}}\right)$$

Si ha allora:

$$(III.5.14) \quad P_e \geq \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M Q\left(\sqrt{\frac{D_j^2}{2N_0}}\right)$$

#### III.5.3 - Modulazione PSK $M$ -aria.

Nel caso di modulazione PSK  $M$ -aria, dalla (III.5.9), tenendo presente che è (IV. Fig. IV.22)

$$(III.5.15) \quad D_j = 2V_0 \sqrt{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

e

$$(III.5.16) \quad N_j = 2$$

Risulta:

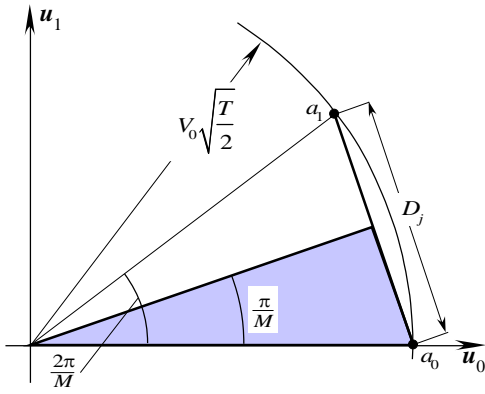


Fig. IV. 22- Modulazione PSK

$$(III.5.17) \quad P_e \leq 2Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0} \sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right)} \right)$$

D'altra parte per (III.5.14) si ha:

$$(III.5.18) \quad P_e \geq Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0} \sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right)} \right)$$

e di conseguenza:

$$(III.5.19) \quad \begin{aligned} Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0} \sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right)} \right) &\leq P_e \leq \\ &\leq 2Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{N_0} \sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right)} \right) \end{aligned}$$

Poiché  $E = \frac{V_0^2 T}{2}$  è l'energia media delle forme di segnalazione, la precedente diviene:

$$(III.5.20) \quad Q \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0} \sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right)} \right) \leq P_e \leq 2Q \left( \sqrt{\frac{2E}{N_0} \sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right)} \right)$$

### III.5.1 - Modulazione FSK M-aria.

Nel caso di modulazione FSK M-aria, con segnalazioni ortogonali le distanze  $D_j$  sono tutte eguali e pari a  $\sqrt{2}V_0\sqrt{\frac{T}{2}}$ . Inoltre è  $N_j = M - 1$  indipendente da  $j$ , per cui la (IV.8.9) diviene:

$$(III.5.21) \quad P_e \leq (M - 1) \cdot Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{2N_0}} \right)$$

D'altra parte dalla (III.5.14) discende:

$$(III.5.22) \quad P_e \geq Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{2N_0}} \right)$$

e quindi vale la seguente limitazione:

$$(III.5.23) \quad Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{2N_0}} \right) \leq P_e \leq (M - 1) \cdot Q \left( \sqrt{\frac{V_0^2 T}{2N_0}} \right)$$

Poiché  $E = \frac{V_0^2 T}{2}$  è l'energia media delle forme di segnalazione, la precedente diviene:

$$(III.5.24) \quad Q \left( \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \leq P_e \leq (M - 1) \cdot Q \left( \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right)$$

## Appendice

La probabilità associata all'evento  $\mathbf{E}_{ij} = \{\mathbf{r}_N : d(\mathbf{r}_N, \mathbf{s}_i) < d(\mathbf{r}_N, \mathbf{s}_j) \mid \mathbf{s}_j\}$  è data dalla:

$$(A.1) \quad \Pr\{\mathbf{E}_{ij}\} = \Pr\{d(\mathbf{r}_N, \mathbf{s}_i) < d(\mathbf{r}_N, \mathbf{s}_j) \mid \mathbf{s}_j\} = \Pr\{\|\mathbf{r}_N - \mathbf{s}_i\|^2 < \|\mathbf{r}_N - \mathbf{s}_j\|^2 \mid \mathbf{s}_j\}$$

che, essendo  $\mathbf{r}_N = \mathbf{s}_j + \mathbf{n}_N$ , diventa:

$$(A.2) \quad \Pr\{\mathbf{E}_{ij}\} = \Pr\{\|\mathbf{s}_j + \mathbf{n}_N - \mathbf{s}_i\|^2 < \|\mathbf{s}_j + \mathbf{n}_N - \mathbf{s}_j\|^2\} = \Pr\{\|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i + \mathbf{n}_N\|^2 < \|\mathbf{n}_N\|^2\}$$

Si ha:

$$(A.3) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i + \mathbf{n}_N\|^2 - \|\mathbf{n}_N\|^2 &= (\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i + \mathbf{n}_N, \mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i + \mathbf{n}_N) - \|\mathbf{n}_N\|^2 = \\ &= \|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i\|^2 + 2(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i, \mathbf{n}_N) + \|\mathbf{n}_N\|^2 - \|\mathbf{n}_N\|^2 = \|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i\|^2 + 2(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i, \mathbf{n}_N) \end{aligned}$$

per cui la (A.1) si può scrivere:

$$(A.4) \quad \Pr\{\mathbf{E}_{ij}\} = \Pr\{\|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i + \mathbf{n}_N\|^2 - \|\mathbf{n}_N\|^2 < 0\} = \Pr\{(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i, \mathbf{n}_N) < -\frac{1}{2}\|\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i\|^2\}$$

D'altra parte è facile riconoscere che la quantità  $x = (\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i, \mathbf{n}_N)$ , in quanto linearmente dipendente dalla variabile aleatoria gaussiana  $\mathbf{n}_N$ , è anch'essa una variabile aleatoria gaussiana di valore medio:

$$(A.5) \quad E\{x\} = \int_{(k-1)T}^{kT} [s_j(t) - s_i(t)] E\{n(t)\} dt = 0$$

e varianza:

$$(A.6) \quad \begin{aligned} E\{x^2\} &= E\left\{\int_{(k-1)T}^{kT} [s_j(t_1) - s_i(t_1)] [s_j(t_2) - s_i(t_2)] E\{n(t_1)n(t_2)\} dt_1 dt_2\right\} = \\ &= \frac{N_0}{2} \int_{(k-1)T}^{kT} [s_j(t) - s_i(t)]^2 dt = \frac{N_0}{2} D_{ij}^2 \end{aligned}$$

dove si è indicato con:

$$(A.7) \quad D_{ij} = \sqrt{\int_{(k-1)T}^{kT} [s_j(t) - s_i(t)]^2 dt}$$

la distanza euclidea fra le due segnalazioni  $s_i$  e  $s_j$ . Risulta allora:

$$(A.8) \quad \Pr\{\mathbf{E}_{ij}\} = \Pr\left\{x < -\frac{1}{2}D_{ij}^2\right\} = \Pr\left\{x > \frac{1}{2}D_{ij}^2\right\}$$

che, essendo:

$$(A.9) \quad p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 D_{ij}^2}} e^{-\frac{x^2}{N_0 D_{ij}^2}}$$

vale:

$$(I.1.10) \quad \Pr\{\mathbf{E}_{ij}\} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 D_{ij}^2}} \int_{\frac{1}{2}D_{ij}^2}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{N_0 D_{ij}^2}} dx$$

e cioè:

$$(I.1.11) \quad \Pr\{\mathbf{E}_{ij}\} = Q\left\{\sqrt{\frac{D_{ij}^2}{2N_0}}\right\}$$