

Capitolo IV

LA RIVELAZIONE IN PRESENZA DI RUMORE

Parte II - La rivelazione non coerente

IV.1 - Generalità.

Molto frequentemente è difficile disporre al ricevitore di un riferimento coerente con la portante associata al segnale modulato specie quando le variazioni della fase sono molto rapide; per questo motivo si sono sviluppati degli schemi di rivelazione che prescindono dalla conoscenza della fase della portante. Tale tipo di rivelazione va sotto il nome di **rivelazione non coerente**.

In questo Capitolo sono studiati tali schemi di rivelazione con esclusivo riferimento alle segnalazioni binarie.

IV.2 - Modulazione OOK.

Lo schema di rivelazione si presenta come è indicato in Fig. IV.1.

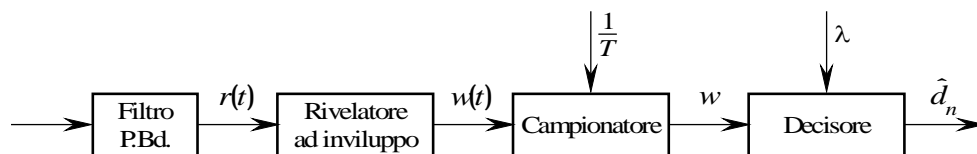


Fig. IV.1 - Rivelatore non coerente per segnali ASK

Nel generico intervallo di simbolo il segnale in ingresso all'uscita del filtro passa-banda, in assenza di rumore, è:

$$(IV.2.1) \quad v(t) = V_0 a_k \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \quad t \in [nT, (n+1)T)$$

con $a_n \in \{0,1\}$ ed il rumore può schematizzarsi nella seguente forma:

$$(IV.2.2) \quad n(t) = n_f(t) \cos(2\pi f_0 t) - n_q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

dove $n_f(t)$ e $n_q(t)$ denotano rispettivamente le componenti in fase ed in quadratura. Se il rumore all'ingresso del filtro è gaussiano, a media nulla, $n(t)$ è anch'esso gaussiano a media nulla con varianza σ^2 data dalla:

$$(IV.2.3) \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_n(f) |H(f)|^2 df$$

dove $W_n(f)$ denota la densità spettrale del rumore in ingresso e $H(f)$ la risposta in frequenza del filtro passa-banda. Le componenti $n_f(t)$ ed $n_q(t)$ sono segnali gaussiani, a media nulla, e hanno la stessa varianza σ^2 . Inoltre tali componenti sono statisticamente indipendenti per cui si può scrivere:

$$(IV.2.4) \quad p_{n_f, n_q}(n_f, n_q) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{n_f^2 + n_q^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Ponendo il segnale ricevuto $r(t) = v(t) + n(t)$ nella forma:

$$(IV.2.5) \quad r(t) = r_f(t) \cos(2\pi f_0 t) - r_q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

il ricevitore valuta l'involuppo di $r(t)$:

$$(IV.2.6) \quad w(t) = \sqrt{r_f^2(t) + r_q^2(t)}$$

e confronta il valore letto w , nell'istante di lettura t_n , interno all'intervallo $[nT, (n+1)T)$, con la soglia λ decidendo a favore del simbolo 0 o 1 secondo la seguente regola:

$$(IV.2.7) \quad \begin{aligned} w < \lambda &\Rightarrow \hat{d}_n = 0 \\ w > \lambda &\Rightarrow \hat{d}_n = 1 \end{aligned}$$

dove si è posto $w = w(t_n)$.

In accordo con tale regola di decisione la probabilità di errore, supposti i dati equiprobabili, vale:

$$(IV.2.8) \quad P_e = \frac{1}{2} \int_{\lambda}^{\infty} p(w|0) dw + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\lambda} p(w|1) dw$$

dove $p(w|0)$ e $p(w|1)$ sono le densità di probabilità di w condizionate da $d_n = 0$ e $d_n = 1$.

Per valutare la probabilità di errore occorre quindi determinare le funzioni $p(w|0)$ e $p(w|1)$.

IV.2.1 - Calcolo di $p(w|0)$.

Sotto l'ipotesi $d_n = 0$ si ha:

$$(IV.2.9) \quad \begin{cases} r_f = n_f \\ r_q = n_q \end{cases}$$

e quindi per la (IV.2.4):

$$(IV.2.10) \quad p_{r_f r_q}(r_f, r_q) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r_f^2 + r_q^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Introducendo le coordinate polari:

$$(IV.2.11) \quad \begin{cases} r_f = w \cos \vartheta \\ r_q = w \sin \vartheta \end{cases}$$

la (IV.2.10) si trasforma nella (v. Appendice):

$$(IV.2.12) \quad p_{w\vartheta}(w, \vartheta) = \frac{w}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{w^2}{2\sigma^2}\right\} u(x)$$

che integrata rispetto a ϑ fornisce:

$$(IV.2.13) \quad p(w|0) = \int_0^{2\pi} p_{w\vartheta}(w, \vartheta) d\vartheta = \frac{w}{\sigma^2} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} u(w)$$

Il primo integrale che compare nella (IV.2.8) diventa così:

$$(IV.2.14) \quad p_0 = \int_{\lambda}^{\infty} p(w|0) dw = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{w}{\sigma^2} e^{-\frac{w^2}{2\sigma^2}} dw = \int_{\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}}^{\infty} e^{-x} dx = e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}}$$

IV.2.2 - Calcolo di $p(w|1)$.

Sotto l'ipotesi $d_n = 1$ risulta:

$$(IV.2.15) \quad \begin{cases} r_f = V_0 \cos \phi + n_f \\ r_q = V_0 \sin \phi + n_q \end{cases}$$

e di conseguenza:

$$(IV.2.16) \quad w = \left\{ (V_0 \cos \phi + n_f)^2 + (V_0 \sin \phi + n_q)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = V_0 \left\{ 1 + \frac{n_f^2 + n_q^2}{V_0^2} + 2 \left[\frac{n_f}{V_0} \cos \phi + \frac{n_q}{V_0} \sin \phi \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Sotto l'ulteriore ipotesi che il rapporto segnale rumore definito dalla:

$$(IV.2.17) \quad \gamma = \frac{V_0^2}{2\sigma^2}$$

sia sufficientemente elevato l'espressione della funzione $p(w|1)$ può essere semplificata.

Si prenda in esame la probabilità dell'evento $E_f \equiv \{|n_f(t)| \leq \alpha V_0\}$ con $\alpha < 1$. Poiché è $n_f = N\{0, \sigma^2\}$ si ha:

$$(IV.2.18) \quad \begin{aligned} \Pr\{E_f\} &= \int_{-\alpha V_0}^{\alpha V_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-n_f^2/2\sigma^2} dn_f = 1 - 2 \int_{\alpha V_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-n_f^2/2\sigma^2} dn_f = \\ &= 1 - 2Q\left(\alpha \frac{V_0}{\sigma}\right) = 1 - 2Q\left(\alpha \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right) \end{aligned}$$

Alla stessa conclusione si arriva se considera l'evento $E_q \equiv \{|n_q(t)| \leq \alpha V_0\}$. Da ciò si deduce che, se γ è sufficientemente elevato, gli eventi E_f e E_q si verificano con probabilità molto prossima ad 1, anche per piccoli valori di α . In altre parole, per alti valori di γ è lecito considerare molto vicine ad 1 le probabilità che $|n_f(t)|$ e $|n_q(t)|$ siano molto minori di V_0 . In tale ipotesi la (IV.2.16) può approssimarsi nel modo seguente ¹:

$$(IV.2.19) \quad \begin{aligned} w &\cong V_0 \left\{ 1 + 2 \left[\frac{n_f}{V_0} \cos \varphi + \frac{n_q}{V_0} \sin \varphi \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \cong V_0 \left\{ 1 + \frac{n_f}{V_0} \cos \varphi + \frac{n_q}{V_0} \sin \varphi \right\} = \\ &= V_0 + n_f \cos \varphi + n_q \sin \varphi \end{aligned}$$

La statistica della quantità w coincide con quella del segnale $n_f \cos \varphi + n_q \sin \varphi$ a parte il fatto che presenta un valor medio pari a V_0 essendo n_f e n_q segnali entrambi a valor medio nullo. D'altra parte poiché $n_f \cos \varphi + n_q \sin \varphi$ è una combinazione lineare di segnali gaussiani e indipendenti, la distribuzione di $w - V_0$ sarà pure gaussiana a valor medio nullo e varianza:

$$(IV.2.20) \quad E\left\{(n_f \cos \varphi + n_q \sin \varphi)^2\right\} = E\{n_f^2\} \cos^2 \varphi + E\{n_q^2\} \sin^2 \varphi = \sigma^2$$

Si ha pertanto:

$$(IV.2.21) \quad p(w|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(w - V_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Il secondo integrale che compare nella (IV.2.8) vale:

$$(IV.2.22) \quad p_1 = \int_{-\infty}^{\lambda} p(w|1) dw = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(w - V_0)^2}{2\sigma^2}\right) dw$$

IV.2.3 - Calcolo di P_e .

Si deduce dalla (IV.2.8):

$$(IV.2.23) \quad P_e(\lambda) = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(w - V_0)^2}{2\sigma^2}\right) dw$$

Il valore ottimo λ_0 della soglia si ottiene dalla condizione $\left.\frac{\partial P_e}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} = 0$ che, nell'ipotesi di dati

equiprobabili, comporta:

$$(IV.2.24) \quad \frac{\lambda_0}{\sigma^2} e^{-\frac{\lambda_0^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\lambda_0 - V_0)^2}{2\sigma^2}}$$

od anche:

¹ La funzione $\sqrt{1+2x}$, se x è molto piccolo può approssimarsi con i due primi termini del suo sviluppo in serie di McLaurin e cioè $\sqrt{1+2x} \cong 1+x$

$$(IV.2.25) \quad \frac{2\lambda_0}{V_0} = 1 + \frac{\log \left[\sqrt{2\pi} \frac{\lambda_0}{\sigma} \right]}{\frac{V_0^2}{2\sigma^2}}$$

Sotto l'ipotesi di $\frac{V_0^2}{2\sigma^2} \gg 1$, si ottiene:

$$(IV.2.26) \quad \lambda_0 = \frac{V_0}{2}$$

Tenendo conto della (IV.2.26) la probabilità di errore diventa:

$$(IV.2.27) \quad P_e = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{V_0^2}{8\sigma^2}\right) + \frac{1}{2} \int_{-\frac{V_0}{2}}^{\frac{V_0}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(w-V_0)^2}{2\sigma^2}\right) dw$$

D'altra parte può scriversi

$$(IV.2.28) \quad \int_{-\frac{V_0}{2}}^{\frac{V_0}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(w-V_0)^2}{2\sigma^2}\right) dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{V_0}{2\sigma}}^{-\frac{V_0}{2\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{V_0}{2\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = Q\left(\frac{V_0}{2\sigma}\right)$$

per cui la (IV.2.27), introducendo la posizione (IV.2.17), diventa:

$$(IV.2.29) \quad P_e = \frac{1}{2} \left\{ e^{-\frac{\gamma}{4}} + Q\left[\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\right] \right\}$$

IV.3. - Modulazione FSK.

Nel caso della modulazione FSK il segnale modulato è costituito da un tono a frequenza $f_0 + \Delta f$ quando è presente il simbolo $d_n = 1$ e da un tono a frequenza $f_0 - \Delta f$ quando è presente il simbolo $d_n = 0$; ciò suggerisce lo schema di rivelazione non coerente rappresentato in Fig. IV.2.

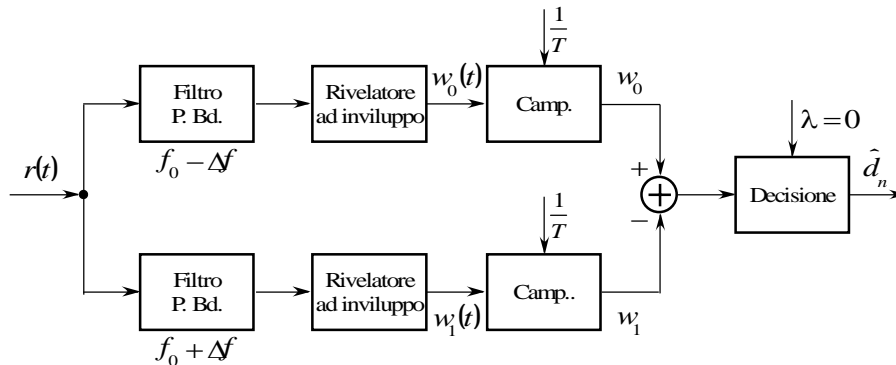


Fig. IV.2 - Rivelatore non coerente per segnali FSK.

All'ingresso del ricevitore sono presenti due filtri passa-banda le cui frequenze centrali sono $f_0 - \Delta f$ e $f_0 + \Delta f$. I segnali in uscita dai filtri sono processati da rivelatori ad involucro e negli istanti di lettura $t_n = nT$ è presa una decisione a favore del simbolo 1 o 0 a seconda di quale dei due segnali è prevalente come risulta dalla regola di decisione seguente:

$$(IV.3.1) \quad \begin{aligned} w_1 < w_0 &\Rightarrow \hat{d}_n = 0 \\ w_1 > w_0 &\Rightarrow \hat{d}_n = 1 \end{aligned}$$

È ovvio che, a causa della simmetria del sistema, se i simboli inviati dalla sorgente sono equiprobabili, la probabilità di rivelare il simbolo 1 quando è stato inviato il simbolo 0 è la stessa della probabilità di rivelare il simbolo 0 quando è stato inviato il simbolo 1. Di conseguenza per la determinazione della probabilità di errore si può prendere in esame soltanto la situazione conseguente alla trasmissione del simbolo 1 e si ha:

$$(IV.3.2) \quad P_e = \Pr \left\{ \hat{d}_n = 0 \mid d_n = 1 \right\}$$

Se i filtri passa-banda si suppongono ideali si può ritenere che il segnale modulato in ingresso induce un segnale in uscita solo dal filtro accordato alla frequenza $f_0 + \Delta f$; di conseguenza i segnali in ingresso ai rivelatori ad involuppo sono i seguenti:

$$(IV.3.3) \quad \begin{cases} r_0(t) = n_{0f}(t) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t] - n_{0q}(t) \sin[2\pi(f_0 + \Delta f)t] \\ r_1(t) = V_0 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi] + n_{1f}(t) \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t] - n_{1q}(t) \sin[2\pi(f_0 + \Delta f)t] \end{cases}$$

e quelli in uscita:

$$(IV.3.4) \quad \begin{cases} w_0(t) = \left\{ n_{0f}^2(t) + n_{0q}^2(t) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ w_1(t) = \left\{ (V_0 \cos \varphi + n_{1f}(t))^2 + (V_0 \sin \varphi + n_{1q}(t))^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Si verifica un errore nella rivelazione quando risulta:

$$(IV.3.5) \quad w_1 < w_0$$

e pertanto la probabilità di errore è:

$$(IV.3.6) \quad P_e = \Pr \left\{ w_1 < w_0 \mid d_n = 1 \right\}$$

Se il rapporto segnale rumore $\gamma = \frac{V_0^2}{2\sigma^2}$ è sufficientemente elevato, si può porre nella seconda delle (IV.3.4) $|n_{1f}| \ll V_0$ e $|n_{1q}| \ll V_0$ e quindi le variabili di decisione w_0 e w_1 si possono semplificare come segue:

$$(IV.3.7) \quad \begin{cases} w_0 = \sqrt{n_{0f}^2 + n_{0q}^2} \\ w_1 = V_0 + n_{1f} \cos \varphi + n_{1q} \sin \varphi \end{cases}$$

Dalle (IV.3.7), tenendo presente che $n(t)$ è un segnale gaussiano, può dedursi che le quantità w_0 e w_1 sono caratterizzate dalle seguenti densità di probabilità:

$$(IV.3.8) \quad \begin{cases} p(w_0) = \frac{w_0}{\sigma_0^2} \exp \left\{ -\frac{w_0^2}{2\sigma_0^2} \right\} u(w_0) \\ p(w_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp \left\{ -\frac{(w_1 - V_0)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \end{cases}$$

essendo σ_0^2 e σ_1^2 le varianze dei rumori in uscita dai filtri passa-banda. Se i filtri si suppongono ideali e aventi la stessa banda B e se il rumore all'ingresso del sistema è bianco con densità spettrale pari a $\frac{N_0}{2}$ le quantità σ_0^2 e σ_1^2 coincidono e valgono:

$$(IV.3.9) \quad \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma^2 = 2 \frac{N_0}{2} B = N_0 B$$

E' bene osservare che detti $n_0(t)$ e $n_1(t)$ i rumori in uscita dai due filtri passa-banda, si ha:

$$(IV.3.10) \quad \begin{aligned} n_0(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) h_0(t - \tau) d\tau \\ n_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) h_1(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

dove $h_0(t)$ e $h_1(t)$ denotano le risposte impulsive dei filtri superiore e inferiore rispettivamente. La correlazione incrociata fra $n_0(t)$ e $n_1(t)$ vale:

$$\begin{aligned}
E \{n_0(t_1)n_1(t_2)\} &= E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n(t_1 - \lambda_1)n(t_2 - \lambda_2)h_0(\lambda_1)h_1(\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2 \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E \{n(t_1 - \lambda_1)n(t_2 - \lambda_2)\} h_0(\lambda_1)h_1(\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2 = \\
\text{(IV.3.11)} \quad &= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_2 - t_1 - \lambda_2 + \lambda_1)h_0(\lambda_1)h_1(\lambda_2)d\lambda_1d\lambda_2 = \\
&= \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\lambda)h_1(\lambda - (t_2 - t_1))d\lambda
\end{aligned}$$

che, ponendo $\tau = t_2 - t_1$, diviene:

$$\text{(IV.3.12)} \quad E \{n(t_1)n(t_2)\} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\lambda)h_1(\lambda - \tau)d\lambda$$

che si può interpretare come la convoluzione fra $h_1(t)$ e $h_2(t)$. Nel dominio della frequenza, se le risposte in frequenza dei due filtri presentano supporti non sovrapposti, risulta:

$$\text{(IV.3.13)} \quad F \{h_0(t) * h_1(-t)\} = H_0(f)H_1^*(f) = 0$$

I rumori $n_0(t)$ e $n_1(t)$ risultano incorrelati e in quanto gaussiani statisticamente indipendenti. I segnali w_0 e w_1 sono quindi statisticamente indipendenti e si può scrivere:

$$\text{(IV.3.14)} \quad \Pr \{w_1 < w_0 \mid d = 1\} = \int_0^{\infty} dw_1 \int_{w_1}^{\infty} dw_0 p(w_0)p(w_1) = \int_0^{\infty} p(w_1) \left[\int_{w_1}^{\infty} p(w_0)dw_0 \right] dw_1$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
\text{(IV.3.15)} \quad \Pr \{w_1 < w_0 \mid d = 1\} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(w_1 - V_0)^2}{2\sigma^2}} \left[\int_{w_1}^{\infty} \frac{w_0}{\sigma^2} e^{-\frac{w_0^2}{2\sigma^2}} dw_0 \right] dw_1 = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(w_1 - V_0)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{w_1^2}{2\sigma^2}} dw_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{V_0^2}{4\sigma^2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\sqrt{2}w_1 - \frac{V_0}{\sqrt{2}})^2}{2\sigma^2}} d(\sqrt{2}w_1)
\end{aligned}$$

Si noti adesso, che essendo $\frac{V_0^2}{2\sigma^2}$ molto elevato, vale la seguente approssimazione:

$$\text{(IV.3.16)} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\sqrt{2}w_1 - \frac{V_0}{\sqrt{2}})^2}{2\sigma^2}} d(\sqrt{2}w_1) \cong 1$$

cosicché dalla precedente si ottiene:

$$\text{(IV.3.17)} \quad P_e = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{V_0^2}{4\sigma^2}}$$

od in termini del rapporto segnale rumore γ :

$$\text{(IV.3.18)} \quad P_e = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\gamma}{2}}$$

IV.4. - Modulazione PSK differenziale.

Poiché nella modulazione PSK l'informazione è associata soltanto alla fase della portante non è possibile individuare alcuno schema di rivelazione non coerente. Tuttavia se la fase φ della portante varia molto lentamente nel tempo per modo che la si possa ritenere costante in un intervallo uguale almeno al doppio del periodo di segnalazione, si può pensare di utilizzare, quando si rivela il dato n -esimo, la conoscenza della fase della portante acquisita nel precedente intervallo di simbolo. Un tale schema consentirebbe di rivelare le variazioni che intervengono nella successione dei dati e non i dati stessi a meno che non si proceda, in fase di modulazione, ad una codifica differenziale.

Un tale tipo di modulazione prende il nome di **modulazione PSK differenziale** o **modulazione DPSK** (*Differential Phase Shift Keying*).

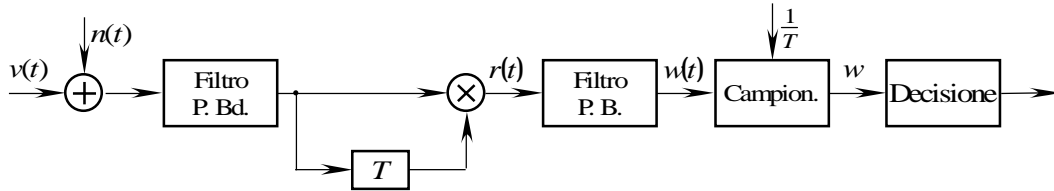


Fig. IV.3 - Rivelatore non coerente per segnali DPSK.

Si prenda in esame lo schema di Fig. IV.3 in cui $v(t)$

$$(IV.4.1) \quad v(t) = V_0 \cos(2\pi f_0 t + \vartheta_n + \varphi) \text{rect} \left(\frac{t - \frac{T}{2} - nT}{T} \right)$$

è un segnale modulato in PSK e ϑ_n la fase nel n -esimo e nel $(n-1)$ -esimo intervallo di segnalazione che, nel caso di modulazione binaria, può assumere i valori 0 o π . Supposto che il filtro passa-banda in ingresso non introduca distorsioni almeno entro la banda del segnale modulato, i segnali all'ingresso del moltiplicatore, in assenza di rumore, sono $v(t)$ e $v(t-T)$. Si ha dunque:

$$(IV.4.2) \quad r(t) = v(t)v(t-T) = V_0^2 \cos[2\pi f_0 t + \vartheta_n + \varphi] \cos[2\pi f_0(t-T) + \vartheta_{n-1} + \varphi]$$

All'uscita del campionatore si ha:

$$(IV.4.3) \quad w = \frac{V_0^2}{2} \cos[\vartheta_n - \vartheta_{n-1}]$$

dove si è tenuto conto che è $f_0 T = \text{intero}$. Dalla (IV.4.3) si riconosce che a secondo se è $\vartheta_n = \vartheta_{n-1}$ o $\vartheta_n \neq \vartheta_{n-1}$, la quantità w assume un valore positivo o negativo. Più precisamente:

$$(IV.4.4) \quad \begin{aligned} \text{Se } \vartheta_n = \vartheta_{n-1} &\Rightarrow w = \frac{V_0^2}{2} \\ \text{Se } \vartheta_n \neq \vartheta_{n-1} &\Rightarrow w = -\frac{V_0^2}{2} \end{aligned}$$

cosicché il segno di w sta ad indicare se il dato n -esimo risulta uguale o diverso da quello di posto $n-1$. Un tale schema consente di rivelare le variazioni introdotte nella successione dei dati e non i dati stessi a meno che non si proceda in fase di modulazione ad una codifica differenziale. Nella modulazione DPSK la fase ϑ_n del segnale modulato si ottiene aggiornando il valore della fase ϑ_{n-1} dell'intervallo di segnalazione precedente secondo la regola:

$$(IV.4.5) \quad \vartheta_n = \vartheta_{n-1} + \Delta\vartheta_n \pmod{2\pi}$$

In cui $\Delta\vartheta_n$ dipende dal simbolo binario d_n presente all'istante nT come segue:

$$(IV.4.6) \quad \begin{aligned} d_n = 0 &\Rightarrow \Delta\vartheta_n = \pi \\ d_n = 1 &\Rightarrow \Delta\vartheta_n = 0 \end{aligned}$$

È evidente che questo è un esempio di codifica con memoria, poiché per codificare il dato da trasmettere occorre conoscere il valore del dato precedente.

Un esempio di tale codifica è riportato nella Tabella IV.I.

Tabella IV.I

d_n		0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
$\Delta\vartheta_n$		π	0	0	π	π	0	π	0	π	0	0
ϑ_n	0^*	π	π	π	0	π	π	0	0	π	π	π

* Simbolo di riferimento iniziale.

Dall'esempio si deduce che se in modulazione si opera una codifica differenziale al ricevitore è possibile rivelare i dati d_n decidendo in uscita a seconda se la grandezza w sia positiva o negativa.

Nel caso della modulazione PSK differenziale la probabilità di errore è espressa, in termini del rapporto segnale rumore γ dalla:

$$(IV.4.7) \quad P_e = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{\gamma}{2}\right\}$$

In Fig. V.5 sono riportati gli andamenti delle probabilità di errore per gli schemi di rivelazione binari studiati in questo Capitolo.

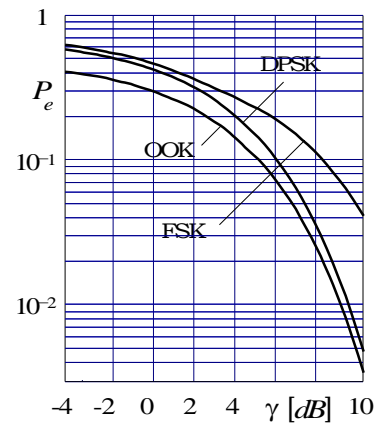


Fig. V.5 - Probabilità di errore per modulazioni binarie con rivelazione non coerente in funzione del rapporto segnale rumore γ .

APPENDICE

A.1 – Trasformazione di densità di probabilità.

Sia (X, Y) un vettore aleatorio le cui componenti X e Y sono caratterizzate da una densità di probabilità congiunta data da $p_{X,Y}(x, y)$.

Si consideri la trasformazione da coordinate polari a coordinate rettangolari:

$$(A.1) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

che, se è $r > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$ definisce una corrispondenza biunivoca tra le coppie di variabili (r, φ) e (x, y) .

Per dedurre la densità di probabilità congiunta delle variabili aleatorie (R, Φ) in funzione della densità di probabilità congiunta delle variabili (X, Y) basta osservare che, detto:

$$E_{R\Phi} \equiv \{r \leq R < r + dr; \varphi \leq \Phi < \varphi + d\varphi\}$$

un evento elementare in coordinate polari e

$$E_{XY} \equiv \{x \leq X < x + dx; y \leq Y < y + dy\}$$

il corrispondente evento definito nel sistema di coordinate rettangolari, deve sussistere la proprietà:

$$(A.2) \quad \Pr \{E_{R\Phi}\} = \Pr \{E_{XY}\}$$

poiché le probabilità che si verifichino i corrispondenti eventi $E_{R\Phi}$ e E_{XY} sono eguali. Se gli eventi di cui sopra sono elementari, le probabilità che intervengono nella (A.2) possono essere espresse, a meno di infinitesimi di ordine superiore, in termini delle corrispondenti densità di probabilità congiunte, come segue:

$$(A.3) \quad p_{R,\Phi}(r, \varphi) \|E_{R\Phi}\| = p_{X,Y}(x, y) \|E_{XY}\|$$

dove $\|E_{R\Phi}\|$ e $\|E_{XY}\|$ denotano le misure degli eventi corrispondenti.

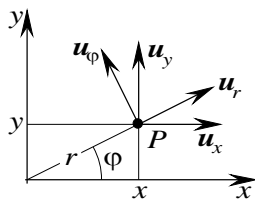


Fig.1

È noto che la misura dell'evento elementare $E_{R\Phi}$ è dato dal modulo del prodotto vettoriale dei vettori elementari $dr = u_r dr$ e $d\varphi = u_\varphi d\varphi$ di modulo du e dv e orientati secondo le direzioni ortogonali mostrate in Fig. 1. È cioè $\|E_{R\Phi}\| = |dr \times d\varphi|$.

La stessa cosa vale per l'evento E_{XY} . Anche qui, con analogo significato dei simboli, è $\|E_{XY}\| = |dx \times dy|$.

Tenendo conto della trasformazione (A.1) si ha:

$$(A.4) \quad \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

per cui è:

$$(A.5) \quad \begin{aligned} dx \times dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi \right) \times \left(\frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \right) = \\ &= \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} dr \times dr + \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} dr \times d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial r} d\varphi \times dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi \times d\varphi \end{aligned}$$

Poiché i vettori dr e $d\varphi$ sono ortogonali è:

$$(A.6) \quad \begin{aligned} d\mathbf{r} \times d\mathbf{r} &= d\boldsymbol{\varphi} \times d\boldsymbol{\varphi} = 0 \\ d\boldsymbol{\varphi} \times d\mathbf{r} &= -d\mathbf{r} \times d\boldsymbol{\varphi} \end{aligned}$$

La (A.5) si riduce alla:

$$(A.7) \quad d\mathbf{x} \times d\mathbf{y} = \left(\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial r} \right) d\mathbf{r} \times d\boldsymbol{\varphi}$$

Si ottiene così:

$$(A.8) \quad \|\mathbf{E}_{XY}\| = \left| \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial r} \right| \|\mathbf{E}_{R\Phi}\|$$

che sostituita nella (A.3), fornisce:

$$(A.9) \quad p_{R,\Phi}(r, \varphi) = \left| \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial r} \right| p_{X,Y}(x, y)$$

Poiché è:

$$(A.10) \quad \left| \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial r} \right| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

la (A.3) si scrive:

$$(A.11) \quad p_{R,\Phi}(r, \varphi) = r \cdot p_{X,Y}(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$