

I.1 – Lo spazio dei segnali a energia finita.

I segnali ad energia finita costituiscono uno spazio vettoriale S noto come **spazio dei segnali**.

Infatti se si rappresenta un segnale con una funzione $s(t)$ reale o complessa di variabile reale t definita in \mathbb{R} ⁽¹⁾, basta dimostrare che:

a) detto $s(t)$ un segnale ad energia finita anche il segnale $\lambda s(t)$ (con λ costante complessa) lo è (*proprietà di omogeneità*). Infatti si ha:

$$(I.1.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda s(t)|^2 dt = |\lambda|^2 \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

b) detti $s_1(t)$ e $s_2(t)$ due segnali ad energia finita anche il segnale $s_1(t) + s_2(t)$ lo è. (*proprietà di additività*). Infatti è:

$$(I.1.2) \quad |s_1(t) + s_2(t)|^2 = [s_1(t) + s_2(t)][s_1(t) + s_2(t)]^* = |s_1(t)|^2 + |s_2(t)|^2 + \{s_1(t)s_2^*(t) + s_2(t)s_1^*(t)\}$$

e tenendo conto dell'ovvia condizione:

$$(I.1.3) \quad 0 \leq |s_1(t) - s_2(t)|^2 = |s_1(t)|^2 + |s_2(t)|^2 - \{s_1(t)s_2^*(t) + s_2(t)s_1^*(t)\}$$

si ottiene:

$$(I.1.4) \quad |s_1(t) + s_2(t)|^2 \leq 2|s_1(t)|^2 + 2|s_2(t)|^2$$

che integrata fornisce:

$$(I.1.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |s_1(t) + s_2(t)|^2 dt \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |s_1(t)|^2 dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} |s_2(t)|^2 dt < \infty$$

Un segnale può allora essere individuato o dalla funzione $s(t)$ che lo definisce nel dominio del tempo o dall'elemento $s \in S$ dello spazio dei segnali.

I.2 – Proprietà dello spazio dei segnali.

I.2.1-Lo spazio dei segnali è uno spazio normato.

Ciò significa che ad ogni elemento s di S si può associare un numero reale non negativo definito dalla:

$$(I.2.1) \quad \|s\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

La grandezza $\|s\|$ così definita costituisce la cosiddetta *norma euclidea*.

È opportuno precisare che la condizione $\|s\| = 0$ comporta $s = 0$.

I.2.2 - Lo spazio dei segnali è uno spazio metrico.

Ciò significa che ad ogni coppia s_1 e s_2 di elementi di S si può associare un numero reale non negativo definito dalla:

⁽¹⁾ Ciò comporta che nel caso in cui la funzione $s(t)$ fosse definita solo in un sottoinsieme I limitato essa si intenderà estesa a tutto \mathbb{R} purché si ponga $s(t) \equiv 0$ per $t \notin I$.

$$(I.2.2) \quad d(s_1, s_2) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |s_1(t) - s_2(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

La grandezza $d(s_1, s_2)$, così definita, costituisce la cosiddetta *distanza euclidea*.

Dalla definizione (I.2.2) discende:

$$(I.2.3) \quad d(s_1, s_2) = d(s_2, s_1)$$

È opportuno osservare che, dal confronto delle (I.2.1) e (I.2.2) si ha:

$$(I.2.4) \quad d(s_1, s_2) = \|s_1 - s_2\|$$

I.2.7 - Lo spazio dei segnali è uno spazio dotato di prodotto scalare.

Ciò significa che ad ogni coppia s_1 e s_2 di elementi di S si può associare un numero complesso (*prodotto scalare*) definito dalla:

$$(I.2.5) \quad (s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt$$

Discende dalla precedente:

$$(I.2.6) \quad (s_1, s_2) = (s_2, s_1)^*$$

È da osservare che è:

$$(I.2.7) \quad \|s\| = \sqrt{(s, s)}$$

e

$$(I.2.8) \quad d(s_1, s_2) = \sqrt{(s_1 - s_2, s_1 - s_2)}$$

Tenendo presente la definizione (I.2.5), detti α e β due costanti complesse si ha:

$$(I.2.9) \quad \begin{aligned} (\alpha s_1 + \beta s_2, s) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha s_1(t) + \beta s_2(t)] s^*(t) dt = \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s^*(t) dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) s^*(t) dt = \\ &= \alpha (s_1, s) + \beta (s_2, s) \end{aligned}$$

e analogamente:

$$(I.2.10) \quad \begin{aligned} (s, \alpha s_1 + \beta s_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) [\alpha s_1^*(t) + \beta s_2^*(t)] dt = \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s_1^*(t) dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s_2^*(t) dt = \\ &= \alpha^* (s, s_1) + \beta^* (s, s_2) \end{aligned}$$

È bene precisare che si possono adottare altre espressioni della norma, della distanza e del prodotto scalare nello spazio delle funzioni a quadrato sommabile; tuttavia nello spazio dei segnali queste grandezze sono specificate come precedentemente indicato. Esse sono poste in corrispondenza di parametri energetici di particolare rilevanza.

È bene tener presente che

- Se è $\|s\|=1$ il segnale si dice *normale*.
- Se è $(s_1, s_2) = 0$ i due segnali si dicono *ortogonali*.
- Un insieme di segnali $\{u_i\}_{i=1}^n$ si dice *orto-normale* quando risulta:

$$(I.2.11) \quad (u_i, u_j) = \delta_{i-j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Esempio E.I.1.

Tenendo conto delle (I.2.9) e (I.2.10), il quadrato della norma del segnale $s = \alpha s_1 + \beta s_2$ vale:

$$\begin{aligned}
 \|s\|^2 &= \|\alpha s_1 + \beta s_2\|^2 = \\
 &= (\alpha s_1 + \beta s_2, \alpha s_1 + \beta s_2) = \alpha(s_1, \alpha s_1 + \beta s_2) + \beta(s_2, \alpha s_1 + \beta s_2) = \\
 &= \alpha(\alpha s_1 + \beta s_2, s_1)^* + \beta(\alpha s_1 + \beta s_2, s_2)^* = \\
 &= \alpha\alpha^* (s_1, s_1)^* + \alpha\beta^* (s_2, s_1)^* + \beta\alpha^* (s_1, s_2)^* + \beta\beta^* (s_2, s_2)^* = \\
 &= |\alpha|^2 \|s_1\|^2 + \alpha\beta^* (s_1, s_2) + \beta\alpha^* (s_1, s_2)^* + |\beta|^2 \|s_2\|^2
 \end{aligned}$$

I.3 – Segnali linearmente indipendenti. Teorema di Gram.

Si dice che n segnali $\{s_i(t)\}_{i=1}^n$ ad energia finita sono linearmente indipendenti quando la condizione:

$$(I.3.1) \quad \sum_{i=1}^n k_i s_i(t) = 0$$

è soddisfatta se e solo se le costanti k_i sono tutte nulle.

Vale il seguente **TEOREMA DI GRAM**:

Condizione necessaria e sufficiente perchè n segnali $\{s_i(t)\}_{i=1}^n$ siano linearmente indipendenti è che il determinante di Gram sia diverso da zero e cioè se risulta:

$$(I.3.2) \quad G(s_1, s_2, \dots, s_n) \equiv \begin{vmatrix} (s_1, s_1) & (s_1, s_2) & \dots & (s_1, s_n) \\ (s_2, s_1) & (s_2, s_2) & \dots & (s_2, s_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (s_n, s_1) & (s_n, s_2) & \dots & (s_n, s_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Dimostrazione:

Moltiplicando la (I.3.1) scalarmente per tutti i segnali $s_j(t)$ si ottiene il seguente sistema lineare omogeneo nelle n incognite k_i :

$$(I.3.3) \quad \sum_{i=1}^n k_i (s_i, s_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

che, se i segnali sono linearmente indipendenti, dovrà ammettere solo la soluzione banale ($k_i = 0 \quad \forall i$); cosa che, come è noto, si ottiene se la matrice dei coefficienti non è singolare e cioè se la (I.3.2) è verificata.

Viceversa se il determinante di Gram è nullo, il sistema lineare ed omogeneo (I.3.3) ammette almeno una soluzione non banale. Detta $\{\bar{k}_i\}_{i=1}^n$ tale soluzione, si costruisca il segnale

$$(I.3.4) \quad s = \sum_{i=1}^n \bar{k}_i s_i$$

la cui norma vale:

$$(I.3.5) \quad \begin{aligned}
 \|s\| &= (s, s)^{\frac{1}{2}} = \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \bar{k}_i s_i, \sum_{i=1}^n \bar{k}_i s_i \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{k}_i \bar{k}_j^* (s_i, s_j) \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{j=1}^n \bar{k}_j^* \left(\sum_{i=1}^n \bar{k}_i (s_i, s_j) \right) \right\}^{\frac{1}{2}} = 0
 \end{aligned}$$

Questo comporta che $s = 0$ e quindi $\sum_{i=1}^n \bar{k}_i s_i = 0$. I segnali $\{s_i(t)\}_{i=1}^n$ sono così linearmente dipendenti dal momento che la (I.3.3) è verificata almeno per un' n -pla di costanti non tutte nulle.

Si osservi che se la caratteristica della matrice di Gram è k e cioè se esiste almeno un minore di ordine k della matrice di Gram non nullo, è possibile, con un diverso riordinamento dei segnali, costruire una matrice di Gram in cui il minore principale di ordine k è diverso da zero. Ciò comporta che degli n segnali solo k sono linearmente indipendenti; k quindi rappresenta la *dimensionalità* del sistema dei segnali.

I.4 – Sottospazi lineari a dimensioni finite.

Se $B_n \equiv \{u_i(t)\}_{i=1}^n$ denota un insieme di segnali ad energia finita, linearmente indipendenti, l'insieme di tutte le combinazioni lineari del tipo:

$$(I.4.1) \quad s(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(t)$$

definisce un sottospazio lineare ad n dimensioni S_n del quale l'insieme B_n costituisce la *base*. La (I.4.1) si può anche rappresentare nella seguente forma vettoriale:

$$(I.4.2) \quad s = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

Una volta assegnata la base si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra un segnale appartenente a S_n ed i coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$.

Infatti:

- dati i coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ si può, sulla base della (I.4.1), ricavare il segnale s ;
- moltiplicando scalarmente la (I.4.2) per tutti i segnali u_j si ha:

$$(I.4.3) \quad (s, u_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (u_i, u_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

che costituisce un sistema lineare nelle incognite $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ che ammette un'unica soluzione giacché il suo determinante è diverso da zero, dato che la base è composta da segnali linearmente indipendenti.

Il segnale può allora essere rappresentato in un sistema di coordinate ad n dimensioni in

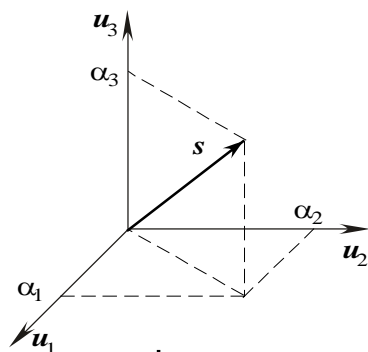


Fig. I.1 – Rappresentazione vettoriale di un segnale reale.

cui le direzioni degli assi coordinati sono individuate dai vettori u_i ; i coefficienti $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ si possono interpretare come le “coordinate” del segnale s nel sistema di riferimento assegnato.

Se la base è orto-normale si ha:

$$(I.4.4) \quad \alpha_j = (s, u_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

La Fig. I.1 mostra un esempio di rappresentazione geometrica di un segnale reale in uno sottospazio di dimensione 3 riferito ad un sistema orto-normale di assi di riferimento.

Se s_1 e s_2 sono due segnali appartenenti a S_n e quindi espressi in termini di una base orto-normale B_n , si ha:

$$(I.4.5) \quad \begin{aligned} s_1 &= \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} \mathbf{u}_i \\ s_2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_{2i} \mathbf{u}_i \end{aligned}$$

Di conseguenza:

- la norma vale:

$$(I.4.6) \quad \|s\| = \sqrt{(s, s)} = \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

- la distanza è:

$$(I.4.7) \quad d(s_1, s_2) = \|s_1 - s_2\| = \left\{ \sum_{i=1}^n |\alpha_{1i} - \alpha_{2i}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

- il prodotto scalare diviene:

$$(I.4.8) \quad (s_1, s_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{1i} \alpha_{2j}^* (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{1i} \alpha_{2i}^*$$

I.5 – Angolo fra due segnali.

Con riferimento alla Fig.I.2 se s_1 e s_2 denotano due segnali ad energia finita è possibile definire l'angolo ϑ fra essi compreso con la nota espressione

$$(I.5.1) \quad d^2(s_1, s_2) = \|s_1\|^2 + \|s_2\|^2 - 2\|s_1\|\|s_2\|\cos \vartheta$$

che costituisce, com'è noto, un'estensione del Teorema di Pitagora a triangoli non rettangoli.

Usando la (I.2.2) si ha:

$$(I.5.2) \quad \begin{aligned} d^2(s_1, s_2) &= \int_{\mathbb{R}} [s_1(t) - s_2(t)][s_1^*(t) - s_2^*(t)] dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\{ |s_1(t)|^2 - s_1(t)s_2^*(t) - s_1^*(t)s_2(t) + |s_2(t)|^2 \right\} dt = \\ &= \|s_1\|^2 + \|s_2\|^2 - (s_1, s_2) - (s_1, s_2)^* = \|s_1\|^2 + \|s_2\|^2 - 2\operatorname{Re}[(s_1, s_2)] \end{aligned}$$

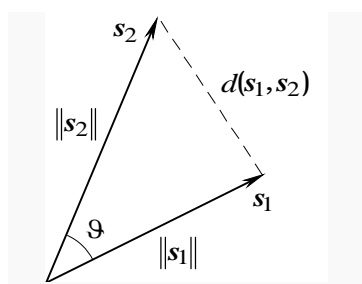


Fig. I.2 – Angolo fra due segnali.

Sostituendo la (I.5.2) nella (I.5.1) si ottiene:

$$(I.5.3) \quad \cos \vartheta = \frac{\operatorname{Re}[(s_1, s_2)]}{\|s_1\|\|s_2\|}$$

Se due segnali sono tali da aversi $(s_1, s_2) = 0$ è $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; questo giustifica la denominazione di segnali ortogonali assegnata a quei segnali il cui prodotto scalare è nullo.

Se i segnali sono reali, la (I.5.3) diviene:

$$(I.5.4) \quad \cos \vartheta = \frac{(s_1, s_2)}{\|s_1\|\|s_2\|}$$

I.6 - Approssimazione dei segnali nel sottospazio S_n . Teorema della proiezione.

Sia S_n un sottospazio lineare ad n dimensioni definito da una base di vettori $\mathbf{B}_n = \{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$ che, per semplicità, si suppone orto-normale e sia $s(t)$ un segnale non appartenente ad S_n .

In quel che segue ci si propone di costruire una rappresentazione s_n di s nel sottospazio S_n del tipo:

$$(I.6.1) \quad s_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i$$

intendendo con ciò che la rappresentazione di s nel sottospazio S_n è ottenuta da quel vettore $s_n \in S_n$ che presenta la minima distanza euclidea da s . Il problema così posto consiste nel determinare n costanti α_i tali da soddisfare la condizione:

$$(I.6.2) \quad \|s - s_n\|^2 = \min.$$

Ora, sviluppando il quadrato della norma, può scriversi:

$$(I.6.3) \quad \begin{aligned} \|s - s_n\|^2 &= (s - s_n, s - s_n) = (s, s) - (s_n, s) - (s_n, s)^* + (s_n, s_n) = \\ &= \|s\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i (s, \mathbf{u}_i)^* - \sum_{i=1}^n \alpha_i^* (s, \mathbf{u}_i) + \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \end{aligned}$$

che, sommando e sottraendo la quantità $\sum_{i=1}^n |(s, \mathbf{u}_i)|^2$, diventa

$$(I.6.4) \quad \|s - s_n\|^2 = \|s\|^2 - \sum_{i=1}^n |(s, \mathbf{u}_i)|^2 + \sum_{i=1}^n |\alpha_i - (s, \mathbf{u}_i)|^2$$

Poiché l'ultimo addendo a secondo membro della precedente è certamente non negativo, il minimo cercato si ottiene quando esso è nullo e cioè quando è

$$(I.6.5) \quad \alpha_i = (s, \mathbf{u}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Le quantità α_i definite dalle (I.6.5) sono i cosiddetti *coefficienti di Fourier generalizzati* del segnale $s(t)$ rispetto alla base B_n .

L'approssimazione ottima del segnale $s(t)$ è allora data dalla:

$$(I.6.6) \quad s_n = \sum_{i=1}^n (s, \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i$$

Un'interessante interpretazione geometrica del risultato precedente è costituito dal cosiddetto

TEOREMA DELLA PROIEZIONE.

Detta s_n la migliore approssimazione di s in S_n , il vettore $s - s_n$ risulta ortogonale ad ogni vettore appartenente ad S_n e quindi è ortogonale al sottospazio lineare S_n ad n dimensioni. (v. Fig. II.2).

Dimostrazione

Basta infatti dimostrare che il vettore $s - s_n$ è ortogonale ad ogni componente \mathbf{u}_i di una qualsiasi base $B_n = \{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^n$ orto-normale di S_n . Tenendo presenti le (I.6.5) e (I.6.6), si ha:

$$(I.6.7) \quad \begin{aligned} (s - s_n, \mathbf{u}_i) &= (s, \mathbf{u}_i) - (s_n, \mathbf{u}_i) = \\ &= (s, \mathbf{u}_i) - \sum_{j=1}^n \alpha_j (\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i) = \alpha_i - \alpha_i = 0 \end{aligned}$$

s_n quindi è la *proiezione ortogonale* di s nel sottospazio lineare S_n .

La quantità

$$(I.6.8) \quad \mathbf{e} = s - s_n$$

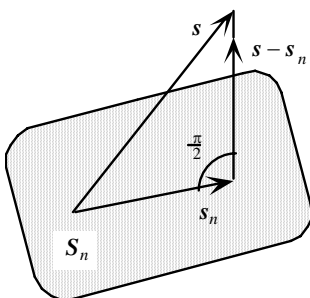


Fig. II.2 - Teorema della proiezione

misura l'errore di approssimazione, mentre $\|e\|^2$ è l'errore quadratico medio. Si ha:

$$\begin{aligned}
 \|e\|^2 &= \|s - s_n\|^2 = (s - s_n, s - s_n) = \\
 &= (s, s - s_n) - (s_n, s - s_n) = \\
 \text{(I.6.9)} \quad &= (s - s_n, s)^* = (s, s) - (s_n, s)^* = \\
 &= \|s\|^2 - (s_n, s)^*
 \end{aligned}$$

in quanto, essendo e ortogonale a s_n , risulta $(s_n, s - s_n) = 0$. Tenendo conto della (I.6.6) si ha:

$$\text{(I.6.10)} \quad (s_n, s) = \sum_{i=1}^n (s_n, u_i)(u_i, s) = \sum_{i=1}^n |(s, u_i)|^2 = (s_n, s)^*$$

e quindi infine:

$$\text{(I.6.11)} \quad \|e\|^2 = \|s\|^2 - \sum_{i=1}^n |(s, u_i)|^2$$

Esempio E.I.2

Determinare la proiezione del segnale

$$s(t) = e^{-t}u(t)$$

nel sottospazio ad infinite dimensioni individuato dalle seguenti funzioni di base:

$$u_i(t) = \text{rect}\left(t - \frac{1}{2} - i\right) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

rappresentate in Fig. E.I.1.

La base in questione è orto-normale essendo manifestamente

$\int_{-\infty}^{\infty} u_i(t)u_j(t)dt = \delta_{i-j}$ e quindi i coefficienti di Fourier generalizzati valgono:

$$(s, u_i) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)u_i(t)dt = \int_i^{i+1} e^{-t} dt = e^{-i}(1 - e^{-1})$$

Per valutare l'errore di approssimazione, occorre in base alla (I.6.11) determinare:

- l'energia del segnale

$$\|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$$

- La quantità

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(s, u_i)|^2 = (1 - e^{-1})^2 \sum_{i=0}^{\infty} e^{-2i} = (1 - e^{-1})^2 \frac{1}{1 - e^{-2}} = \frac{1 - e^{-1}}{1 + e^{-1}} = \frac{e - 1}{e + 1}$$

Si ha quindi

$$\|e\|^2 = \frac{1}{2} - \frac{e - 1}{e + 1} = \frac{3 - e}{1 + e}$$

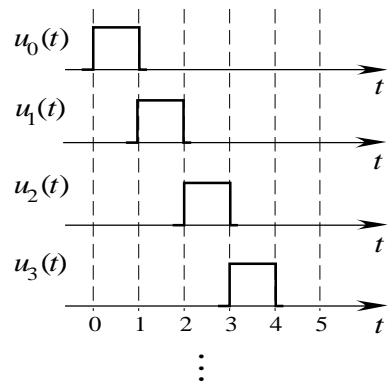


Fig. E.I.1

I.7 - Sviluppo di un segnale in serie di funzioni ortogonali.

Sia S_k un sottospazio lineare a k dimensioni generato da una base $B_k \equiv \{u_i\}_{i=1}^k$ di vettori orto-normali e sia $s_k(t)$ la proiezione ortogonale di un segnale $s(t)$ nel sottospazio S_k .

Se alla base B_k si aggiunge un vettore u_{k+1} ortogonale ai precedenti e a sua volta normale, si ottiene un nuovo insieme di vettori $\{u_i\}_{i=1}^{k+1}$ che costituisce una nuova base B_{k+1} che a sua volta genera un sottospazio lineare a $k + 1$ dimensioni S_{k+1} . Denotando con s_{k+1} la proiezione ortogonale di s su S_{k+1} , l'errore quadratico medio, ottenuto con questa nuova approssimazione, sarà, per la (I.6.11):

$$\text{(I.7.1)} \quad \|e_{k+1}\|^2 = \|s\|^2 - \sum_{i=1}^{k+1} |(s, u_i)|^2 = \|s\|^2 - \sum_{i=1}^k |(s, u_i)|^2 - |(s, u_{k+1})|^2$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$(I.7.2) \quad \|e_{k+1}\|^2 = \|e_k\|^2 - |(s, u_{k+1})|^2$$

dove $\|e_k\|^2$ denota l'errore commesso quando si effettua la proiezione del sottospazio S_k . Aumentando la dimensionalità del sottospazio dove si proietta il vettore s la norma dell'errore non aumenta. La successione $\{\|e_k\|\}$ degli errori quadratici medi costituisce pertanto una successione non crescente a termini non negativi. Essa è pertanto una successione convergente.

Si è portati quindi a concludere che disponendo di un sistema di vettori $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ orto-normale che individua un sottospazio lineare ad infinite dimensioni, si potrebbe ottenere un'approssimazione del segnale $s(t)$ con un errore quadratico medio nullo. In altri termini, se si ha:

$$(I.7.3) \quad \|s\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(s, u_i)|^2$$

si può cioè scrivere:

$$(I.7.4) \quad s = \sum_{i=1}^{\infty} (s, u_i) u_i$$

Ricordando il significato energetico che si è attribuito alla norma di un segnale, la (I.7.3) esprime l'energia totale di un segnale in termini dei coefficienti $\alpha_i = (s, u_i)$, cosicché la quantità $|\alpha_i|^2$ rappresenta l'aliquota dell'energia di $s(t)$ che compete alla generica componente $\alpha_i u_i(t)$ dello sviluppo (I.7.4).

Si noti che, per una certa classe di segnali, non tutte le basi orto-normali composte da un'infinità numerabile di funzioni sono tali da garantire l'annullarsi dell'errore medio quadratico. Tuttavia se, per una data infinità numerabile di funzioni orto-normali, si determina un particolare insieme di segnali tale che per ogni suo elemento la (I.7.3) è verificata, l'insieme in questione si dice *completo* e la (I.7.3) costituisce la *condizione di completezza*.