

RAPPRESENTAZIONE DEI SEGNALI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA.

II.1 - Segnali periodici.

Un segnale, rappresentato da una funzione reale o complessa $s(t)$ di variabile reale t , si dice periodico se esistono valori di T tali che, per ogni t , si abbia:

$$(II.1.1) \quad s(t) = s(t+T)$$

È immediato verificare che se T è una soluzione della (II.1.1) tutti i suoi multipli soddisfano la (II.1.1). Il minimo valore positivo dei valori di T che soddisfano la (II.1.1) è definito *periodo fondamentale* T_0 , o più semplicemente *periodo*, del segnale.

Un segnale periodico è manifestamente un segnale a potenza finita. Infatti è:

$$(II.1.2) \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0 + \tau} \int_{\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0 + \tau}{2}} |s(t)|^2 dt$$

dove si è posto $T = kT_0 + \tau$ (k intero e $0 \leq \tau < T_0$). Dalla precedente si ottiene:

$$(II.1.3) \quad \begin{aligned} P &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0 + \tau} \left\{ \int_{-\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0}{2}} + \int_{\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0 + \tau}{2}} \right\} |s(t)|^2 dt = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{kT_0 + \tau} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0 + \tau} \left\{ \int_{\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0 + \tau}{2}} |s(t)|^2 dt + \int_{\frac{kT_0}{2}}^{\frac{kT_0 + \tau}{2}} |s(t)|^2 dt \right\} \end{aligned}$$

Poiché è

$$(II.1.4) \quad 0 \leq \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt < \infty$$

gli ultimi due integrali della (II.1.3) si mantengono limitati, per cui risulta:

$$(II.1.5) \quad P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt$$

Poiché un segnale periodico non presenta energia specifica finita, non è possibile applicare le metodologie di analisi esposte al Cap. I. Tuttavia se si prende in considerazione il segnale troncato $s_{T_0}(t)$ definito ponendo

$$(II.1.6) \quad s_{T_0}(t) = s(t) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

si ha (v. Fig. II.1):

$$(II.1.7) \quad s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{T_0}(t - mT_0)$$

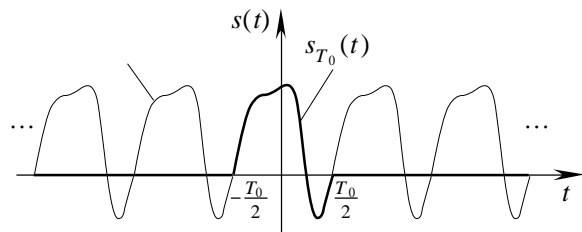


Fig. II.1 - Segnale periodico. Segnale troncato.

Ciò significa che un segnale periodico può

essere considerato come la ripetizione periodica, con periodo T_0 , di un segnale elementare $s_{T_0}(t)$, confinato in un intervallo di durata T_0 .

Il segnale $s_{T_0}(t)$ è manifestamente ad energia finita essendo:

$$(II.1.8) \quad \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)|^2 dt < \infty$$

cosicché, scegliendo la seguente base di funzioni ortonormali:

$$(II.1.9) \quad u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

che, come è possibile dimostrare ¹, è completa per qualsiasi segnale ad energia finita e confinato nell'intervallo $\left(-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right)$ può essere espanso nella seguente serie di funzioni:

$$(II.1.10) \quad s_{T_0}(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} \text{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right)$$

dove i coefficienti α_n valgono:

$$(II.1.11) \quad \alpha_n = (s_{T_0}, u_n) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) u_n^*(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} dt$$

Sostituendo la (II.1.10) nella (II.1.7) si ottiene:

$$(II.1.12) \quad \begin{aligned} s(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_{T_0}(t - mT_0) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j2\pi n \frac{t - mT_0}{T_0}} \text{rect}\left(\frac{t - mT_0}{T_0}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{T_0}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - mT_0}{T_0}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{T_0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto della periodicità dell'esponenziale complesso $e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}$ e che è $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - mT_0}{T_0}\right) = 1$.

Ponendo infine

$$(II.1.13) \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

e

$$(II.1.14) \quad S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

la (II.1.12) assume la forma:

$$(II.1.15) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

che costituisce la ben nota espansione di un segnale periodico in **serie di Fourier** espressa in *forma esponenziale* o *euleriana*.

È bene osservare che, a causa della periodicità del segnale $s(t)$, l'integrale che compare nella (II.1.14) può essere esteso ad un qualsiasi intervallo purché di durata T_0 .

È opportuno precisare che la serie a secondo membro della (II.1.15) converge al segnale $s(t)$ in media quadratica. Ciò significa che la distanza euclidea fra il segnale $s(t)$ e la ridotta N -esima della serie tende a zero al crescere di N e cioè:

$$(II.1.16) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left| s(t) - \sum_{n=-N}^N S_n e^{-j2\pi n f_0 t} \right|^2 dt = 0$$

Per quanto riguarda la convergenza puntuale è facile dimostrare che la serie converge ad $s(t)$ in tutti i punti in cui il segnale è continuo; negli eventuali punti di discontinuità $t = \tau$ la

¹ cfr.: F. G. Tricomi: *Istituzioni di analisi superiore*. Edizioni Cedam. Padova. 1964.

serie converge al valore $\frac{1}{2}[s(\tau^+) + s(\tau^-)]$ e cioè al valore medio fra i limiti destro e sinistro in corrispondenza della discontinuità.

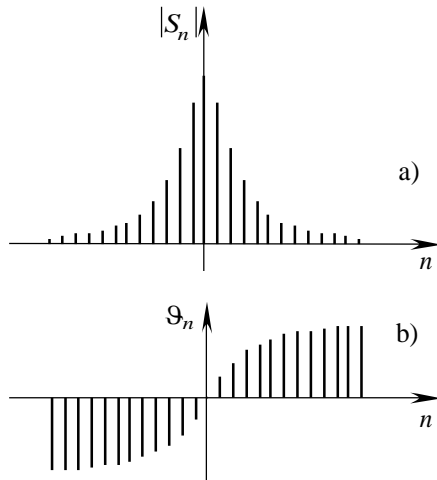


Fig. II.1 - Spettri di ampiezza a) e di fase b) di un segnale reale.

Il coefficiente S_n è una quantità complessa cosicché può essere posto nella forma:

$$(II.1.17) \quad S_n = |S_n| e^{j\vartheta_n}$$

in termini cioè del modulo $|S_n|$ e dell'argomento ϑ_n .

Si deduce dalla (II.1.15) che la conoscenza dell'insieme dei coefficienti S_n consente di ricostruire il segnale $s(t)$. Ciò suggerisce una particolare rappresentazione grafica del segnale ottenuta con dei diagrammi in cui sono riportati i moduli $|S_n|$ e gli argomenti ϑ_n di S_n in funzione di n . Tali diagrammi normalmente indicati come *spettri di ampiezza* e *di fase* del segnale $s(t)$, sono anche rappresentati in

termini della frequenza $f_n = nf_0$ della generica armonica del segnale $s(t)$.

Esempio E.II.1.

Si consideri la sequenza periodica di impulsi rettangolari di durata T e periodo T_0 mostrata in Fig. E.II.1. Nell'intervallo $(-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2})$. Il segnale è descritto dalla $s(t) = \text{rect}(\frac{t}{T})$. Il coefficiente S_n vale:

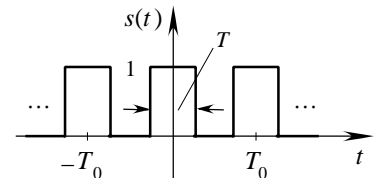


Fig. E.II.1

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} dt = \begin{cases} \frac{\sin(\pi n \frac{T}{T_0})}{\pi n} & (n \neq 0) \\ \frac{T}{T_0} & (n = 0) \end{cases}$$

che, ricordando la definizione della funzione $\text{sinc}(x)$, può essere riscritto come segue:

$$S_n = \frac{T}{T_0} \text{sinc}\left(n \frac{T}{T_0}\right)$$

II.2 - Somma di Poisson.

Si consideri la seguente successione di delte di Dirac traslate.

$$(II.2.1) \quad \delta_{T_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

Essa costituisce una distribuzione periodica di periodo T_0 . Poiché il coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier della (II.2.1) vale:

$$(II.2.2) \quad S_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} dt = \frac{1}{T_0}$$

lo sviluppo in serie di Fourier della (II.2.1) dà luogo alla seguente **somma di Poisson**:

$$(II.2.3) \quad \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

II.3 – La trasformata di Fourier.

Sia $s(t)$ un segnale ad energia finita e sia $s_T(t)$ il corrispondente segnale troncato definito dalla (v. Fig. II.1):

$$(II.3.1) \quad s_T(t) = s(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Il segnale $s_T(t)$ oltre ad energia finita è a durata limitata e pertanto, come già osservato al par II.1, può essere espanso in termini del seguente insieme di funzioni orto-normali:

$$(II.3.2) \quad u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

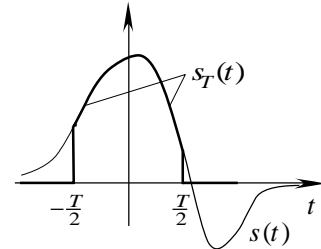


Fig. II.1 – Segnale ad energia finita e segnale troncato.

come segue:

$$(II.3.3) \quad s_T(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \right] \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \frac{1}{T} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} T \cdot S_n e^{j2\pi n \frac{t}{T}} \right] \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

con

$$(II.3.4) \quad S_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T}} dt$$

È evidente che se si fa tendere T ad infinito $s_T(t)$ tende a $s(t)$:

$$(II.3.5) \quad s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} s_T(t)$$

Per effettuare il passaggio al limite su indicato basta osservare che, al crescere di T , le quantità $f_n = \frac{n}{T}$ tendono a addensarsi nel senso che la differenza $\Delta f = \frac{1}{T}$ tra due termini consecutivi tende a zero; f_n tende così ad identificarsi con una variabile continua f e $\frac{1}{T}$ con il corrispondente incremento df . In base a tali considerazioni, dalla (II.3.4) si deduce che la quantità $T \cdot S_n$ tende, al divergere di T , alla seguente funzione di f :

$$(II.3.6) \quad S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

mentre, dalla (II.3.5), tenendo conto della (II.3.3), discende:

$$(II.3.7) \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

Le (II.3.6) e (II.3.7) costituiscono le espressioni della **trasformata** e **antitrasformata di Fourier** rispettivamente.

È opportuno precisare che la trasformata di Fourier di un segnale ad energia finita è definita dalla:

$$(II.3.8) \quad S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

dove il limite deve intendersi in accordo con la metrica definita nello spazio dei segnali. Ciò equivale a dire che la trasformata di Fourier del segnale $s(t)$ si deve intendere quella funzione $S(f)$ la cui distanza euclidea da $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$ tende a zero al crescere di T ; e cioè se:

$$(II.3.9) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| S(f) - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 df = 0$$

Tuttavia se il segnale $s(t)$ è rappresentato da una funzione sommabile e cioè tale che risulti:

$$(II.3.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

poiché è:

$$(II.3.11) \quad |S(f)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

il limite (II.3.9) può essere effettuato come segue:

$$(II.3.12) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left| S(f) - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \right| = 0$$

che equivale a dire che la convergenza dell'integrale $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$ è uniforme.

Considerazioni analoghe valgono per l'antitrasformata di Fourier.

La trasformata e l'antitrasformata di Fourier, nel contesto, vengono a volte indicate come segue:

$$(II.3.13) \quad S(f) = \mathbf{F} \{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$(II.3.14) \quad s(t) = \mathbf{F}^{-1} \{S(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

la trasformata di Fourier di un segnale è, in generale una funzione complessa. Essa pertanto può essere rappresentata in una delle due forme seguenti:

$$(II.3.15) \quad S(f) = S_R(f) + jS_I(f) = |S(f)| e^{j\vartheta(f)}$$

I diagrammi che riportano gli andamenti di $|S(f)|$ e $\vartheta(f)$ in funzione della frequenza prendono il nome di *spettri di ampiezza e di fase* del segnale $s(t)$.

Esempio E.II.2

- *Impulso rettangolare.*

$$\mathbf{F} \left\{ \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = T \text{sinc}(fT)$$

- *Impulso esponenziale.*

$$\mathbf{F} \left\{ u(t) e^{-\frac{t}{T}} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-\frac{t}{T}} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{T} + j2\pi f)t} dt = \frac{T}{1 + j2\pi fT}$$

- *Impulso cisoidale tempo limitato.*

$$\mathbf{F} \left\{ \text{rect} \left(\frac{t}{T} \right) e^{j2\pi \frac{t}{T}} \right\} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j2\pi (\frac{1}{T} - f)t} dt = T \text{sinc}(1 - fT)$$

II.4 – Proprietà della trasformata di Fourier.

In quel che segue sono dedotte talune fondamentali proprietà della trasforma di Fourier di un segnale.

- **Proprietà 1. Segnali reali.**

Se $s(t)$ è reale dalla condizione $s(t) = s^*(t)$ discende;

$$(II.4.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df = \left(\int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} S^*(f) e^{-j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} S^*(-f) e^{j2\pi ft} df$$

dove si è operata la trasformazione $f \rightarrow -f$. Dalla precedente si deduce

$$(II.4.2) \quad S(f) = S^*(-f)$$

che comporta che

$$(II.4.3) \quad \begin{aligned} |S(-f)| &= |S(f)| \\ \vartheta(-f) &= -\vartheta(f) \end{aligned}$$

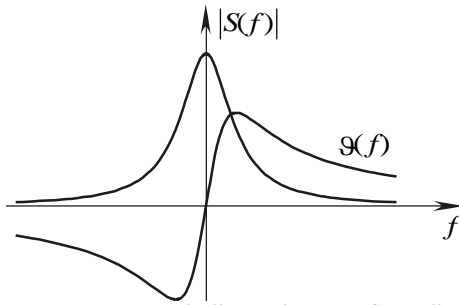


Fig. II.2 - Spettri di ampiezza e fase di un segnale reale.

e cioè gli spettri di ampiezza e di fase sono funzioni rispettivamente pari e dispari della frequenza come è indicato schematicamente in Fig. II.2.

• **Proprietà 2. Linearità.**

Dalla (II.3.13) si ha ovviamente:

$$(II.4.4) \quad \mathbf{F} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i s_i(t) \right\} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{F} \{ s_i(t) \}$$

e reciprocamente, dalla (II.3.14) si ottiene:

$$(II.4.5) \quad \mathbf{F}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i S_i(f) \right\} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{F}^{-1} \{ S_i(f) \}$$

• **Proprietà 3. Area del segnale.**

Ponendo $f = 0$ nella (II.3.13) si ha:

$$(II.4.6) \quad S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt$$

• **Proprietà 4. Area della trasformata.**

Ponendo $t = 0$ nella (II.3.14) si ha:

$$(II.4.7) \quad s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df$$

• **Proprietà 5. Simmetria.**

Cambiando t in $-t$ nella (II.3.14) si ha:

$$(II.4.8) \quad s(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{-j2\pi ft} df$$

che, operando la sostituzione $t \rightarrow f$ e $f \rightarrow t$ si muta nella:

$$(II.4.9) \quad s(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathbf{F} \{ S(t) \}$$

• **Proprietà 6. Segnale coniugato.**

Risulta:

$$(II.4.10) \quad \mathbf{F} \{ s^*(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) e^{-j2\pi ft} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j2\pi ft} dt \right]^* = S^*(-f)$$

• **Proprietà 7. Trasformata coniugata.**

Si ha:

$$(II.4.11) \quad \mathbf{F}^{-1} \{ S^*(f) \} = \int_{-\infty}^{\infty} S^*(f) e^{j2\pi ft} df = \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{-j2\pi ft} df \right]^* = s^*(-t)$$

• **Proprietà 8. Traslazione nel dominio del tempo.**

È:

$$(II.4.12) \quad \mathbf{F} \{ s(t-t_0) \} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_0) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = e^{-j2\pi ft_0} S(f)$$

dove si è introdotto il seguente cambiamento di variabili $\tau = t - t_0$.

• **Proprietà 9. Traslazione nel dominio della frequenza.**

È:

$$(II.4.13) \quad \mathbf{F}^{-1} \{ S(f-f_0) \} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f-f_0) e^{j2\pi ft} df = e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} S(\varphi) e^{j2\pi \varphi t} d\varphi = e^{j2\pi f_0 t} s(t)$$

avendo posto $\varphi = f - f_0$.

• **Proprietà 10. Cambiamento di scala.**

Si ha, per $a > 0$:

$$(II.4.14) \quad \mathbf{F} \{s(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(at)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)e^{-j2\pi \frac{f}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} S\left(\frac{f}{a}\right)$$

avendo posto $\tau = at$. In modo analogo risulta, per $a < 0$:

$$(II.4.15) \quad \mathbf{F} \{s(at)\} = -\frac{1}{a} S\left(\frac{f}{a}\right)$$

e quindi in generale:

$$(II.4.16) \quad \mathbf{F} \{s(at)\} = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right)$$

• **Proprietà 11. Derivazione nel dominio del tempo.**

Derivando n volte la (II.3.14) rispetto al tempo e supponendo che il segnale derivato $s^{(n)}(t)$ sia continuo ed ad energia finita, si ha:

$$(II.4.17) \quad \frac{d^n s(t)}{dt^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (j2\pi f)^n S(f)e^{j2\pi ft} df = \mathbf{F}^{-1} \{ (j2\pi f)^n S(f) \}$$

• **Proprietà 12. Derivazione nel dominio della frequenza.**

Derivando n volte la (II.3.13) rispetto alla frequenza e supponendo che il segnale derivato $S^{(n)}(f)$ sia continuo ed ad energia finita, si ha:

$$(II.4.18) \quad \frac{d^n S(f)}{df^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (-j2\pi t)^n s(t)e^{-j2\pi ft} dt = \mathbf{F} \{ (-j2\pi t)^n s(t) \}$$

• **Proprietà 13. Integrazione nel dominio del tempo.**

Si ha:

$$(II.4.19) \quad \mathbf{F} \left\{ \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right] e^{-j2\pi ft} dt$$

che, integrato per parti fornisce:

$$(II.4.20) \quad \begin{aligned} \mathbf{F} \left\{ \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right\} &= \frac{1}{-j2\pi f} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right] d \left(e^{-j2\pi ft} \right) = \\ &= \frac{1}{-j2\pi f} \left\{ e^{-j2\pi ft} \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \right\} \end{aligned}$$

Se si suppone che è $\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt \equiv S(0) = 0$, la precedente diviene:

$$(II.4.21) \quad \mathbf{F} \left\{ \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right\} = \frac{S(f)}{j2\pi f}$$

• **Proprietà 14. Integrazione nel dominio della frequenza.**

In modo analogo può dimostrarsi che se è $\int_{-\infty}^{\infty} S(f) df \equiv s(0) = 0$, è

$$(II.4.22) \quad \mathbf{F}^{-1} \left\{ \int_{-\infty}^f S(\varphi) d\varphi \right\} = -\frac{s(t)}{j2\pi t}$$

• **Proprietà 15. Convoluzione nel dominio del tempo.**

La trasformata di Fourier della convoluzione vale:

$$(II.4.23) \quad \mathbf{F} \{ \phi(t) \} = \mathbf{F} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau \right] dt$$

che, invertendo l'ordine di integrazione e tenendo successivamente conto della proprietà 7, è:

$$(II.4.24) \quad \mathbf{F} \{ \phi(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt \right] d\tau = \mathbf{F} \{ s_2(t) \} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right]$$

e cioè:

$$(II.4.25) \quad \mathbf{F} \{ \phi(t) \} = \mathbf{F} \{ s_1(t) \} \cdot \mathbf{F} \{ s_2(t) \}$$

In altre parole la trasformata della convoluzione di due segnali è uguale al prodotto delle loro trasformate.

• **Proprietà 16. Convoluzione nel dominio della frequenza.**

In modo analogo si può dimostrare che se:

$$(II.4.26) \quad \Phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\varphi) S_2(f - \varphi) d\varphi$$

denota la convoluzione tra $S_1(f)$ e $S_2(f)$, l'antitrasformata di $\Phi(f)$ vale:

$$(II.4.27) \quad \phi(t) = s_1(t) \cdot s_2(t)$$

Il prodotto di due segnali ha come trasformata la convoluzione delle trasformate dei segnali componenti.

Le proprietà della trasformata di Fourier, sopra definite, sono riportate nella seguente Tabella III.1.

Tabella II.1 – Proprietà della trasformata di Fourier

Proprietà	Segnale	Trasformata	Note
Linearità	$\sum_{i=1}^n a_i s_i(t)$	$\sum_{i=1}^n a_i S_i(f)$	a_i costanti
Area del segnale	$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt$	$S(0)$	
Area della trasformata	$s(0)$	$\int_{-\infty}^{\infty} S(f) df$	
Simmetria	$S(t)$	$s(-f)$	
Segnale coniugato	$s^*(t)$	$S^*(-f)$	
Trasformata coniugata	$s^*(-t)$	$S^*(f)$	
Traslazione nel dominio del tempo	$s(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0} S(f)$	t_0 qualsiasi
Traslazione nel dominio della frequenza	$e^{j2\pi f_0 t} s(t)$	$S(f - f_0)$	f_0 qualsiasi
Cambiamento di scala	$s(at)$	$\frac{1}{ a } S\left(\frac{f}{a}\right)$	$a \neq 0$
Derivazione nel dominio del tempo	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n S(f)$	
Derivazione nel dominio della frequenza	$(-j2\pi t)^n s(t)$	$\frac{d^n S(f)}{df^n}$	
Integrazione nel dominio del tempo	$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$	$\frac{S(f)}{j2\pi f}$	$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = S(0) = 0$
Integrazione nel dominio della frequenza	$\int_{-\infty}^f S(\varphi) d\varphi$	$-\frac{s(t)}{j2\pi t}$	$\int_{-\infty}^{\infty} S(f) df \equiv s(0) = 0$
Convoluzione nel dominio del tempo	$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau$ $\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - \tau) s_2(\tau) d\tau$	$S_1(f) \cdot S_2(f)$	
Convoluzione nel dominio della frequenza	$s_1(t) \cdot s_2(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} S_1(\varphi) S_2(f - \varphi) d\varphi$ $\int_{-\infty}^{\infty} S_1(f - \varphi) S_2(\varphi) d\varphi$	

Esempio E.II.3

- *Segnale sinc.*
Applicando all'Esempio E.II.2 la proprietà 4, si ha:

$$F \{ \text{sinc}(Bt) \} = \frac{1}{B} \text{rect} \left(-\frac{f}{B} \right) = \frac{1}{B} \text{rect} \left(\frac{f}{B} \right)$$

- *Impulso gaussiano.*
Sia

$$s(t) = e^{-at^2}$$

un impulso gaussiano. Derivando il segnale $s(t)$ si ha:

$$(*) \quad \frac{ds(t)}{dt} = -2at \cdot e^{-at^2} = -2at \cdot s(t)$$

dalla quale, tenendo presente le proprietà 10 e 11, si deduce:

$$\frac{dS(f)}{df} = -2\pi^2 \frac{f}{a} \cdot S(f)$$

La trasformata di Fourier $S(f)$ obbedisce ad un'equazione differenziale dello stesso tipo di quella (*) soddisfatta dal segnale $s(t)$, solo che in tal caso, la costante che compare nell'equazione dovrà essere sostituita con π^2/a . È pertanto:

$$S(f) = k e^{-\frac{\pi^2}{a} f^2}$$

dove la costante k può determinarsi utilizzando la proprietà dell'area del segnale. Dalla condizione $S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt$, utilizzando la formula $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, si ha:

$$S(f) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a} f^2}$$

II.5 – Trasformate e antitrasformate di Fourier particolari.

II.5.1 - Trasformata della delta di Dirac

Tenendo presente la proprietà (5.1) dell'Introduzione, la trasformata della delta di Dirac vale

$$(II.5.2) \quad F \{ \delta(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = 1$$

II.5.2 - Antitrasformata della delta di Dirac

Risulta:

$$(II.5.3) \quad F^{-1} \{ \delta(f) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} dt = 1$$

e cioè:

$$(II.5.4) \quad F \{ 1 \} = \delta(f)$$

II.5.3 - Trasformata della delta di Dirac traslata

Si ha:

$$(II.5.5) \quad F \{ \delta(t \pm t_0) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t \pm t_0) e^{-j2\pi ft} dt = e^{\pm j2\pi ft_0}$$

II.5.4 - Antitrasformata della delta di Dirac traslata

Si ha:

$$(II.5.6) \quad F^{-1} \{ \delta(f \pm f_0) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f \pm f_0) e^{j2\pi ft} dt = e^{\mp j2\pi f_0 t}$$

e cioè

$$(II.5.7) \quad F \{ e^{\pm j2\pi f_0 t} \} = \delta(f \mp f_0)$$

II.5.5 - Trasformate dei segnali sinusoidali.

Per le formule di Eulero si può scrivere:

$$(II.5.8) \quad \begin{aligned} \cos(2\pi f_0 t) &= \frac{1}{2} (e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) \\ \sin(2\pi f_0 t) &= \frac{1}{2j} (e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}) \end{aligned}$$

che, trasformate secondo Fourier e tenendo conto della (II.5.7), forniscono:

$$(II.5.9) \quad \begin{aligned} F \{ \cos(2\pi f_0 t) \} &= \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \\ F \{ \sin(2\pi f_0 t) \} &= \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \end{aligned}$$

II.5.6 - Trasformata di un segnale periodico.

Sulla base dei precedenti risultati è facile dedurre che la trasformata di un segnale periodico di periodo T_0

$$(II.5.10) \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}$$

vale:

$$(II.5.11) \quad F \{ s(t) \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \delta \left(f - \frac{n}{T_0} \right)$$

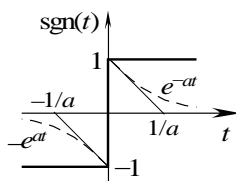
II.5.7 - Trasformata della funzione segno.

Sia (v Fig. II.3)

$$(II.5.12) \quad \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

la cosiddetta *funzione segno*. Essa è una funzione a potenza finita essendo $P = 1$.

Per calcolare la sua trasformata di Fourier è conveniente partire dalla funzione



$$(II.5.13) \quad \phi_a(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ -e^{at} & t < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$

rappresentata in tratteggio nella stessa Fig. II.3. Si ha:

$$(II.5.14) \quad \text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \phi_a(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

Fig. II.3 – Funzione segno

Di conseguenza risulta

$$(II.5.15) \quad F \{ \text{sgn}(t) \} = \lim_{a \rightarrow 0} F \{ \phi_a(t) \} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a + j2\pi f} - \frac{1}{a - j2\pi f} \right]$$

Quindi è per $f \neq 0$:

$$(II.5.16) \quad F \{ \text{sgn}(t) \} = \frac{1}{j\pi f}$$

mentre, per $f = 0$, sulla base della proprietà 3 è:

$$(II.5.17) \quad [F \{ \text{sgn}(t) \}]_{f=0} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \text{sgn}(t) dt = 0$$

e quindi

$$(II.5.18) \quad F \{ \text{sgn}(t) \} = \begin{cases} \frac{1}{j\pi f} & f \neq 0 \\ 0 & f = 0 \end{cases}$$

che, ricordando la proprietà della funzione generalizzata $\text{Pf}(f^{-1})$:

$$(II.5.19) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) \text{Pf}(f^{-1}) df = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) f^{-1} \Phi(f) df$$

valida per ogni funzione $\Phi(f)$ non infinitesima nell'origine, si può rappresentare nel modo seguente:

$$(II.5.20) \quad F \{ \text{sgn}(t) \} = \text{Pf} \left(\frac{1}{j\pi f} \right)$$

II.5.8 - Trasformata del gradino unitario.

Poichè si ha, com'è facile riconoscere:

$$(II.5.21) \quad u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

risulta, ricordando le (II.5.3) e (II.5.16):

$$(II.5.22) \quad F \{ u(t) \} = \frac{1}{2} \delta(f) + \text{Pf} \left(\frac{1}{j2\pi f} \right)$$

Nella Tabella II.2 sono riportate le trasformate (antitrasformate) fin qui considerate.

Tabella II.2 – Trasformate di Fourier notevoli.

Funzione	Trasformata
$\delta(t)$	1
$\delta(t \pm t_0)$	$e^{\pm j2\pi f t_0}$
1	$\delta(f)$
$e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$\delta(f \mp f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j2\pi n \frac{t}{T_0}}$	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$
$\text{sgn}(t)$	$\text{Pf} \left(\frac{1}{j\pi f} \right)$
$u(t)$	$\frac{1}{2} \delta(f) + \text{Pf} \left(\frac{1}{j2\pi f} \right)$

II.6 - Valutazione della trasformata di Fourier.

Per la valutazione della trasformata di Fourier è molto spesso utile, ricorrere alla derivata del segnale come qui di seguito mostrato. Infatti detta $s'(t)$ la derivata del segnale $s(t)$, si può scrivere:

$$(II.6.1) \quad s(t) = \int_{-\infty}^t s'(\tau) d\tau + s(-\infty)$$

che, introducendo il gradino unitario, può assumere la forma di convoluzione:

$$(II.6.2) \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s'(\tau) u(t - \tau) d\tau + s(-\infty) = s' * u + s(-\infty)$$

Facendo uso della proprietà 15, si ha:

$$(II.6.3) \quad F \{ s(t) \} = F \{ s'(t) \} \left[\frac{1}{2} \delta(f) + \text{Pf} \left(\frac{1}{j2\pi f} \right) \right] + s(-\infty) \delta(f)$$

Tenendo conto infine della proprietà della delta di Dirac secondo la quale l'espressione $f(t)\delta(t)$ equivale alla $f(0)\delta(t)$, si deduce:

$$(II.6.4) \quad \mathbf{F}\{s(t)\} = \frac{1}{2}[\mathbf{F}\{s'(t)\}]_{f=0} \delta(f) + \mathbf{F}\{s'(t)\} \cdot \text{Pf}\left(\frac{1}{j2\pi f}\right) + s(-\infty)\delta(f)$$

Poiché risulta, per la proprietà 3:

$$(II.6.5) \quad [\mathbf{F}\{s'(t)\}]_{f=0} = \int_{-\infty}^{\infty} s'(t)dt = s(+\infty) - s(-\infty)$$

si ha:

$$(II.6.6) \quad \mathbf{F}\{s(t)\} = \frac{1}{2}[s(+\infty) - s(-\infty)]\delta(f) + \mathbf{F}\{s'(t)\} \cdot \text{Pf}\left(\frac{1}{j2\pi f}\right)$$

che consente di calcolare la trasformata di Fourier di un segnale a partire dalla trasformata di Fourier del segnale derivato. La regola (II.6.6) allora costituisce una naturale estensione della proprietà 13 nel caso in cui è $S(0) \neq 0$.

Esempio E.II.4

La trasformata di Fourier del rettangolo unitario

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

si calcola facilmente osservando che, essendo $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$ è:

$$s'(t) = \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

da cui, tenendo conto della proprietà 8 e della (II.5.2), è:

$$\mathbf{F}\{s'(t)\} = e^{j2\pi f \frac{T}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = 2j \sin(\pi f T)$$

e quindi, applicando la (II.6.6):

$$\mathbf{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\right\} = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{sinc}(fT)$$

Si noti che si può scrivere $\mathbf{F}\{s'(t)\} \cdot \text{Pf}\left(\frac{1}{j2\pi f}\right) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$ essendo la funzione $\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$ continua in $f = 0$.