Capitolo III

SEGNALI A TEMPO DISCRETO

III.1 – Segnali periodici.

Un segnale $s(nT)$ si dice periodico se esistono interi positivi N tali che, per ogni n, si abbia:

(III.1.1) $$s(nT) = s(nT + NT) \qquad \forall n$$

Come nel caso di segnali a tempo continui, se NT è una soluzione della (III.1.1) tutti i suoi multipli soddisfano la (III.1.1). Detto N_0T il minimo valore positivo delle soluzioni della (III.1.1), la quantità $T_0 = N_0T$ si dice ***periodo fondamentale*** o più semplicemente ***periodo*** del segnale $s(nT)$.

Un segnale periodico è un segnale a potenza finita. Infatti la sua potenza specifica vale:

(III.1.2) $$P = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left|s(nT)\right|^2 = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2(kN_0+m)+1}\sum_{n=-(kN_0+m)}^{kN_0+m}\left|s(nT)\right|^2$$

dove si è posto $N = kN_0 + m$ con $m < N_0$.

Dalla precedente si ottiene:

(III.1.3) $$P = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2(kN_0+m)+1}\left\{\sum_{n=-(kN_0+m)}^{-kN_0}\left|s(nT)\right|^2 + \sum_{n=-kN_0}^{kN_0}\left|s(nT)\right|^2 + \sum_{n=kN_0}^{kN_0+m}\left|s(nT)\right|^2\right\}$$

Poiché, per ogni valore di k le sommatorie estreme della precedente si mantengono limitate ed inoltre, a motivo della periodicità del segnale:

(III.1.4) $$\sum_{n=-kN_0}^{kN_0}\left|s(nT)\right|^2 = \sum_{n=-kN_0}^{-1}\left|s(nT)\right|^2 + \left|s(0)\right|^2 + \sum_{n=1}^{kN_0}\left|s(nT)\right|^2 = \left|s(0)\right|^2 + 2k\sum_{n=1}^{N_0}\left|s(nT)\right|^2$$

risulta:

(III.1.5) $$P = \frac{1}{N_0}\sum_{n=1}^{N_0}\left|s(nT)\right|^2$$

III.2 – Rappresentazione dei segnali periodici nel dominio della frequenza.

Un segnale periodico $s(nT)$ di periodo N_0 è univocamente determinato da una N_0-pla ordinata di numeri complessi $s(nT)$. Esso può essere rappresentato nella forma:

(III.2.1) $$s(nT) = \sum_{m=1}^{N_0} S_m e^{j2\pi\frac{mn}{N_0}} \qquad n = 1, 2, \ldots, N_0$$

in termini di N_0 quantità complesse S_m. Ciò equivale ad istituire una corrispondenza biunivoca tra i valori $s(nT)$ del segnale e le quantità complesse S_m una volta che si riesce ad invertire le (III.2.1). A tal proposito se si moltiplica la precedente per $e^{-j2\pi\frac{mn}{N_0}}$ e si somma rispetto a n, si ottiene:

(III.2.2) $$\sum_{n=1}^{N_0} s(nT)e^{-j2\pi\frac{mn}{N_0}} = \sum_{n=1}^{N_0}\left\{\sum_{k=1}^{N_0} S_k e^{j2\pi\frac{kn}{N_0}}\right\}e^{-j2\pi\frac{mn}{N_0}} = \sum_{n=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{N_0} S_k e^{j2\pi\frac{(k-m)n}{N_0}} = \sum_{k=1}^{N_0} S_k \sum_{n=1}^{N_0} e^{j2\pi\frac{(k-m)n}{N_0}}$$

dove nell'ultima eguaglianza si è invertito l'ordine delle sommatorie. Si noti che l'ultima sommatoria che compare nell'ultimo termine della precedente può essere scritta nella forma di una progressione geometrica di ragione $e^{j2\pi\frac{k-m}{N_0}}$. Si ha:

(III.2.3) $$\sum_{n=1}^{N_0} e^{j2\pi\frac{(k-m)n}{N_0}} = e^{j2\pi\frac{k-m}{N_0}}\sum_{n=1}^{N_0}\left(e^{j2\pi\frac{k-m}{N_0}}\right)^{n-1} = e^{j2\pi\frac{k-m}{N_0}}\sum_{n=0}^{N_0-1}\left(e^{j2\pi\frac{k-m}{N_0}}\right)^{n} = e^{j2\pi\frac{k-m}{N_0}}\frac{e^{j2\pi(k-m)}-1}{e^{j2\pi\frac{k-m}{N_0}}-1} = \begin{cases}0 & m \neq k\\ N_0 & m = k\end{cases}$$

È quindi:

(III.2.4) $$S_m = \frac{1}{N_0}\sum_{n=1}^{N_0} s(nT)e^{-j2\pi\frac{mn}{N_0}} \qquad m = 1, 2, \ldots, N_0$$

che costituisce la formula inversa della (III.2.1).

La (III.2.1) ricorda l'espansione in serie di Fourier di un segnale periodico a tempo continuo. Tuttavia, nel caso di segnale a tempo continuo l'espansione in serie contiene un'infinità numerabile di funzioni esponenziali del tipo $\exp\left(j2\pi n\frac{t}{T_0}\right)$, mentre nella (III.2.1) sono presenti solo un numero limitato di esponenziali $\exp\left(j2\pi m\frac{n}{N_0}\right)$.

È da osservare infine che la (III.2.4), se la si estende a tutti i valori di $m \in \boldsymbol{Z}$, genera una sequenza a valori complessi periodica di periodo N_0. Infatti è:

(III.2.5) $$S_{m+kN_0} = \frac{1}{N_0}\sum_{m=1}^{N_0} s_m e^{-j2\pi\frac{(m+kN_0)n}{N_0}} = \frac{1}{N_0}\sum_{m=1}^{N_0} s_m e^{-j2\pi\frac{mn}{N_0}} = S_m$$

A causa della periodicità di $s(nT)$ e S_m e dei fattori $\exp\left(\pm j2\pi m\frac{n}{N_0}\right)$ rispetto ad entrambi gli indici m e n, le somme che compaiono nelle (III.2.1) e (III.2.4) possono partire da un indice qualsiasi purché contengano un numero di termini ari a N_0.

Si noti che, come nel caso di segnali a tempo continuo, se il segnale $s(nT)$ è reale, i coefficienti S_m godono della seguente proprietà di simmetria (*simmetria hermitiana*)

(III.2.6) $$S_{-m} = S_m^*$$

III.3 – Rappresentazione dei segnali aperiodici nel dominio della frequenza.

Sia $s(nT)$ un segnale aperiodico ad energia finita. Ad esso, per un assegnato valore di N, si può associare il segnale troncato $s_N(nT)$ definito dalla:

(III.3.1) $$s_N(nT) = \begin{cases}s(nT) & n = -\frac{N}{2},\ldots,\frac{N}{2}-1\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

ed il segnale $\tilde{s}_N(nT)$ ottenuto ripetendo periodicamente, con periodicità NT, il segnale $s(nT)$

(III.3.2) $$\tilde{s}_N(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_N(nT - kNT)$$

Poiché $\tilde{s}_N(nT)$ è periodico può essere espanso com'è indicato nella (III.2.1) e si ottiene:

(III.3.3) $$\tilde{s}_N(nT) = \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{S}_{N_m} e^{j2\pi\frac{mn}{N}} \qquad n = -\frac{N}{2},\ldots,\frac{N}{2}-1$$

dove:

(III.3.4) $$\tilde{S}_{N_m} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{s}_N(nT) e^{-j2\pi\frac{mn}{N}} \qquad m = -\tfrac{N}{2}, \dots, \tfrac{N}{2}-1$$

È evidente che al tendere di N ad ∞ il segnale $\tilde{s}_N(nT)$ tende a $s(nT)$. Per effettuare tale passaggio al limite nella (III.3.4) basta osservare che gli esponenziali $e^{-j2\pi\frac{m}{N}} = e^{-j2\pi\frac{m}{NT}T}$, individuano le radici N-esime dell'unità e pertanto giacciono sul cerchio unitario con centro nell'origine del piano complesso. Al crescere di N, detti punti tendono a ricoprire completamente la circonferenza cosicché, al limite, la quantità $\frac{m}{NT}$ prende il significato di una variabile continua (omogenea alla frequenza) denominata f e $\frac{1}{NT}$ rappresenta il corrispondente incremento df. Ponendo allora al limite $\frac{m}{NT} \to f$ e $\frac{1}{NT} \to df$ la quantità $N\tilde{S}_{N_m}$ tende alla seguente funzione di f

(III.3.5) $$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) e^{-j2\pi nfT}$$

e passando al limite la (III.3.3) scritta nella forma

(III.3.6) $$\tilde{s}_N(nT) = T \frac{1}{NT} \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} N\tilde{S}_{N_m} e^{j2\pi\frac{mn}{N}} \qquad n = -\tfrac{N}{2}, \dots, \tfrac{N}{2}-1$$

si ottiene:

(III.3.7) $$s(nT) = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S(f) e^{j2\pi nfT} df$$

È da osservare che poiché è:

(III.3.8) $$|S(f)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(nT)|$$

si deduce che la somma a secondo membro della (III.3.5) è uniformemente convergente se si ha:

(III.3.9) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(nT)| < \infty$$

Se tale condizione è soddisfatta la convergenza della sommatoria che compare nella (III.3.5) è da intendersi nel senso della media quadratica.

Le (III.3.5) e (III.3.7) costituiscono le espressioni della ***trasformata*** e ***antitrasformata di Fourier*** rispettivamente di un segnale tempo discreto e di energia finita.

Normalizzando il quanto temporale e cioè ponendo $T = 1$, il segnale a tempo discreto può essere rappresentato nella forma di una sequenza numerica $s[n]$. Le (III.3.5) e (III.3.7), ponendo $\varphi = fT$, diventano:

(III.3.10) $$S(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j2\pi n\varphi}$$

(III.3.11) $$s[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(f) e^{j2\pi n\varphi} d\varphi$$

che costituiscono la trasformata ed antitrasformata di Fourier di una sequenza $s[n]$.

Si osservi che, a differenza dei segnali a tempo continuo, la trasformata di Fourier $S(\varphi)$ di sequenze aperiodiche è periodica in φ di periodo 1. Infatti risulta:

(III.3.12) $$S(\varphi + k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j2\pi n(\varphi+k)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j2\pi n\varphi} = S(\varphi)$$

Ciò comporta che l'integrale che compare nella (III.3.11) può essere esteso ad un qualsiasi intervallo purché di ampiezza unitaria.

È evidente che, come nel caso di segnali a tempo continuo, la trasformata di Fourier di una sequenza reale gode della proprietà di simmetria hermitiana e cioè:

(III.3.13) $$S(-\varphi) = S^*(\varphi)$$

Infatti è:

(III.3.14) $$S(-\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{j2\pi n\varphi} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j2\pi n\varphi}\right]^* = S^*(\varphi)$$

III.4 – Proprietà della trasformate di Fourier di sequenze aperiodiche.

Le proprietà delle trasformate di Fourier di sequenze aperiodiche sono riassunte nella Tabella III.1. Per esse è omessa la dimostrazione essendo questa del tutto analoga a quella già incontrata a proposito della trasformata di Fourier dei segnali a tempo continuo.

Tabella III.1 – Proprietà della trasformata di Fourier di sequenze aperiodiche.

Proprietà	Segnale	Trasformata	Note
Linearità	$\sum_{i=1}^{k} a_i s_i[n]$	$\sum_{i=1}^{k} a_i S_i(\varphi)$	a_i costanti
Sequenza coniugata	$s^*[n]$	$S^*(-\varphi)$	
Trasformata coniugata	$s^*[-n]$	$S^*(\varphi)$	
Traslazione in n	$s[n-n_0]$	$e^{-j2\pi n_0\varphi} S(\varphi)$	n_0 intero
Traslazione in φ	$e^{j2\pi\varphi_0 n} s[n]$	$S(\varphi-\varphi_0)$	
Differenza in avanti	$s[n+1]-s[n]$	$\left[e^{j2\pi\varphi}-1\right] S(\varphi)$	
Differenza all'indietro	$s[n]-s[n-1]$	$\left[1-e^{-j2\pi\varphi}\right] S(\varphi)$	
Derivazione in φ	$(-j2\pi n)^k s[n]$	$\dfrac{d^k S(\varphi)}{d\varphi^k}$	
Convoluzione in n	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1[k] s_2[n-k]$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1[n-k] s_2[k]$	$S_1(\varphi)\cdot S_2(\varphi)$	
Convoluzione in φ	$s_1[n]\cdot s_2[n]$	$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_1(\vartheta) S_2(\varphi-\vartheta) d\vartheta$ $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_1(\varphi-\vartheta) S_2(\vartheta) d\vartheta$	

Si noti solo che nel campo delle sequenze l'operazione di derivazione è sostituita dall'operazione differenza, che si distingue in *differenza in avanti* (forward difference)

(III.4.1) $$\Delta s[n] = s[n+1] - s[n]$$

e *differenza all'indietro* (backward difference)

(III.4.2) $$\nabla s[n] = s[n] - s[n-1]$$

III.5 - La trasformata zeta.

Per lo studio dei segnali a tempo discreto o delle sequenze numeriche risulta talvolta più conveniente ricorrere alla cosiddetta trasformata zeta.

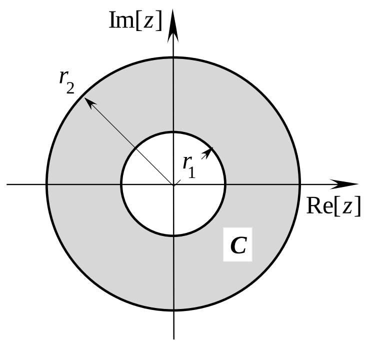

Fig. III.1 – Regione di convergenza

Se $s[n]$ denota una sequenza numerica ad energia finita, la sua trasformata zeta è definita dalla:

(III.5.1)
$$S(z) = \boldsymbol{Z}\left\{s[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]z^{-n}$$

dove z denota una variabile complessa.

È da precisare che la serie a secondo membro della (III.5.1) converge, in generale, quando z è contenuto in una regione anulare $\boldsymbol{C} \equiv \left\{r_1 < |z| < r_2\right\}$ avente centro nell'origine del piano complesso e caratterizzata dai raggi r_1 e r_2, con $r_1 \geq 0$ e $r_2 \leq \infty$ (v. Fig. III.1).

III.6 – Sequenze causali ed anticausali.

Una sequenza si dice **causale** se è

(III.6.1)
$$s[n] \equiv 0 \quad n < 0$$

La sua trasformata zeta vale:

(III.6.2)
$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s[n]z^{-n}$$

Si supponga che la serie a secondo membro della precedente sia assolutamente convergente nel punto $z = z_0$ e cioè si abbia $\sum_{n=0}^{\infty}\left|s[n]z_0^{-n}\right| < \infty$. Per tutti i valori di z tali che $|z| > |z_0|$ è $|z|^{-n} < |z_0|^{-n}$ per cui è

(III.6.3)
$$|S(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left|s[n]z^{-n}\right| < \sum_{n=0}^{\infty}\left|s[n]z_0^{-n}\right| < \infty$$

dalla quale si deduce che la trasformata zeta di una sequenza causale esiste nella regione esterna alla circonferenza di raggio $|z_0|$. La regione di convergenza di una sequenza causale contiene allora il punto $z \to \infty$.

Viceversa si può dimostrare, in modo analogo, che una sequenza **anticausale**, tale che:

(III.6.4)
$$s[n] \equiv 0 \quad n > 0$$

è caratterizzata da una regione di convergenza che contiene il punto $z = 0$.

Quando la regione di convergenza è data da una regione anulare, la corrispondente sequenza è costituita dalla somma di una componente causale e di una componente anticausale.

Esempio E.III.1

Per comprendere come l'espressione dell'antitrasformata zeta può dipendere dalla regione di convergenza, si calcoli l'antitrasformata della:

(a)
$$S(z) = \frac{z}{z-a}$$

supponendo che le regioni di convergenza siano:a) $|z| > |a|$ e b) $|z| < |a|$.

Nel caso a) è $\left|\frac{a}{z}\right|<1$; per cui dividendo numeratore e denominatore della (a) per z, si ha:

$$S(z)=\frac{1}{1-\frac{a}{z}}$$

che può essere identificata come la somma di una serie armonica di ragione $\frac{a}{z}$. È quindi:

$$S(z)=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a^nz^{-n}$$

La trasformata inversa della (a) è

$$s[n]=a^nu[n]$$

dove $u[n]$ è la sequenza gradino unitario.

Nel caso b) è $\left|\frac{z}{a}\right|<1$; per cui dividendo numeratore e denominatore della (a) per a, si ha:

$$S(z)=-\frac{z}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{a}}$$

dalla quale, identificando $\left(1-\frac{z}{a}\right)^{-1}$ come la somma di una serie armonica di ragione $\frac{z}{a}$, si ottiene:

$$S(z)=-a^{-1}z\left(1+a^{-1}z+a^{-2}z^2+\cdots\right)=-\left(a^{-1}z+a^{-2}z^2+a^{-3}z^3+\cdots\right)=$$

$$=1-\left(1+a^{-1}z+a^{-2}z^2+a^{-3}z^3+\cdots\right)=1-\sum_{n=0}^{\infty}a^{-n}z^n$$

la cui antitrasformata zeta vale:

$$s[n]=\delta[n]-a^nu[-n]$$

essendo $\boldsymbol{Z}\{\delta[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=1$. Siccome è $s[n]=0$ la sequenza in questione inizia da $n=1$. Essa quindi, come è facile riconoscere, si può porre anche nella forma

$$s[n]=a^nu[-n-1]$$

È opportuno osservare che nel primo caso l'antitrasformata zeta dà luogo a sequenze causali mentre nel secondo caso dà luogo a sequenze anticausali.

III.7 – Proprietà della trasformata zeta.

In quel che segue sono dedotte talune fondamentali proprietà della trasforma di Fourer di un segnale.

- **Proprietà 1. Linearità.**

Sia $s[n]=\sum_{i=1}^{N}a_is_i[n]$ una combinazione lineare di n sequenze le cui trasformate zeta sono definite nelle corrispondenti regioni di convergenza $\boldsymbol{C}_i$. La trasformata zeta della sequenza $s[n]$ vale:

(III.7.1) $$\boldsymbol{Z}\{s[n]\}=\sum_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{Z}\{s_i[n]\}$$

dove la regione di convergenza della $\boldsymbol{Z}\{s[n]\}$ è data dall'intersezione $\bigcap_{i=1}^{n}\boldsymbol{C}_i$ delle regioni di convergenza delle $\boldsymbol{Z}\{s_i[n]\}$.

- **Proprietà 2. Traslazione.**

Sia $S(z)$ la trasformata zeta della sequenza $s[n]$. La trasformata zeta della sequenza traslata vale:

(III.7.2) $$\boldsymbol{Z}\left\{s[n-k]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n-k]z^{-n} = z^{-k}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n-k]z^{-(n-k)} = z^{-k}\boldsymbol{Z}\left\{s[n]\right\}$$

la regione di convergenza della sequenza traslata è la stessa della sequenza originale.

- **Proprietà 3. Coniugazione.**

La trasformata zeta della sequenza coniugata $s^*[n]$ vale:

(III.7.3) $$\boldsymbol{Z}\left\{s^*[n]\right\} = \sum_{i=1}^{n} s^*[n]z^{-n} = \left(\sum_{i=1}^{n} s[n](z^*)^{-n}\right)^* = S^*(z^*)$$

dove $S(z)$ è la trasformata zeta di $s[n]$. La regione di convergenza si identifica con la $\boldsymbol{C}(r_1,r_2)$.

- **Proprietà 4. Derivazione di S(z).**

Derivando rispetto alla variabile z la (III.5.1) si ottiene:

(III.7.4) $$\frac{dS(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n\cdot s[n]z^{-(n+1)} = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\cdot s[n]z^{-n}$$

da cui

(III.7.5) $$-z\frac{dS(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\cdot s[n]z^{-n} = \boldsymbol{Z}\left\{n\cdot s[n]\right\}$$

La regione di convergenza della $n\cdot s[n]$ rimane la $\boldsymbol{C}(r_1,r_2)$.

- **Proprietà 5. Moltiplicazione per z_0^n.**

Si ha:

(III.7.6) $$\boldsymbol{Z}\left\{z_0^n s[n]\right\} = \sum_{i=1}^{n} z_0^n s[n]z^{-n} = \sum_{i=1}^{n} s[n]\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n} = S\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

e la regione di convergenza si muta nella $\boldsymbol{C}\left(|z_0|r_1,|z_0|r_2\right)$.

- **Proprietà 6. Convoluzione.**

La trasformata zeta della convoluzione fra le sequenze $s_1[n]$ e $s_2[n]$

(III.7.7) $$s[n] = s_1 * s_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1[k]s_2[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1[n-k]s_2[k]$$

vale:

(III.7.8) $$S(z) = \boldsymbol{Z}\left\{s_1 * s_2\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1[k]s_2[n-k]\right]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[k]z^{-k}\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_2[n-k]z^{-(n-k)} = S_1(z)S_2(z)$$

Per dedurre la regione di convergenza basta osservare che poiché $\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1[k]z^{-k}$ converge in $\boldsymbol{C}_1$ e $\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_2[n]z^{-n}$ converge in $\boldsymbol{C}_2$ la regione di convergenza della $S(z)$ è $\boldsymbol{C}_1 \cap \boldsymbol{C}_2$.

Le proprietà della trasformata di Fourier, sopra definite, sono riportate nella seguente Tabella III.1.

Tabella III.1 – Proprietà della trasformata zeta

Proprietà	**Segnale**	**Trasformata**	**Regione di convergenza**
Linearità	$\sum_{i=1}^{N} a_i s_i[n]$	$\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{Z}\left\{s_i[n]\right\}$	$\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{C}_i$
Traslazione	$s[n-k]$	$z^{-k}\boldsymbol{Z}\left\{s[n]\right\}$	$\boldsymbol{C}$
Coniugazione	$s^*[n]$	$S^*(z^*)$	$\boldsymbol{C}$

Derivazione di $S(z)$	$n \cdot s[n]$	$-z\dfrac{dS(z)}{dz}$	$\boldsymbol{C}$
Moltiplicazione per z_0^k	$z_0^n s[n]$	$S\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$\boldsymbol{C}\left(\lvert z_0\rvert r_1, \lvert z_0\rvert r_2\right)$
Convoluzione	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1[k]s_2[n-k]$ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1[n-k]s_2[k]$	$S_1(z)S_2(z)$	$\boldsymbol{C}_1 \cap \boldsymbol{C}_2$

III.8 – Inversione della trasformata zeta.

Per determinare la formula d'inversione della trasformata zeta si ponga nella (III.5.1) $z = e^{\alpha + j2\pi\varphi}$ supposto z appartiene alla regione di convergenza della $S(z)$. Si ottiene:

(III.8.1) $$S\left(e^{\alpha+j2\pi\varphi}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]\left(e^{\alpha+j2\pi\varphi}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(s[n]e^{-\alpha n}\right)e^{-j2\pi n\varphi}$$

che può essere interpretata come la trasformata di Fourier della sequenza $s[n]e^{-\alpha n}$. In altri termini si ha:

(III.8.2) $$s[n]e^{-\alpha n} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S\left(e^{\alpha+j2\pi\varphi}\right)e^{j2\pi n\varphi}d\varphi$$

da cui:

(III.8.3) $$s[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S\left(e^{\alpha+j2\pi\varphi}\right)e^{(\alpha+j2\pi\varphi)n}d\varphi$$

Se si opera nella precedente la sostituzione $z = e^{\alpha+j2\pi\varphi}$ si ha $dz = \left(e^{\alpha+j2\pi\varphi}\right)j2\pi d\varphi = j2\pi z d\varphi$. Inoltre quando φ varia da $-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$ la variabile z varia da $e^{\alpha-j\pi}$ a $e^{\alpha+j\pi}$, ciò significa che la grandezza z si muove nel piano complesso descrivendo una circonferenza con centro nell'origine in senso antiorario che si suppone contenuto nella regione di convergenza della trasformata. Si ottiene allora:

(III.8.4) $$s[n] = \boldsymbol{Z}^{-1}\left\{S(z)\right\} = \frac{1}{j2\pi}\oint S(z)z^{n-1}dz$$

che costituisce la antitrasformata zeta della sequenza $s[n]$.

È opportuno osservare che se nella (III.5.1) si pone $z = e^{j2\pi\varphi}$ si ha:

(III.8.5) $$S\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]e^{-j2\pi n\varphi}$$

dalla quale si deduce che la trasformata di Fourier di una sequenza può essere ottenuta d alla trasformata zeta ponendo in essa $z = e^{j2\pi\varphi}$ purché la regione di convergenza della trasformata zeta contiene il punto $z = e^{j2\pi\varphi}$ ovvero se tale regione contiene il circolo unitario del piano complesso.

È opportuno osservare che se nella (III.5.1) si pone $z = e^{j\omega}$ si ha:

(III.8.6) $$S\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]e^{-j\omega n}$$

dalla quale si deduce che la trasformata di Fourier di una sequenza può essere ottenuta dalla trasformata zeta ponendo in essa $z = e^{j\omega}$ purché la regione di convergenza della trasformata zeta contiene il punto $z = e^{j\omega}$ ovvero se tale regione contiene il circolo unitario del piano complesso.

III.9 – Inversione di funzioni razionali fratte.

Si prenda in considerazione il caso in cui la trasformata zeta di una sequenza è data da una funzione razionale fratta e cioè espressa come rapporto fra due polinomi nella variabile z del tipo:

(III.9.1) $$S(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Queste situazioni occorrono quando ci si imbatte nello studio della risposta di sistemi lineari e tempo invarianti a parametri concentrati.

Se g_N è il grado del polinomio a numeratore, $N(z)$ conterrà g_N radici $\{z_i\}_{i=1}^{g_N}$ che costituiscono gli *zeri* della $S(z)$ perché nei punti $z = z_i$ è $S(z_i) = 0$; se g_D è il grado del polinomio a denominatore, $D(z)$ conterrà g_D radici $\{p_i\}_{i=1}^{g_D}$ che costituiscono i *poli* della $S(z)$ in quanto nei punti $z = p_i$ la $S(z)$ non è definita. Questo comporta che non possono esistere poli nella regione di convergenza della $S(z)$.

Si supponga che g_N sia inferiore al grado g_D. Secondo la natura dei poli p_i, si possono verificare due eventualità, e cioè:

a) le radici p_i sono tutte semplici;

b) alcune radici possono a vere molteplicità ≥ 2.

Se le radici sono tutte semplici, ponendo la (III.9.1) nella forma:

(III.9.2) $$S(z) = z\bar{S}(z)$$

si sviluppi $\bar{S}(z)$ in fratti semplici, come segue

(III.9.3) $$\bar{S}(z) = \sum_{i=1}^{g_D} \frac{R_i}{z - p_i}$$

dove R_i denotano i residui di $\bar{S}(z)$ in p_i dati dalle:

(III.9.4) $$R_i = \bar{S}(z)\cdot(z - p_i)\big|_{z=p_i}$$

Si ha pertanto:

(III.9.5) $$S(z) = \sum_{i=1}^{g_D} R_i \frac{z}{z - p_i}$$

Per calcolare l'antitrasformata zeta occorre tener presente la regione di convergenza della trasformata.

Se la regione di convergenza della $S(z)$ è definita dalla $|z| > r_M$ dove è $r_M = \max\left\{|p_1|, |p_2|, \cdots, |p_{g_D}|\right\}$, l'antitrasformata del generico termine della (III.9.5), essendo in $\boldsymbol{C}$, $\left|\frac{z}{p_i}\right| > 1$, può essere calcolata come segue:

(III.9.6) $$\boldsymbol{Z}^{-1}\left\{R_i \frac{z}{z - p_i}\right\} = R_i p_i^n u[n]$$

Di converso, se la regione di convergenza è definita dalla $|z| < r_m$ dove è $r_m = \min\left\{|p_1|, |p_2|, \cdots, |p_{g_D}|\right\}$, essendo in $\boldsymbol{C}$, $\left|\frac{p_j}{z}\right| > 1$, si ha:

(III.9.7) $$\boldsymbol{Z}^{-1}\left\{R_i \frac{z}{z-p_i}\right\} = R_i p_i^n u[-1-n]$$

Se la regione di convergenza è data dalla corona circolare $|p_k| < |z| < |p_{k+1}|$ contenuta tra due radici consecutive del polinomio $D(z)$, tali che $|p_k| < |p_{k+1}|$, occorre distinguere nella (III.9.5) i termini caratterizzati dalle radici $|p_i| \leq |p_k|$ e quelli caratterizzati dalle radici $|p_j| \geq |p_{k+1}|$. Per ognuno dei termini del primo tipo, quando z è contenuto in $\boldsymbol{C}$, si verifica la condizione $|z| > |p_i|$ per cui l'antitrasformata è del tipo della (III.9.6). Per ognuno dei termini del secondo tipo è verificata la condizione $|z| \leq |p_j|$ per cui l'antitrasformata è del tipo della (III.9.7).

Se il grado del numeratore non è inferiore al grado del denominatore prima di procedere allo sviluppo in fratti semplici occorre eseguire una divisione tra i polinomi a numeratore e a denominatore pervenendo così alla forma:

(III.9.8) $$S(z) = R(z) + \frac{\bar{N}(z)}{D(z)}$$

dove $R(z)$ è un polinomio di grado $g_N - g_D$ e $\bar{N}(z)$ un polinomio di grado minore di g_D.Le considerazioni sopra svolte si applicano alla frazione razionale propria $\frac{\bar{N}(z)}{D(z)}$ mentre l'antitrasformata del polinomio $R(z)$ si calcola utilizzando la proprietà della derivazione di $S(z)$.