

CARATTERIZZAZIONE ENERGETICA DEI SEGNALI

SEGNALI A TEMPO CONTINUO

Segnali a energia finita

IV.1 – Densità spettrale di energia.

Sia $s(t)$ un segnale a energia finita e a tempo continuo. L'energia specifica E ad esso associata è espressa dalla:

$$(IV.1.1) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t) dt$$

che, esprimendo $s(t)$ in termini della sua trasformata di Fourier, diventa:

$$(IV.1.2) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]^* df$$

od anche

$$(IV.1.3) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) S^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

L'energia specifica di un segnale si può ottenere anche integrando il quadrato del modulo della sua trasformata di Fourier (TEOREMA DI **PARSEVAL**).

Ciò premesso, si definisce **densità spettrale di energia** di un segnale ad energia finita la quantità:

$$(IV.1.4) \quad W(f) = |S(f)|^2 = S(f) S^*(f)$$

Essa è manifestamente una funzione reale e non negativa di f :

$$(IV.1.5) \quad W(f) \geq 0$$

e tale che il suo integrale risulta pari a E :

$$(IV.1.6) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) df$$

come risulta sostituendo la (IV.1.4) nella (IV.1.3).

Se il segnale è reale, la densità spettrale di energia è una funzione pari di f .

Infine è ovvio che risulta:

$$(IV.1.7) \quad W(f) = W(-f)$$

IV.2 – Autocorrelazione.

Se si effettua la trasformata inversa della densità spettrale si ottiene:

$$(IV.2.1) \quad \begin{aligned} \gamma(\tau) &= F^{-1} \{W(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) S^*(f) e^{j2\pi f\tau} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]^* e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) e^{j2\pi ft} dt \right] e^{j2\pi f\tau} df \end{aligned}$$

da cui, invertendo l'ordine di integrazione si ottiene:

$$(IV.2.2) \quad \gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f(t+\tau)} dt \right] df$$

che equivale a scrivere:

$$(IV.2.3) \quad \gamma(\tau) = \mathbf{F}^{-1} \{W(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) s(t+\tau) dt$$

La quantità $\gamma(\tau)$ definita dalla (IV.2.3) costituisce la **funzione di autocorrelazione** per segnali ad energia finita.

Si noti che introducendo la trasformazione di variabili $t + \tau \mapsto t$ si ha:

$$(IV.2.4) \quad \gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau) s^*(t) dt$$

La (IV.2.3) va sotto il nome di TEOREMA DI **WIENER**; essa costituisce un'importante relazione fra la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale di un segnale ad energia finita.

Dalla (IV.2.4) si ottiene:

$$(IV.2.5) \quad \gamma(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = E$$

L'autocorrelazione valutata in $\tau = 0$ fornisce l'energia del segnale.

Effettuando la trasformazione $\tau \rightarrow -\tau$ nella (IV.2.4), si ha:

$$(IV.2.6) \quad \gamma(-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau) s^*(t) dt$$

che, confrontata con la stessa (IV.2.4) dà luogo alla:

$$(IV.2.7) \quad \gamma(-\tau) = \gamma^*(\tau)$$

L'autocorrelazione è una funzione a simmetria hermitiana.

Applicando la disuguaglianza di Schwarz alla (IV.2.4) si deduce:

$$(IV.2.8) \quad \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - \tau) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |s(t + \tau)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \right]^2$$

e cioè:

$$(IV.2.9) \quad |\gamma(\tau)| \leq \gamma(0)$$

$\gamma(0)$ costituisce un massimo assoluto della $\gamma(\tau)$.

Se $s(t)$ è reale la sua autocorrelazione è reale e la (IV.2.7) si riduce alla:

$$(IV.2.10) \quad \gamma(\tau) = \gamma(-\tau)$$

L'autocorrelazione di un segnale reale è una funzione pari del suo argomento.

la proprietà dell'autocorrelazione sono riassunte nella Tabella IV.1

Tabella IV.1 – Proprietà dell'autocorrelazione per segnali ad energia finita

| Segnali complessi | Segnali reali |
|---|---|
| $\int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - \tau) dt$ | $\int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t - \tau) dt$ |
| $\int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau) s^*(t) dt$ | $\int_{-\infty}^{\infty} s(t + \tau) s(t) dt$ |
| $\gamma(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) ^2 dt$ | $\gamma(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$ |
| $\gamma^*(\tau) = \gamma(-\tau)$ | $\gamma(-\tau) = \gamma(\tau)$ |
| $ \gamma(\tau) \leq \gamma(0)$ | $ \gamma(\tau) \leq \gamma(0)$ |

IV.3 – Densità spettrali e correlazioni mutue.

IV.3.1- Densità spettrali mutue.

Le considerazioni svolte nei paragrafi precedenti possono essere estese al caso di due segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ distinti. In tal caso si introducono le **energie specifiche mutue o incrociate** E_{12} e E_{21} definite dalle:

$$(IV.3.1) \quad \begin{aligned} E_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt \\ E_{21} &= \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)s_1^*(t)dt \end{aligned}$$

Le energie incrociate sono quantità complesse. Esse non sono indipendenti giacché risulta:

$$(IV.3.2) \quad E_{12} = E_{21}^*$$

Infine, facendo uso della disuguaglianza di Schwarz, si ottiene:

$$(IV.3.3) \quad |E_{12}|, |E_{21}| = \sqrt{E_1} \cdot \sqrt{E_2}$$

dove E_1 e E_2 rappresentano le energie specifiche associate a $s_1(t)$ e $s_2(t)$ rispettivamente.

Denotando con $S_1(f)$ e $S_2(f)$ le trasformate di Fourier di $s_1(t)$ e $s_2(t)$ rispettivamente, dalla prima delle (IV.3.1) si ha:

$$(IV.3.4) \quad \begin{aligned} E_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} s_2^*(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_1(f)e^{j2\pi ft} df \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f) \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)e^{-j2\pi ft} dt \right]^* df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f)S_2^*(f)df \end{aligned}$$

Analogamente si ha:

$$(IV.3.5) \quad E_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} S_2(f)S_1^*(f)df$$

che costituiscono un'estensione del Teorema di Parseval al caso di due segnali.

Introducendo le **densità spettrali mutue o incrociate** mediante le:

$$(IV.3.6) \quad \begin{aligned} W_{12} &= S_1(f)S_2^*(f) \\ W_{21} &= S_2(f)S_1^*(f) \end{aligned}$$

le (IV.3.4) e (IV.3.5) divengono:

$$(IV.3.7) \quad \begin{aligned} E_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(f)df \\ E_{21} &= \int_{-\infty}^{\infty} W_{21}(f)df \end{aligned}$$

Le densità spettrali sono, in generale, complesse e risulta:

$$(IV.3.8) \quad W_{12}(f) = W_{21}^*(f)$$

Tuttavia, se i segnali sono reali, la precedente si semplifica nella:

$$W_{12}(f) = W_{21}(f)$$

dal momento che risulta $S_1^*(f) = S_1(-f)$ e $S_2^*(f) = S_2(-f)$.

IV.3.2- Correlazioni mutue.

Siano $s_1(t)$ e $s_2(t)$ due segnali ad energia finita. Con procedimento analogo a quello seguito per dedurre l'autocorrelazione si possono derivare, antitrasformando le corrispondenti densità spettrali, le funzioni:

$$(IV.3.9) \quad \begin{aligned} \gamma_{12}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t+\tau)s_2^*(t)dt \\ \gamma_{21}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)s_1^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t+\tau)s_1^*(t)dt \end{aligned}$$

che definiscono le funzioni di **correlazione mutue** o **incrociate**.

Si noti che $\gamma_{12}(\tau)$ e $\gamma_{21}(\tau)$ sono, in generale, complesse e soddisfano la condizione:

$$(IV.3.10) \quad \gamma_{12}(\tau) = \gamma_{21}^*(-\tau)$$

Se i segnali sono reali le funzioni $\gamma_{12}(\tau)$ e $\gamma_{21}(\tau)$ sono anch'esse reali e la precedente si semplifica nella :

$$(IV.3.11) \quad \gamma_{12}(\tau) = \gamma_{21}(-\tau)$$

Ponendo $\tau = 0$ nelle (IV.3.9) si ha:

$$(IV.3.12) \quad \begin{aligned} \gamma_{12}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt = E_{12} \\ \gamma_{21}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t)s_1^*(t)dt = E_{21} \end{aligned}$$

Applicando la disuguaglianza di Schwarz alle (IV.3.9) si ottiene:

$$(IV.3.13) \quad |\gamma_{12}(\tau)|, |\gamma_{21}(\tau)| \leq E_1 E_2$$

Se risulta $\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{21}(\tau) = 0$ i segnali si dicono **incorrelati**. In particolare per $\tau = 0$ si ottiene $\gamma_{12}(0) = \gamma_{21}(0) = 0$ che corrisponde alla condizione di ortogonalità fra i segnali. Ciò comporta che se due segnali sono incorrelati sono anche ortogonali ma non viceversa. La condizione di incorrelazione pertanto risulta più forte di quella di ortogonalità.

Segnali a potenza finita

III.4 – Densità spettrale di potenza.

Un segnale $s(t)$ tale che la quantità

$$(IV.4.1) \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt$$

risulti finita e non nulla è un segnale a potenza finita.

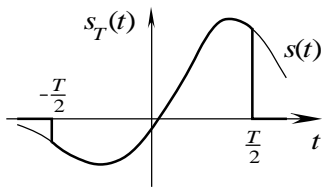


Fig.III.1 – Segnale troncato

È conveniente, in quel che segue, introdurre il segnale troncato $s_T(t)$ definito dalla (v. Fig. III.1):

$$(IV.4.2) \quad s_T(t) = s(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

In termini di $s_T(t)$ la (IV.4.1) diventa:

$$(IV.4.3) \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |s_T(t)|^2 dt$$

Per un fissato valore di T il segnale $s_T(t)$ è ad energia finita e pertanto, detta $S_T(f)$ la sua trasformata di Fourier, si può scrivere, per il teorema di Parseval:

$$(IV.4.4) \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(f)|^2 df$$

Di conseguenza si ha:

$$(IV.4.5) \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |S_T(f)|^2 df = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(f)|^2}{T} df$$

e quindi risulta immediato associare al segnale $s(t)$ la **densità spettrale di potenza**:

$$(IV.4.6) \quad W(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(f)|^2}{T}$$

La potenza specifica del segnale così diventa:

$$(IV.4.7) \quad P = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) df$$

che costituisce il TEOREMA DI **PARSEVAL** per segnali a potenza finita.

Analogamente alla densità spettrale di energia, introdotta al par. III.1, la densità spettrale di potenza è una funzione reale e non negativa della variabile f . È inoltre manifestamente:

$$(IV.4.8) \quad W(-f) = W(f)$$

Nel caso particolare di segnale periodico di periodo T_0 la potenza specifica può essere riscritta nella forma

$$(IV.4.9) \quad P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} s(t)s^*(t) dt$$

che, introducendo la (II.1.15) del Cap. II, diviene:

$$(IV.4.10) \quad P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n e^{j2\pi n f_0 t} \right] s^*(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s^*(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$$

Tenendo infine conto dell'espressione (II.1.14) del Cap. II del coefficiente S_n , si ha:

$$(IV.4.11) \quad P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n S_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^2$$

La potenza specifica di un segnale periodico può essere espressa in termini dei suoi coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier. La (IV.4.11) costituisce l'espressione del Teorema di Parseval per segnali periodici.

IV.5 – Autocorrelazione.

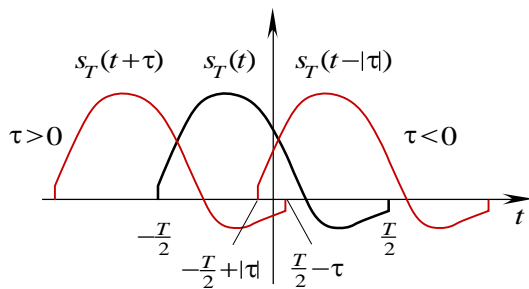


Fig. IV.2 – Segnale troncato e sue traslazioni.

L'autocorrelazione di un segnale $s(t)$ a potenza finita è definita dalla trasformata inversa della sua densità spettrale:

$$(IV.5.1) \quad \gamma(\tau) = \mathbf{F}^{-1} \{ W(f) \}$$

Per dedurre l'espressione dell'autocorrelazione basta osservare che, per la (IV.4.6), risulta:

$$(IV.5.2) \quad \gamma(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{F}^{-1} \left\{ \frac{|S_T(f)|^2}{T} \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_T(\tau)$$

essendo $\gamma_T(\tau)$ l'autocorrelazione del segnale troncato (IV.4.2):

$$(IV.5.3) \quad \gamma_T(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t) s_T^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t + \tau) s_T^*(t) dt$$

che può essere riscritta come segue (v. Fig. III.2):

$$(IV.5.4) \quad \begin{aligned} \gamma_T(\tau) &= \int_{-\frac{T}{2}+|\tau|}^{\frac{T}{2}} s^*(t) s(t - \tau) dt & \tau < 0 \\ \gamma_T(\tau) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-\tau} s^*(t) s(t - \tau) dt & \tau > 0 \end{aligned}$$

Per un fissato valore di τ la funzione $\gamma_T(\tau)$ può essere approssimata, per valori di T sufficientemente elevati, dalla:

$$(IV.5.5) \quad \gamma_T(\tau) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^*(t) s(t-\tau) dt$$

e quindi l'autocorrelazione di un segnale a potenza finita è data dalla:

$$(IV.5.6) \quad \gamma(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) s^*(t-\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t+\tau) s^*(t) dt$$

L'autocorrelazione è una funzione in generale complessa. Nel punto $\tau=0$ vale:

$$(IV.5.7) \quad \gamma(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) s^*(t) dt = P$$

e cioè si identifica con la potenza specifica del segnale.

Effettuando nella (IV.5.6) la trasformazione $\tau \rightarrow -\tau$ e successivamente la sostituzione $t-\tau = \vartheta$, si ottiene:

$$(IV.5.8) \quad \gamma(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t-\tau) s^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}-\tau} s(\vartheta) s^*(\vartheta+\tau) d\vartheta$$

Poiché è lecito, per un valore assegnato di τ , confondere $\pm \frac{T}{2} - \tau$ con $\pm \frac{T}{2}$, dalla precedente è:

$$(IV.5.9) \quad \gamma(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s^*(t+\tau) s(t) dt = \gamma^*(\tau)$$

Nel caso di segnale reale la (IV.5.9) diventa:

$$(IV.5.10) \quad \gamma(-\tau) = \gamma(\tau)$$

Tenendo conto della disuguaglianza di Schwarz si ha infine:

$$(IV.5.11) \quad |\gamma(\tau)| \leq \gamma(0) = P$$

III.6 – Densità spettrali e correlazioni mutue.

III.6.1 Densità spettrali mutue.

Se $s_1(t)$ e $s_2(t)$ denotano due segnali a potenza finita le loro **potenze specifiche mutue** o **incrociate** sono definite dalle:

$$(IV.6.1) \quad P_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t) s_2^*(t) dt$$

$$P_{21} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1^*(t) s_2(t) dt$$

Le quantità P_{12} e P_{21} sono, in generale, complesse. Esse inoltre obbediscono alla:

$$(IV.6.2) \quad P_{12} = P_{21}^*$$

Indicando con $s_{1T}(t)$ e $s_{2T}(t)$ i segnali troncati associati a $s_1(t)$ e $s_2(t)$ rispettivamente è facile riconoscere che le potenze mutue si possono porre nella forma seguente:

$$(IV.6.3) \quad P_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{1T}(f) S_{2T}^*(f)}{T} df$$

$$P_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{1T}^*(f) S_{2T}(f)}{T} df$$

dove $S_{1T}(f)$ e $S_{2T}(f)$ sono le trasformate di Fourier di $s_{1T}(t)$ e $s_{2T}(t)$ rispettivamente. Dalle (IV.6.1) è immediato dedurre:

$$(IV.6.4) \quad P_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{12}(f) df$$

$$P_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} W_{21}(f) df$$

avendo introdotto le densità spettrali mutue o incrociate definite dalle:

$$(IV.6.5) \quad \begin{aligned} W_{12}(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{1T}(f)S_{2T}^*(f)}{T} \\ W_{21}(f) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_{1T}^*(f)S_{2T}(f)}{T} \end{aligned}$$

Le grandezze $W_{12}(f)$ e $W_{21}(f)$ sono, in generali complesse ed obbediscono alla condizione:

$$(IV.6.6) \quad W_{12}(f) = W_{21}^*(f)$$

Applicando la disuguaglianza di Schwarz si ottiene:

$$(IV.6.7) \quad \begin{aligned} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t)s_2^*(t)dt \right|^2 &\leq \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s_1(t)|^2 dt \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s_2(t)|^2 dt \\ \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1^*(t)s_2(t)dt \right|^2 &\leq \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s_1(t)|^2 dt \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s_2(t)|^2 dt \end{aligned}$$

da cui

$$(IV.6.8) \quad \begin{aligned} |P_{12}|^2 &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t)s_2^*(t)dt \right|^2 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s_1(t)|^2 dt \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s_2(t)|^2 dt \\ |P_{21}|^2 &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1^*(t)s_2(t)dt \right|^2 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s_1(t)|^2 dt \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s_2(t)|^2 dt \end{aligned}$$

e cioè

$$(IV.6.9) \quad |P_{12}|, |P_{21}| \leq \sqrt{P_1} \cdot \sqrt{P_2}$$

essendo P_1 e P_2 le potenze specifiche associate ai segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ rispettivamente.

III.6.2 Correlazioni mutue.

Le correlazioni mutue sono definite come segue:

$$(IV.6.10) \quad \begin{aligned} \gamma_{12}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t)s_2(t-\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_1(t+\tau)s_2(t)dt \\ \gamma_{21}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_2(t)s_1(t-\tau)dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_2(t+\tau)s_1(t)dt \end{aligned}$$

Si verifica che:

$$(IV.6.11) \quad \gamma_{12}(\tau) = \gamma_{21}(-\tau)$$

Infine applicando la diseguglianza di Schwarz si può verificare che si ha:

$$(IV.6.12) \quad |\gamma_{12}(\tau)|, |\gamma_{21}(\tau)| \leq \gamma_1(0) \cdot \gamma_2(0) = P_1 \cdot P_2$$

Come nel caso di segnali ad energia finita, quando è $\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{21}(\tau) = 0$ i segnali si dicono **incorrelati**. La condizione di ortogonalizzazione si verifica quando è $\gamma_{12}(0) = \gamma_{21}(0) = 0$.

SEGNALI A TEMPO DISCRETO

Segnali a energia finita

IV.7 – Densità spettrali e funzioni di correlazione.

Le considerazioni svolte a proposito dei segnali a tempo continuo possono essere facilmente estese al caso dei segnali a tempo discreto.

IV.7.1 – Densità spettrali.

Sia $s[n]$ una sequenza ad energia finita. Si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]s^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\varphi)e^{j2\pi n\varphi} d\varphi \right] s^*[n] = \\
 \text{(IV.7.1)} \quad &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\varphi) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s^*[n]e^{j2\pi n\varphi} \right] d\varphi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\varphi) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]e^{-j2\pi n\varphi} \right]^* d\varphi = \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |S(\varphi)|^2 d\varphi
 \end{aligned}$$

La densità spettrale di energia è così definita dalla:

$$\text{(IV.7.2)} \quad W(\varphi) = |S(\varphi)|^2$$

Essa è manifestamente una funzione reale, pari e periodica di periodo unitario. In termini della funzione $W(\varphi)$, la potenza specifica della sequenza diventa:

$$\text{(IV.7.3)} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s[n]|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} W(\varphi)d\varphi$$

IV.7.2 – Autocorrelazione.

Prendendo la trasformata inversa della (IV.7.2) si ottiene, per sequenze ad energia finita:

$$\begin{aligned}
 \gamma[k] &= F^{-1} \{W(\varphi)\} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} W(\varphi)e^{j2\pi k\varphi} d\varphi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\varphi)S^*(\varphi)e^{j2\pi k\varphi} d\varphi = \\
 \text{(IV.7.4)} \quad &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\varphi) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]e^{-j2\pi n\varphi} \right]^* e^{j2\pi k\varphi} d\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^*[n] \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(\varphi)e^{j2\pi(n+k)\varphi} d\varphi
 \end{aligned}$$

La funzione di autocorrelazione vale pertanto:

$$\text{(IV.7.5)} \quad \gamma[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n+k]s^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]s^*[n-k]$$

È evidente che

$$\text{(IV.7.6)} \quad \gamma[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]s^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s[n]|^2 = E$$

e cioè la funzione di autocorrelazione calcolata per $k=0$ fornisce l'energia specifica della sequenza.

Segnali a potenza finita

IV.8 – Densità spettrali e funzioni di correlazione.

IV.8.1 – Densità spettrali.

Se $s[n]$ è una sequenza a potenza finita ci si deve riferire alla potenza specifica e si ha:

$$(IV.8.1) \quad P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |s[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s_N[n]|^2$$

dove si è introdotta la sequenza troncata $s_N[n]$. Poiché $s_N[n]$ è una sequenza ad energia finita, detta $S_N(\varphi)$ la sua trasformata di Fourier, si ha:

$$(IV.8.2) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s_N[n]|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |S_N(\varphi)|^2 d\varphi$$

Si può scrivere:

$$(IV.8.3) \quad P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s_N[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |S_N(\varphi)|^2 d\varphi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|S_N(\varphi)|^2}{2N+1} d\varphi = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} W(\varphi) d\varphi$$

avendo denotato con

$$(IV.8.4) \quad W(\varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|S_N(\varphi)|^2}{2N+1}$$

la **densità spettrale di potenza** della sequenza $s(n)$.

IV.8.2 – Autocorrelazione.

Per sequenze a potenza finita, la funzione di autocorrelazione, definita come la trasformata inversa della densità spettrale di potenza, è data dalla:

$$(IV.8.5) \quad \gamma[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N s[n]s[n-k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N s[n+k]s[n]$$

e si ha:

$$(V.8.6) \quad \gamma[0] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |s[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N s[n]s^*[n] = P$$