Capitolo V

TRASFORMAZIONI LINEARI DEI SEGNALI

V.1 - Definizioni. Proprietà generali.

Un sistema di elaborazione dei segnali è un dispositivo che effettua su uno o più segnali in ingresso un insieme di trasformazioni, come ad esempio amplificazione, filtraggio, modulazione o rivelazione, trasmissione, etc. Un tale dispositivo è normalmente rappresentato mediante un blocco funzionale caratterizzato da un segnale *in ingresso* $x(t)$ e da un segnale *in uscita* $y(t)$ (vedi Fig. V.1). La trasformazione operata dal blocco è identificata da un operatore $\boldsymbol{S}$ ed è simbolicamente rappresentata dalla relazione:

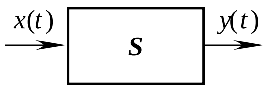

Fig. VI.1 – Trasformazione di segnali

(V.1.1)
$$y(t) = \boldsymbol{S}\{x(t)\} \qquad t \in \boldsymbol{I}$$

Se $\boldsymbol{I}$ è un insieme continuo (finito o infinito) la trasformazione si dice ***analogica***; se $\boldsymbol{I}$ è un insieme discreto (finito o numerabile) la trasformazione è detta ***numerica***.

Il segnale in uscita al generico istante t, in generale, dipende dalla forma dell'ingresso $x(\tau)$ per $\tau < t$ (*passato*), $\tau = t$ (*presente*) e $\tau > t$ (*futuro*). Quando $y(t)$ dipende solo da $x(t)$ la trasformazione si dice ***priva di memoria***.

La trasformazione è detta inoltre ***non anticipativa*** se $y(t)$ dipende solo dal segnale in ingresso $x(\tau)$ per $\tau \le t$. In caso contrario essa si dirà ***anticipativa***. Naturalmente se la trasformazione $\boldsymbol{S}$ rappresenta un sistema fisico la risposta non può sussistere prima che la sollecitazione non sia applicata all'ingresso (Principio di causalità); di conseguenza essa deve essere necessariamente non anticipativa. Tuttavia se l'elaborazione del segnale avviene *in tempo virtuale* a mezzo ad esempio di un calcolatore nella cui memoria sono stati già stati inseriti i dati $x(t)$, la condizione di causalità può essere rimossa.

Un'importante classificazione delle trasformazioni di segnali è basata sul concetto di linearità.

Una trasformazione si dice ***lineare*** se ad ogni ingresso del tipo:

(V.1.2)
$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t) \qquad t \in \boldsymbol{I}$$

costituito cioè dalla combinazione lineare di N segnali componenti, con le a_i costanti reali o complesse non tutte nulle, fa corrispondere un'uscita data dalla:

(V.1.3)
$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i \boldsymbol{S}\{x_i(t)\} \qquad t \in \boldsymbol{I}$$

Detto in altre parole, la trasformazione è lineare quando soddisfa il principio di ***omogeneità***:

(V.1.4) $$\boldsymbol{S}\{kx(t)\} = k\boldsymbol{S}\{x(t)\} \qquad k \text{ costante}$$

e di ***additività***:

(V.1.5) $$\boldsymbol{S}\{x_1(t)+x_2(t)\} = \boldsymbol{S}\{x_1(t)\}+\boldsymbol{S}\{x_2(t)\}$$

Una trasformazione infine si dice ***tempo invariante*** se detta $y(t)$ la risposta all'ingresso $x(t)$, all'ingresso $x(t-\tau)$ corrisponde l'uscita:

(V.1.6) $$y(t-\tau) = \boldsymbol{S}\{x(t-\tau)\} \qquad t,\tau \in \boldsymbol{I}$$

Ciò equivale a dire che ad un ritardo nel segnale in ingresso corrisponde un identico ritardo nel segnale in uscita.

Esempio E.V.1

La trasformazione

$$y(nT) = x^2(nT)$$

è discreta, non lineare e priva di memoria.

Esempio E.V.2

La trasformazione:

$$y(t) = tx(t)$$

è analogica, lineare, priva di memoria e tempo variante giacche è:

$$tx(t-\tau) \neq (t-\tau)x(t-\tau)$$

Esempio E.V.3

La trasformazione definita dalla seguente equazione differenziale:

$$y'(t)+\alpha y(t) = x(t)$$

è lineare e tempo invariante.

<u>Linearità</u>. Per gli ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$ si ha:

$$y_1'(t)+\alpha y_1(t) = x_1(t)$$

$$y_2'(t)+\alpha y_2(t) = x_2(t)$$

da cui, sommando la prima della precedente moltiplicata per a_1 con la seconda moltiplicata per a_2, è:

$$\left[a_1y_1'(t)+a_2y_2'(t)\right]+\alpha\left[a_1y_1(t)+a_2y_2(t)\right] = a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$$

che mostra che la risposta del sistema all'ingresso $a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$ è $a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$.

<u>Tempo invarianza</u>. Effettuando, nell'equazione differenziale, la trasformazione $t \Rightarrow t-\tau$ si ha:

$$y'(t-\tau)+\alpha y(t-\tau) = x(t-\tau)$$

che mostra che la risposta del sistema all'ingresso $x(t-\tau)$ è $y(t-\tau)$.

Poiché la $y(t)$ dipende, inoltre, dal segmento del segnale in ingresso $x(\tau)$ $(\tau \le t)$ il sistema è con memoria.

In quel che segue è necessario distinguere le trasformazioni lineari a tempo continuo da quelle lineari a tempo discreto.

TRASFORMAZIONI LINEARI A TEMPO CONTINUO

V.2 - Studio nel dominio del tempo.

Per definire la forma della trasformazione $\boldsymbol{S}$, basta partire dall'espressione:

(V.2.1) $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Se la trasformazione $\boldsymbol{S}$ è lineare, si ottiene:

(V.2.2) $$y(t) = S\left\{x(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\boldsymbol{S}\left\{\delta(t-\tau)\right\}d\tau$$

la quale, ponendo:

(V.2.3) $$h(t,\tau) = \boldsymbol{S}\left\{\delta(t-\tau)\right\}$$

diventa:

(V.2.4) $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

La $h(t,\tau)$, definita dalla (V.2.3), corrisponde alla risposta del sistema osservata all'istante t ad un impulso di Dirac applicato all'istante τ. Per questa ragione la funzione $h(t,\tau)$ è denominata ***risposta impulsiva***.

Nel linguaggio proprio delle trasformazioni lineari la funzione $h(t,\tau)$ costituisce il cosiddetto *nucleo* della trasformazione (V.2.4).

Esempio E.V.4

Il sistema lineare:

$$y(t) = tx(t)$$

è caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva

$$h(t,\tau) = t\delta(t-\tau)$$

Nel caso in cui la trasformazione lineare è tempo invariante, la (V.2.2) diviene:

(V.2.5) $$h(t,\tau) = \boldsymbol{S}\left\{\delta(t-\tau)\right\} = h(t-\tau)$$

essendo

(V.2.6) $$h(t) = S\left\{\delta(t)\right\}$$

la risposta del sistema alla delta di Dirac applicata all'origine. Di conseguenza la (V.2.2) diventa:

(V.2.7) $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = x * h$$

e cioè: il segnale in uscita da un sistema lineare tempo invariante si ottiene dalla convoluzione del segnale in ingresso con la risposta impulsiva.

Un sistema lineare è detto ***stabile*** se ad ogni ingresso limitato corrisponde un'uscita limitata (Stabilità BIBO: Bounded Input Bounded Output). Ciò comporta che, con

(V.2.8) $$\left|x(t)\right| < M_x$$

si deve avere

(V.2.9) $$\left|y(t)\right| < M_y$$

e questo comporta che deve essere:

(V.2.10) $$\left|y(t)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t,\tau)d\tau\right| \le M_x \int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t,\tau)\right|d\tau \le M_y$$

che equivale a scrivere:

(V.2.11) $$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t,\tau)| d\tau < \infty$$

Se il sistema è tempo invariante è

(V.2.12) $$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

e cioè la risposta impulsiva risulta assolutamente integrabile.

È da osservare che, nel caso di sistemi lineari e tempo invarianti, la condizione (V.2.12) è anche necessaria.

Infatti, si supponga che sia $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$. Si scelga un ingresso del tipo

(V.2.13) $$x(t) = \mathrm{sgn}\left[h(-t)\right]$$

Esso è manifestamente limitato; tuttavia l'uscita del sistema, calcolata in $t = 0$, è:

(V.2.14) $$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}\left[h(-\tau)\right]h(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \infty$$

Se la risposta impulsiva di un sistema è del tipo

(V.2.15) $$h(t,\tau) = \phi(t)\delta(t-\tau)$$

la risposta ad un ingresso $x(t)$ è data dalla:

(V.2.16) $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\phi(t)\delta(t-\tau)d\tau = \phi(t)x(t)$$

Ciò equivale a dire che il sistema è privo di memoria perchè la risposta dipende solo dall'ingresso valutato all'istante t. Se il sistema è tempo invariante, la condizione (V.2.15) si muta nella $h(t) = k\delta(t)$ e cioè la risposta impulsiva è proporzionale alla delta di Dirac.

V.3. - Studio nel dominio della frequenza.

Lo studio delle trasformazioni lineari può essere condotto efficacemente nel dominio della frequenza considerando cioè le trasformate di Fourier dei segnali di ingresso e di uscita. Nel nuovo dominio la (V.2.4) assume un'altra forma che rappresenta la *trasformazione duale*.

In quel che segue ci si riferisce solo a sistemi tempo invarianti per i quali la relazione ingresso uscita è espressa dall'integrale di convoluzine (V.2.7). Prendendo allora le trasformate di Fourier di ambo i membri della (V.2.7) e ricordando la proprietà 15 della convoluzione nel dominio del tempo, si deduce:

(V.3.1) $$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

dove $X(f)$ e $Y(f)$ denotano le trasformate di Fourier di $x(t)$ e $y(t)$ rispettivamente e la quantità $H(f)$ definita dalla:

(V.3.2) $$H(f) = \boldsymbol{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

prende il nome di ***risposta in frequenza*** del sistema. La trasformazione duale di una trasformazione tempo invariante si riduce al prodotto della $X(f)$ per la risposta in frequenza del sistema.

Nel caso generale può risultare complicata la determinazione della risposta in frequenza di un sistema lineare. Tuttavia nel caso di trasformazioni lineari e tempo invarianti il calcolo della $H(f)$ risulta molto più semplice. Infatti la risposta ad un ingresso cisoidale del tipo:

(V.3.3)
$$x_0(t) = e^{j2\pi ft}$$

vale:

(V.3.4)
$$y_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-\tau)} h(\tau)d\tau = e^{j2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

che, ricordando la (V.3.2), si scrive:

(V.3.5)
$$y_0(t) = H(f)x_0(t)$$

Ciò significa che in una trasformazione tempo invariante la risposta alla sollecitazione cisoidale $x_0(t)$ risulta proporzionale a $x_0(t)$ e la costante di proporzionalità è proprio la risposta in frequenza del sistema.

Esempio E.V.5

Si determini la risposta in frequenza del sistema definito dalla seguente equazione differenziale:
$$y'(t) + \alpha y(t) = x(t)$$

Ponendo:
$$x_0(t) = e^{j2\pi ft}$$
$$y_0(t) = H(f)e^{j2\pi ft}$$

si ottiene:
$$j2\pi f H(f)e^{j2\pi ft} + \alpha H(f)e^{j2\pi ft} = e^{j2\pi ft}$$

dalla quale si deduce:
$$H(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

Esempio E.V.6

Si determini la risposta in frequenza del filtro RC passa basso rappresentato in Fig. E.V.1 dove $x(t)$ e $y(t)$ denotato le tensioni applicate ai morsetti di ingresso e di uscita rispettivamente.

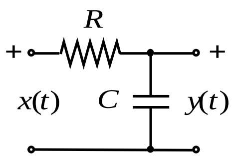

Fig. E.V.1

L'equazione differenziale della rete è
$$RCy'(t) + y(t) = x(t)$$

Ponendo:
$$x(t) \equiv x_0(t) = e^{j2\pi ft} \qquad y(t) \equiv y_0(t) = H(f)e^{j2\pi ft}$$

si ha:
$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

E' da osservare che quanto detto equivale a determinare la risposta del sistema nel regime sinusoidale permanente; ciò può essere fatto direttamente sulla base dello schema di Fig. E.V.2 dove ai componenti R e C si sono sostituiti gli operatori R e $\frac{1}{j2\pi fC}$ rispettivamente. Dalla Fig. E.V.2 si deduce infatti:

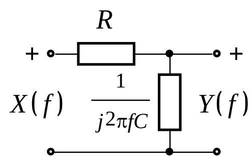

Fig. E.V.2

$$Y(f) = X(f)\frac{1}{j2\pi fC}\frac{1}{R + \frac{1}{j2\pi fC}}$$

Il modulo della $H(f)$ vale:
$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}$$

ed il suo argomento:
$$\vartheta(f) = -\arctang(2\pi fRC)$$

Come si evince dalla Fig. E.V.3, che riporta gli andamenti di $|H(f)|$ e di $\vartheta(f)$ in funzione della frequenza, il sistema presenta un comportamento del tipo "passa-basso".

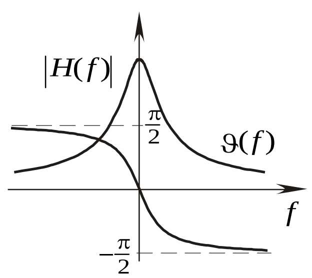

Fig. E.V.3

Esempio E.V.7.

Si determini la risposta impulsiva del sistema lineare e tempo invariante caratterizzato dalla seguente equazione differenziale:
$$y''(t) + y'(t) + y(t) = x(t)$$

Metodo diretto

La risposta impulsiva si ottiene dalla soluzione dell'equazione

(a) $$h''(t)+h'(t)+h(t)=\delta(t)$$

Poiché l'impulso di Dirac è identicamente nullo per tempi negativi, la risposta impulsiva può essere considerata come una risposta con ingresso zero partendo dall'istante $t=0$.

Questo comporta che, dette α e β le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$s^2+s+1=0$$

e cioè

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

la soluzione con ingresso zero è del tipo:

(b) $$h(t)=k_1e^{\alpha t}+k_2e^{\beta t}=k_1e^{\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}+k_2e^{\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}$$

dove le costanti k_1 e k_2 dipendono dalle condizioni iniziali a $t=0^+$ che sono create dall'impulso di Dirac. A tale proposito si integri l'equazione (a) da $t=0^-$ a $t=0^+$. Si ha:

(c) $$h'(0^+)+h(0^+)+\int_{0^-}^{0^+}h(t)dt=1$$

essendo manifestamente $h'(0^-)=0$; $h(0^-)=0$; $\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1$.

Poiché la risposta impulsiva non può avere discontinuità in $t=0$, perchè questo comporterebbe la presenza della derivata della distribuzione delta di Dirac che non è presente nel secondo membro della (a), si deve avere:

$$\int_{0^-}^{0^+}h(t)dt=0$$

che comporta

(d) $$h(0^+)=0$$

e quindi dalla (c) si ottiene:

(e) $$h'(0^+)=1$$

Le (d) e (d) costituiscono le condizioni iniziali da imporre alla (b). Si perviene così alla seguente espressione:

$$h(t)=\left(\frac{j}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t-j\frac{\sqrt{3}}{2}t}-\frac{j}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t+j\frac{\sqrt{3}}{2}t}\right)u(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

Metodo basato sulla determinazione della risposta in frequenza.

La risposta impulsiva può essere determinata come trasformata inversa di Fourier della risposta in frequenza. A tal proposito ponendo

$$x_0(t)=e^{j2\pi ft}$$

si ottiene:

$$(j2\pi f)^2H(f)e^{j2\pi ft}+(j2\pi f)H(f)e^{j2\pi ft}+H(f)e^{j2\pi ft}=e^{j2\pi ft}$$

da cui

$$H(f)=\frac{1}{(j2\pi f)^2+(j2\pi f)+1}$$

che, ponendo adesso $p=j2\pi f$, diventa

$$H(p)=\frac{1}{p^2+p+1}=\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(p+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

Espandendo la funzione $H(p)$, così ottenuta, in fratti semplici, si ottiene:

$$H(p)=\frac{A}{p+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{B}{p+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

dove i coefficienti A e B valgono:

$$A=\left.\frac{1}{p+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)_{p=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}=-j\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad B=\left.\frac{1}{p+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)_{p=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}=j\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Si ottiene allora

$$H(f)=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{j2\pi f+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}}-j\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{j2\pi f+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

la cui antitrasformata coincide con la risposta impulsiva precedentemente determinata.

V.4 - Trasmissione senza distorsione. Filtri ideali.

Un sistema di trasmissione si definisce senza distorsione quando il segnale in uscita è proporzionale a quello in ingresso seppur ritardato di una quantità T. (v. Fig. V.2). Per un sistema senza distorsione si ha quindi:

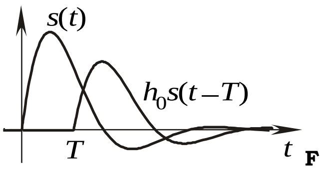

Fig. V.2 – Sistema di trasmissione senza distorsione

(V.4.1) $$y(t) = h_0 x(t-T)$$

dove la costante h_0 rappresenta il guadagno (se è $h_0 > 1$) o l'attenuazione (se è $h_0 < 1$) del sistema.

Trasformando secondo Fourier ambo i membri della (V.4.1) e ricordando la proprietà 8 della traslazione nel dominio del tempo, si ottiene:

(V.4.2) $$Y(f) = h_0 e^{-j2\pi fT} X(f)$$

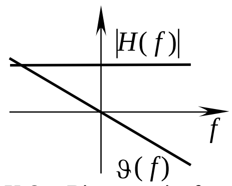

Fig. V.3 - Risposta in frequenza di un sistema senza distorsione

dalla quale si deduce:

(V.4.3) $$H(f) = h_0 e^{-j2\pi fT}$$

In un sistema di trasmissione senza distorsione l'ampiezza della $H(f)$ è costante mentre il suo argomento risulta proporzionale alla frequenza come è mostrato in Fig. V.3.

Un sistema di trasmissione che non introduce distorsioni entro una certa banda (finita) di frequenza ma non permette, al di fuori di essa, la trasmissione del segnale, costituisce un filtro ideale. A seconda della dislocazione della banda i filtri ideali si distinguono in **filtri passa-basso** e **filtri passa-banda**. Le risposte in frequenza per filtri ideali passa-basso e passa-banda sono riportate nella Fig. V.4.

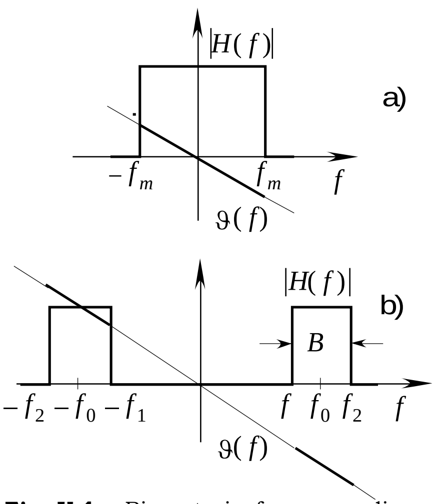

Fig. V.4 - Risposte in frequenza di un filtro ideale: a) passa-basso, b) passa-banda

Le corrispondenti risposte impulsive valgono:

a) ***filtro passa-basso***:

(V.4.4) $$h(t) = 2h_0 f_m \operatorname{sinc}\left[2 f_m (t-T)\right]$$

il cui andamento è riportato in Fig. VI.5.

b) ***filtro passa-banda***:

(V.4.5) $$h(t) = 2h_0 B \cos\left[2\pi f_0 (t-T)\right] \operatorname{sinc}\left[B(t-T)\right]$$

dove le quantità B e f_0 definite dalle

(V.4.6) $$B = f_2 - f_1 \qquad f_0 = \tfrac{1}{2}\left(f_1 + f_2\right)$$

rappresentano l'ampiezza di banda e la frequenza centrale del filtro.

Come si deduce dalle (V.4.4) e (V.4.5), risulta $h(t) \neq 0 \quad t < 0$ e quindi il principio di causalità è violato.

TRASFORMAZIONI LINEARI A TEMPO DISCRETO

V.5 - Studio nel dominio del tempo.

Nei sistemi numerici i segnali che intervengono in ingresso e in uscita sono dei segnali tempo discreti rappresentati dalle sequenze numeriche $x[n]$ e $y[n]$ rispettivamente. La trasformazione è pertanto caratterizzata dalla seguente relazione:

(VI.5.1) $$y[n] = \boldsymbol{S}\{x[n]\}$$

Come nel caso dei sistemi lineari analogici, per caratterizzare la trasformazione $\boldsymbol{S}$, basta esprimere il segnale in ingresso nella forma:

(VI.5.1) $$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

essendo $\delta[n]$ la sequenza impulsiva.

Se la trasformazione $\boldsymbol{S}$ è lineare, risulta:

(VI.5.3) $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\boldsymbol{S}\{\delta[n-k]\}$$

la quale, ponendo:

(VI.5.4) $$h[n,k] = \boldsymbol{S}\{\delta[n-k]\}$$

assume la forma:

(VI.5.5) $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n,k]$$

La sequenza $h[n,k]$, definita dalla (VI.5.4), corrisponde alla risposta del sistema quando al suo ingresso è applicata la sequenza impulsiva ritardata di k passi e pertanto costituisce la cosiddetta ***risposta impulsiva*** del sistema.

Se la trasformazione $\boldsymbol{S}$ è tempo invariante, la (VI.5.5) diviene:

(VI.5.6) $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

essendo:

(VI.5.7) $$h[n] = \boldsymbol{S}\{\delta[n]\}$$

Anche in questo caso il segnale in uscita da un sistema lineare tempo invariante si ottiene dalla convoluzione della sequenza d'ingresso con la risposta impulsiva $h[n]$.

Nel caso di sistemi numerici la condizione di causalità comporta:

(VI.5.8,a) $$h[n,k] \equiv 0 \quad \text{per} \quad n \le k$$

che, nel caso di trasformazioni tempo invarianti, si semplifica nella:

(VI.5.8,b) $$h[n] \equiv 0 \quad \text{per} \quad n \le k$$

Per sistemi causali tempo varianti la (VI.5.5) diventa:

(VI.5.9) $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n,k]$$

che per sistemi tempo invarianti, si semplifica nella:

(VI.5.10) $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

Nell'ambito dei sistemi numerici la risposta impulsiva $h(n,k)$ può presentare una durata finita o infinita. Si ottengono così i cosiddetti sistemi a ***risposta impulsiva a durata finita*** (sistemi FIR Finite Impulse Response) o i sistemi a *risposta* ***impulsiva a durata infinita*** (sistemi IIR Infinite Impulsive Response). Nel caso di sistemi FIR tempo invarianti si può porre, senza ledere le generalità:

(VI.5.11) $$h[n] \equiv 0 \quad \text{per} \quad n \le 0 \text{ e } n \ge N$$

e questo comporta:

(VI.5.12) $$y[n] = \sum_{k=n-N}^{n} n[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{N} x[n-k]h[k]$$

Il sistema presenta una memoria finita giacchè solo N valori del segnale in ingresso contribuiscono alla determinazione dell'uscita $y[n]$. Per contro i sistemi IIR sono caratterizzati da una memoria infinita.

Un sistema lineare è stabile (nel senso della stabilità BIBO) se ad ogni ingresso limitato

(VI.5.13) $$|x[n]| < M_x$$

corrisponde l'uscita limitata:

(VI.5.14) $$|y[n]| < M_y$$

In altri termini, deve essere:

(VI.5.15) $$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n,k] \right| \le M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n,k]| \le M_y$$

e cioè

(VI.5.16) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n,k]| < \infty$$

Se il sistema è tempo invariante è

(VI.5.17) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

e cioè la risposta impulsiva risulta assolutamente sommabile.

È interessante notare che, anche nel caso di sistemi discreti lineari e tempo invarianti, la condizione (VI.5.17) è anche necessaria.

Infatti, si supponga che sia $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$. In queste condizioni si scelga un ingresso del tipo

(VI.5.18) $$x[n] = \operatorname{sgn}\left[h[-n]\right]$$

Esso è manifestamente limitato; tuttavia l'uscita del sistema, calcolata in $n=0$, vale

(VI.5.19) $$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}\left[h[-k]\right]h[-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$$

Se la risposta impulsiva di un sistema è del tipo

(VI.5.20) $$h[n,k] = \phi[n]\delta[n-k]$$

la risposta ad un ingresso $x[n]$ vale:

(VI.5.21) $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\phi[n]\delta[n-k] = \phi[n]x[n]$$

Ciò equivale a dire che il sistema è privo di memoria perchè la risposta dipende solo dall'ingresso valutato in n.

Se il sistema è tempo invariante, la condizione (VI.2.20) si muta nella:

(VI.5.22)
$$h[n] = k\delta[n]$$

e cioè la risposta impulsiva è proporzionale alla sequenza impulsiva.

V.6 - Studio nel dominio della frequenza.

Prendendo in considerazione le trasformazioni lineari e tempo invarianti, trasformando secondo Fourier la (VI.5.10) e ricordando la proprietà della trasformata della somma di convoluzione, si ottiene:

(VI.6.1)
$$Y(\varphi) = X(\varphi)H(\varphi)$$

dove $X(\varphi)$ e $Y(\varphi)$ denotano le trasformate di Fourier delle sequenze di ingresso e di uscita rispettivamente e si è definita con

(VI.6.2)
$$H(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j2\pi n\varphi}$$

la ***risposta in frequenza*** del sistema.

Come nel caso di sistemi a tempo continuo, la risposta in frequenza può essere facilmente calcolata sulla base della risposta del sistema ad un ingresso cisoidale del tipo:

(VI.6.3)
$$x_0[n] = e^{j2\pi n\varphi}$$

Si ha infatti, per la (VI.5.12):

(VI.6.4)
$$y_0[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_0[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]e^{j2\pi k\varphi} = e^{j2\pi n\varphi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]e^{-j2\pi(n-k)\varphi} =$$
$$= H(\varphi)e^{j2\pi n\varphi} = x_0[n]H(\varphi)$$

La risposta del sistema presenta la stessa forma della sollecitazione in ingresso, l'ampiezza però dipende dalla risposta in frequenza del sistema

Esempio E.V.8.

Si determini la risposta in frequenza del sistema schematizzato dall'equazione alle differenze

$$y[n] + \sum_{k=1}^{M} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$

Basta porre allora

$$x[n] = x_0[n] = e^{j2\pi n\varphi} \qquad \text{e} \qquad y[n] = y_0[n] = H(\varphi)e^{j2\pi n\varphi}$$

Si ottiene così:

$$H(\varphi) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k e^{-j2\pi k\varphi}}{1 + \sum_{k=1}^{M} a_k e^{-j2\pi k\varphi}}$$