

## IL CAMPIONAMENTO DEI SEGNALI

---

### VI.1 - Generalità.

Il campionamento di un segnale a tempo continuo consiste nel prelevare una sequenza di campioni o di valori letti ad istanti successivi di tempo. Si stabilisce così una corrispondenza tra il segnale a tempo continuo  $s(t)$  e l'insieme numerabile dei campioni  $\{s(t_n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ . Per quanto gli istanti di campionamento possono essere scelti in modo non regolare (*campionamento non uniforme*), qui di seguito si fa riferimento solo al caso di *campionamento uniforme* in cui il generico istante di campionamento è un multiplo del periodo di campionamento  $T_c$ .

In genere la corrispondenza tra segnale a tempo continuo e l'insieme dei suoi campioni non è biunivoca. Ciò comporta che dalla conoscenza dei campioni non è sempre possibile ricostruire il segnale  $s(t)$ . Tuttavia, come sarà illustrato nel seguito, se il segnale  $s(t)$  è a banda limitata <sup>1</sup>, e cioè se esiste un intervallo o un'unione di un numero finito di intervalli ciascuno di misura finita al di fuori dei quali lo spettro del segnale è identicamente nullo e il periodo di campionamento è scelto in modo opportuno, tale corrispondenza è biunivoca.

### VI.2 - Il campionamento dei segnali passa-basso.

Sia  $s_a(t)$  un segnale a tempo continuo ed a energia finita di tipo passa-basso. Questo comporta che detta  $S_a(f)$  la sua trasformata di Fourier esisterà un valore  $f_m$  della frequenza, detta *ampiezza di banda* del segnale, tale da aversi  $|S_a(f)| = 0$  per  $f \notin [-f_m, f_m]$ .

Il segnale a tempo discreto  $s_d(nT_c)$  ottenuto da  $s_a(t)$  con un campionamento uniforme di periodo  $T_c$  (di frequenza  $f_c = \frac{1}{T_c}$ ) è espresso dalla:

$$(VI.2.1) \quad s_d(nT_c) = s_a(nT_c) = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(f) e^{j2\pi n f T_c} df$$

Se  $S_d(f)$  denota la trasformata di Fourier del segnale a tempo discreto  $s_d(nT_c)$  è per la (IV.3.9) del Cap. IV:

$$(VI.2.2) \quad s_d(nT_c) = T_c \int_{-\frac{1}{2T_c}}^{\frac{1}{2T_c}} S_d(f) e^{j2\pi n f T_c} df$$

che, confrontata con la precedente, conduce alla:

$$(VI.2.3) \quad T_c \int_{-\frac{1}{2T_c}}^{\frac{1}{2T_c}} S_d(f) e^{j2\pi n f T_c} df = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(f) e^{j2\pi n f T_c} df$$

D'altra parte si può scrivere:

---

<sup>1</sup> Un segnale si dice a banda limitata quando esiste un intervallo di misura limitata o un'unione finita di intervalli ciascuno di misura limitata, al di fuori dei quali lo spettro del segnale è identicamente nullo.

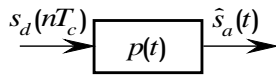
$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} S_a(f) e^{j2\pi n f T_c} df &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{k}{T_c} - \frac{1}{2T_c}}^{\frac{k}{T_c} + \frac{1}{2T_c}} S_a(f) e^{j2\pi n f T_c} df = \\
 \text{(VI.2.4)} \quad &= \int_{-\frac{1}{2T_c}}^{\frac{1}{2T_c}} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_a\left(f + \frac{k}{T_c}\right) \right] e^{j2\pi n \left(f + \frac{k}{T_c}\right) T_c} df = \\
 &= \int_{-\frac{1}{2T_c}}^{\frac{1}{2T_c}} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_a\left(f + \frac{k}{T_c}\right) \right] e^{j2\pi n f T_c} df
 \end{aligned}$$

Introducendo la (VI.2.4) nella (VI.2.3) si ottiene:

$$\text{(VI.2.5)} \quad S_d(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_a\left(f + \frac{k}{T_c}\right)$$

La trasformata del segnale a tempo discreto  $s_d(nT_c)$  è uguale (a meno del fattore  $\frac{1}{T_c}$ ) alla ripetizione periodica della trasformata del segnale a tempo continuo  $s_a(t)$  con periodicità  $\frac{1}{T_c}$ .

Per dedurre le condizioni per cui dal segnale campionato è possibile ricostruire il segnale a tempo continuo, si consideri il circuito



**Fig. VI.1** – Circuito interpolatore.

interpolatore riportato in Fig. V.1, in cui al segnale in ingresso  $s_d(nT_c)$  a tempo discreto corrisponde in uscita il

segnale a tempo continuo:

$$\text{(VI.2.6)} \quad \hat{s}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_d(nT_c) p(t - nT_c)$$

ottenuto interpolando i campioni  $s_d(nT_c)$  mediante la funzione interpolatrice  $p(t)$ .

Trasferendo la (VI.2.6) nel dominio della frequenza e tenendo conto della (VI.2.5) si ha:

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_a(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_d(nT_c) P(f) e^{-j2\pi n f T_c} = P(f) \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_d(nT_c) e^{-j2\pi n f T_c} = \\
 \text{(VI.2.7)} \quad &= P(f) S_d(f) = \frac{1}{T_c} P(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_a\left(f + \frac{k}{T_c}\right)
 \end{aligned}$$

dove si è denotato con  $S_d(f)$  la trasformata di Fourier del segnale a tempo discreto  $s_d(nT_c)$ . Se si richiede che  $\hat{s}_a(t) \equiv s_a(t)$ , ovvero che si abbia:

$$\text{(VI.2.8)} \quad S_a(f) = \frac{1}{T_c} P(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_a\left(f + \frac{k}{T_c}\right)$$

- occorre verificare che nella ripetizione periodica dello spettro del segnale  $s_a(t)$  non si creino interferenze fra le varie ripetizioni di  $S_a(f)$  con se stesso. Questo comporta che, come si deduce dalla Fig. V.2: il segnale  $s_a(t)$  deve essere a banda limitata;
- detta  $f_m$  l'ampiezza di banda di  $s_a(t)$ , il periodo o la frequenza di campionamento devono essere scelti in modo tale che risulti

$$\text{(VI.2.9)} \quad T_c \leq \frac{1}{2f_m} \quad \text{o} \quad f_c \geq 2f_m$$

Inoltre, soddisfatte tali condizioni, occorre porre

$$\text{(VI.2.10)} \quad P(f) = T_c \text{rect}(fT_c)$$

per cui dalla (VI.2.8) si ha:

$$\text{(VI.2.11)} \quad S_a(f) = \text{rect}(fT_c) \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_a\left(f + \frac{k}{T_c}\right)$$

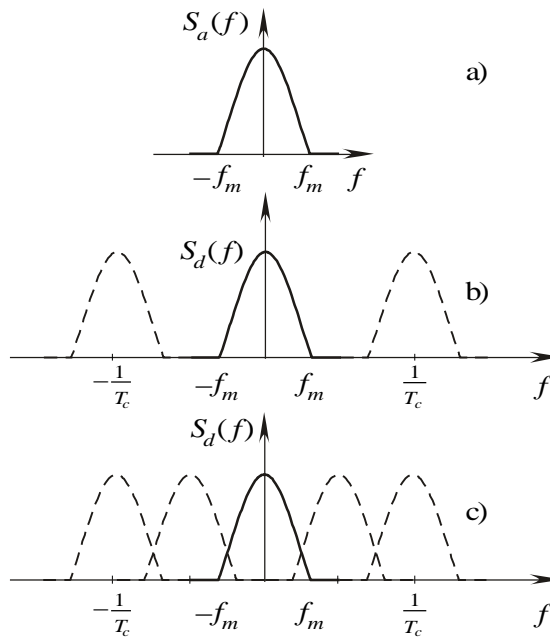
Essendo, d'altra parte:

$$(VI.2.12) \quad p(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)$$

dalla (VI.2.6) risulta:

$$(VI.2.13) \quad s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(nT_c) \text{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - n\right)$$

La (VI.2.13) costituisce l'espressione formale del **TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO**. Il segnale  $s_a(t)$  può essere perfettamente ricostruito a partire dalla sequenza dei suoi campioni  $s_a(nT_c)$ .



**Fig VI.2** - Il campionamento dei segnali passa basso.

Si osservi che in base alla (VI.2.13), la ricostruzione del segnale avviene sommando una serie di funzioni di tipo  $\text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)$  opportunamente ritardate e pesate con i corrispondenti campioni del segnale come è mostrato in Fig. V.3.

Se il campionamento si effettua alla velocità limite definita dalle

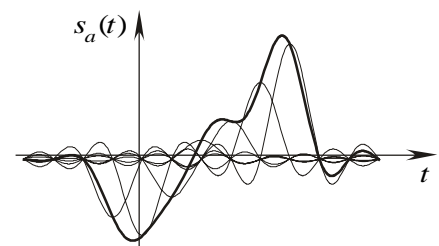
$$(VI.2.14) \quad T_c = \frac{1}{2f_m} \quad \text{ovvero} \quad f_c = 2f_m$$

(detti **limiti di Nyquist**), la (VI.2.13) diviene:

$$(VI.2.15) \quad s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{n}{2f_m}\right) \text{sinc}(2f_m t - n)$$

### VI.3 - Il campionamento reale.

Dalla (VI.2.11) è evidente che la ricostruzione del segnale analogico  $s_a(t)$  si ottiene filtrando con un filtro ideale passa basso la ripetizione periodica di  $S_a(f)$  con periodicità



**Fig. VI.3** - Ricostruzione di un segnale

pari a  $f_c = \frac{1}{T_c}$ . Nel dominio del tempo tale ripetizione periodica corrisponde al segnale a tempo continuo:

$$(VI.3.1) \quad s_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{F}^{-1} \{S_a(f - nf_c)\} = s_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_c t}$$

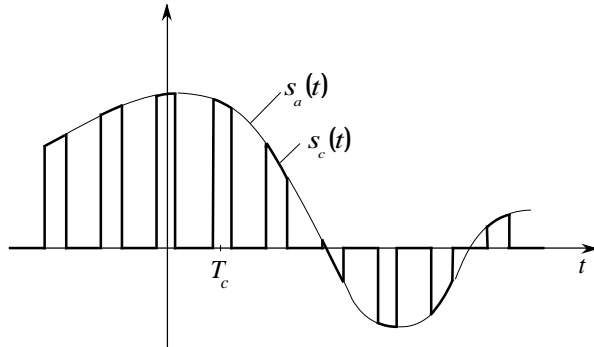


Fig. VI.4 - Campionamento naturale

che può essere considerato come il prodotto di  $s_a(t)$  per la funzione campionatrice:

$$(VI.3.2) \quad v_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n f_c t}$$

Tenendo conto della somma di Poisson,  $s_c(t)$  può essere riscritto nella forma:

$$(VI.3.3) \quad v_0(t) = T_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_c)$$

Un campionatore di questo tipo risulta impraticabile, tuttavia una sua possibile realizzazione può essere ottenuta se la funzione campionatrice è approssimata con un treno di impulsi rettangolari di durata  $T$  del tipo:

$$(VI.3.4) \quad v_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_c}{T}\right)$$

in cui la durata  $T$  del rettangolo si suppone minore del periodo  $T_c$ . Il segnale campionato vale così:

$$(VI.3.5) \quad s_c(t) = s_a(t) \cdot v_0(t) = s_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - nT_c}{T}\right)$$

e si presenta come indicato in Fig. V.4 (**campionamento naturale**).

Poiché sviluppando  $v_0(t)$  in serie di Fourier, è:

$$(VI.3.6) \quad V_0(f) = \mathbf{F} \{v_0(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{F} \{V_{0n} e^{j2\pi n f_c t}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{0n} \delta(f - n f_c)$$

con:

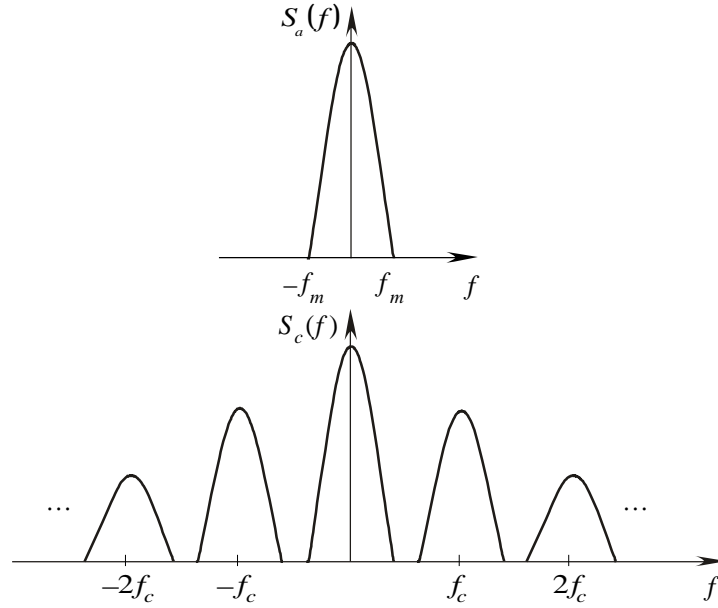
$$(VI.3.7) \quad V_{0n} = \frac{1}{T_c} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi n f_c t} dt = \frac{T}{T_c} \text{sinc}(n f_c T)$$

la trasformata di Fourier di  $s_c(t)$ , ricordando il teorema della convoluzione nel dominio della frequenza, vale:

$$(VI.3.8) \quad \begin{aligned} S_c(f) &= S(f) * V_0(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{0n} \int_{-\infty}^{\infty} S(\varphi) \delta(f - \varphi - n f_c) d\varphi = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{0n} S(f - n f_c) = \frac{T}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}(n f_c T) S(f - n f_c) \end{aligned}$$

Lo spettro del segnale  $s_c(t)$  si presenta allora come è mostrato in Fig. V.7 se è:  $f_c \geq 2f_m$ . Il segnale  $S_c(f)$  contiene lo spettro  $S_a(f)$  del segnale  $s_a(t)$  moltiplicato per il fattore  $\frac{T}{T_c}$ ; le varie ripetizioni sono a loro volta moltiplicate per  $\frac{T}{T_c} \text{sinc}(n f_c T)$ . Un filtraggio del segnale  $s_c(t)$  con un filtro passa-basso ideale di banda  $f_m$  elimina le componenti a frequenze  $|f| > f_m$  e recupera così il segnale  $s_a(t)$ .

Un'altra possibilità di campionamento è il cosiddetto **campionamento istantaneo** dove il segnale campionato vale:

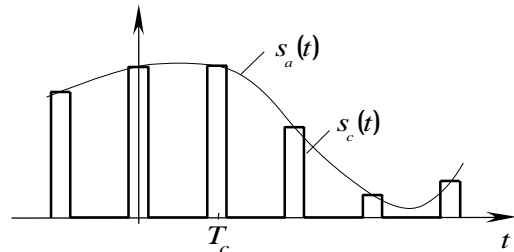


**Fig. VI.7** - Spettro del segnale campionato con il campionamento naturale

$$(VI.3.9) \quad s_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(nT_c) \text{rect}\left(\frac{t-nT_c}{T}\right)$$

ed il cui andamento è riportato in Fig. V.8.

Nel campionamento istantaneo gli impulsi che costituiscono il segnale campionato hanno forma rettangolare e le altezze dipendono dai valori  $s_a(nT_c)$  dei campioni del segnale  $s_a(t)$ .



**Fig. VI.8** - Campionamento istantaneo.

Prendendo le trasformate di Fourier della (VI.3.9), si ottiene:

$$(VI.3.10) \quad S_c(f) = T \text{sinc}(fT) \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(nT_c) e^{-j2\pi n f T_c}$$

dove si è applicato la proprietà della traslazione nel dominio del tempo e si è tenuto conto che è  $F\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = T \text{sinc}(fT)$ . D'altra parte si può scrivere:

$$(VI.3.11) \quad \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(nT_c) e^{-j2\pi n f T_c} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\varphi) e^{j2\pi n \varphi T_c} d\varphi \right] e^{-j2\pi n f T_c} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\varphi) e^{j2\pi n (\varphi - f) T_c} d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\varphi) \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n (\varphi - f) T_c} \right] d\varphi \end{aligned}$$

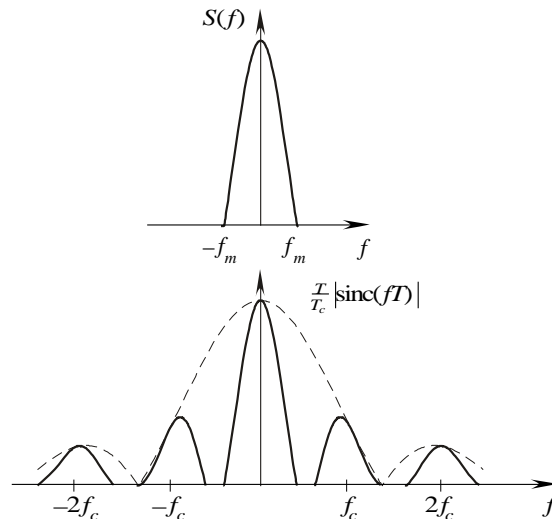
che, ricordando la somma di Poisson, diventa:

$$(VI.3.12) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_a(nT_c) e^{-j2\pi n f T_c} = \int_{-\infty}^{\infty} S_a(\varphi) \left[ \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\varphi - f + \frac{n}{T_c}\right) \right] d\varphi = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a\left(f - \frac{n}{T_c}\right)$$

Sostituendo la (VI.3.12) nella (VI.3.10) si ha:

$$(VI.3.13) \quad S_c(f) = \frac{T}{T_c} \text{sinc}(fT) \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_a\left(f - \frac{n}{T_c}\right)$$

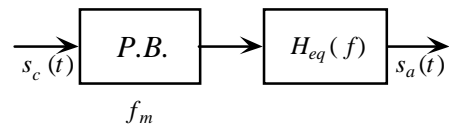
Lo spettro del segnale campionato è mostrato in Fig. V.9. Da essa si rileva che a causa del termine moltiplicativo  $\frac{T}{T_c} \text{sinc}(fT)$ , tale spettro non contiene quello  $S_a(f)$  del segnale  $s_a(t)$  anche nella porzione contenuta nell'intervallo  $(-f_m, f_m)$ . Di conseguenza un filtro passa-basso non è in grado di ricostruire l'informazione a meno che non si faccia ricorso a un *equalizzatore* così com'è indicato in Fig. V.10. Se la risposta in frequenza dell'equalizzatore vale:



**Fig. VI.9** - Spettro del segnale campionato con il campionamento istantaneo.

$$(VI.3.14) \quad H_{eq}(f) = \frac{T}{T_c} \frac{1}{\text{sinc}(fT)}$$

il segnale in uscita dal sistema di figura è una replica esatta del segnale  $s(t)$ . Tuttavia se  $T$  è molto piccolo rispetto a  $\frac{1}{f_m}$  nell'intervallo  $(-f_m, f_m)$ , la funzione  $\text{sinc}(fT)$  si può ritenere costante cosicché la ricostruzione può essere effettuata nello stesso modo del campionamento naturale.



**Fig. VI.10** - Ricostruzione del segnale nel caso di campionamento istantaneo.

### VI.4 - Il campionamento dei segnali passa-banda.

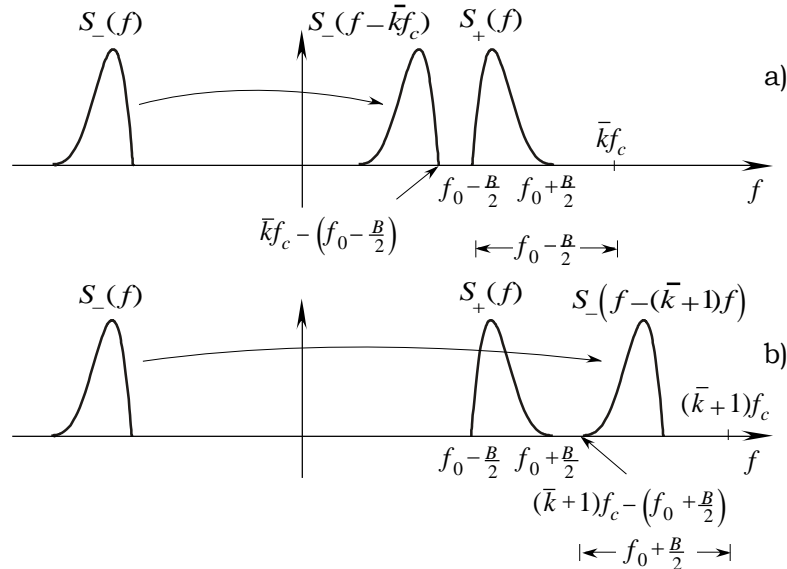
Le considerazioni svolte precedentemente possono essere estese al caso dei segnali passa-banda, effettuando il campionamento con frequenza non inferiore al doppio della massima frequenza contenuta nel suo spettro. Per segnali di tipo passa-banda, tuttavia, è talvolta possibile effettuare un campionamento a frequenza inferiore a quella del limite di Nyquist. Infatti il campionamento del segnale è possibile solo quando esso può essere ricostruito a partire dai suoi valori campionati o, che è lo stesso, quando i vari spettri che nascono dalla ripetizione periodica di quello del segnale, non interferiscano tra loro entro la banda del segnale stesso.

È facile innanzi tutto riconoscere che data la generica ripetizione periodica della spettro, effettuata con frequenza  $f_c$ :

$$(VI.4.1) \quad S_a(f - kf_c) = S_a^+(f - kf_c) + S_a^-(f - kf_c)$$

in cui  $S_a^+(f)$  e  $S_a^-(f)$  denotano le componenti a frequenze positive e negative e cioè le porzioni dello spettro contenute nei semi-intervalli  $(0, \infty)$  e  $(-\infty, 0)$  rispettivamente, l'eventuale interferenza si può verificare se, esiste un valore dell'indice  $k$  per cui il termine  $S_a^-(f - kf_c)$  va a sovrapporsi con la componente  $S_a^+(f)$  dello spettro (o il termine  $S_a^+(f - kf_c)$  va a sovrapporsi con la componente  $S_a^-(f)$  dello spettro).

Sia  $\bar{k}$  il massimo valore dell'indice  $k$  per cui la componente  $S_a^-(f - \bar{k}f_c)$  si mantiene a sinistra di  $S_a^+(f)$  per cui è (v. Fig. V.11,a):



**Fig. VI.11** - Determinazione degli intervalli di frequenze di campionamento possibili per un segnale passa-banda.

$$(VI.4.2) \quad \bar{k}f_c - \left(f_0 - \frac{B}{2}\right) \leq f_0 - \frac{B}{2}$$

Il termine  $S_a^-(f - (k+1)f_c)$ , relativo alla successiva ripetizione dello spettro del segnale deve rimanere alla sinistra di  $S_a^+(f)$  perché non si abbia interferenza. Ciò comporta che si deve verificare la condizione (v. Fig. V.11,b):

$$(VI.4.3) \quad (k+1)f_c - \left(f_0 + \frac{B}{2}\right) \geq f_0 + \frac{B}{2}$$

Dalle (VI.4.2) e (VI.4.3) si ottiene:

$$(VI.4.4) \quad \frac{2f_0 + B}{k+1} \leq f_c \leq \frac{2f_0 - B}{k}$$

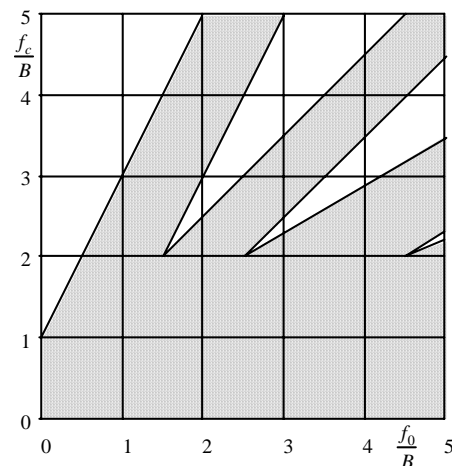
che definiscono un intervallo di frequenza di campionamento possibili solo per quei valori di  $\bar{k}$  per cui risulta  $\frac{2f_0 + B}{k+1} \leq \frac{2f_0 - B}{k}$ ; ciò implica

che  $\bar{k}$  deve soddisfare la seguente limitazione:

$$(VI.4.5) \quad \bar{k} \leq \left\lceil \frac{f_0}{B} - \frac{1}{2} \right\rceil$$

dove si è denotato con  $\lceil x \rceil$  la parte intera di  $x$

I risultati così ottenuti sono riportati nel diagramma di Fig. VI.11 dal quale si possono dedurre tutti i valori possibili delle frequenze di campionamento conoscendo la banda del segnale e la sua frequenza di centro banda. Al



**Fig. VI.11** - Intervalli di frequenze di campionamento possibili per un segnale passa-basso in funzione di  $f_0 / B$ .

crescere di  $\frac{f_0}{B}$  insorgono degli intervalli di frequenze di campionamento possibili di valore assai vicino al limite teorico  $2B$ ; ma di ampiezza assai piccola. Un campionamento in tali condizioni quindi potrebbe porre proibitive condizioni nei confronti della stabilità in frequenza del generatore della funzione campionatrice.