

Capitolo VII

VALUTAZIONE NUMERICA DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

VII.1 – Valutazione della trasformata di Fourier di un segnale a tempo continuo.

Uno dei fondamentali problemi della Teoria dei segnali consiste nella valutazione numerica della trasformata di Fourier di un segnale a tempo continuo e ad energia finita. Sia $s(t)$ un segnale di questo tipo che, seppur non rigorosamente passa basso, consenta comunque di definire un opportuno intervallo di frequenze $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$ al di fuori del quale resta una frazione trascurabile della sua energia specifica. In tali ipotesi la sua trasformata di Fourier si può approssimare dalla:

$$(VII.1.1) \quad S(f) \cong S_c(f) \cdot \text{rect}(fT)$$

essendo:

$$(VII.1.2) \quad S_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

la ripetizione periodica di $S(f)$. Poiché $S_c(f)$ è una funzione periodica con periodo $\frac{1}{T}$, essa può essere sviluppata in serie di Fourier e si ha:

$$(VII.1.3) \quad S_c(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{cn} e^{j2\pi n f T}$$

dove:

$$(VII.1.4) \quad S_{cn} = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S_c(f) e^{-j2\pi n f T} df \cong T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} S(f) e^{-j2\pi n f T} df = T \cdot s(-nT)$$

Si ha dunque:

$$(VII.1.5) \quad S_c(f) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(-nT) e^{j2\pi n f T} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) e^{-j2\pi n f T}$$

e pertanto:

$$(VII.1.6) \quad S(f) = T \text{rect}(fT) \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) e^{-j2\pi n f T}$$

Si campioni adesso la funzione $S(f)$ scegliendo un passo di campionamento pari a $\frac{1}{NT}$; il generico campione vale così:

$$(VII.1.7) \quad S\left(\frac{m}{NT}\right) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) e^{-j2\pi \left(\frac{m}{N}\right) n} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1)$$

che, introducendo la trasformazione di variabili $\ell = n - kN$, si scrive:

$$(VII.1.8) \quad S\left(\frac{m}{NT}\right) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} s(\ell T + kNT) e^{-j2\pi \left(\frac{m}{N}\right) (\ell + kN)} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1)$$

che, scambiando l'ordine delle sommatorie, si muta nella:

$$(VII.1.9) \quad S\left(\frac{m}{NT}\right) = T \sum_{\ell=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} s(\ell T + kNT) \right] e^{-j2\pi \left(\frac{m}{N}\right) \ell} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1)$$

È immediato rendersi conto che la sommatoria interna è la ripetizione periodica del segnale $s(nT)$ effettuata con periodicità NT . È ovvio che tale ripetizione periodica è diversa dal segnale $s(nT)$. Tuttavia, se è possibile determinare una quantità NT tale che si possa porre:

$$(VII.1.10) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(nT + kNT) \cong s(nT) \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

la (VII.1.9) diviene:

$$(VII.1.11) \quad S\left(\frac{m}{NT}\right) = T \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) e^{-j2\pi\left(\frac{mn}{N}\right)} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1)$$

La (VII.1.11), sfruttando l'ortogonalità delle $e^{-j2\pi\left(\frac{mn}{N}\right)}$ per $n, m = 0, 1, \dots, N-1$, può essere invertita e si ottiene:

$$(VII.1.12) \quad s(nT) = \frac{1}{NT} \sum_{m=0}^{N-1} S\left(\frac{m}{NT}\right) e^{j2\pi\left(\frac{mn}{N}\right)} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

Le (VII.1.12) definiscono una coppia di **trasformate discrete di Fourier** di ordine N .

VII. 2 – La trasformata discreta di Fourier.

Normalmente le (VII.1.11) e (VII.1.12) vengono utilizzate normalizzando il quanto temporale ($T = 1$) e quindi diventano

$$(VII.2.1) \quad S[m] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-j2\pi\frac{nm}{N}} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1)$$

$$(VII.2.2) \quad s[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S[m] e^{j2\pi\frac{nm}{N}} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

Dall'esame delle precedenti si può constatare che le sequenze $s[n]$ e $S[m]$ sono periodiche di periodo N , essendo:

$$(VII.2.3) \quad s[n + kN] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S[m] e^{j2\pi\frac{(n+kN)m}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S[m] e^{j2\pi\frac{nm}{N}} = s[n]$$

e

$$(VII.2.4) \quad S[m + kN] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-j2\pi\frac{n(m+kN)}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-j2\pi\frac{nm}{N}} = S[m]$$

cosicché possono essere prolungate al di fuori degli intervalli ($0 \leq n, m \leq N-1$). Ciò significa che $s[n]$ e $S[m]$ coincidono con i campioni di $s(t)$ e $S(f)$ nell'insieme $\{0, N-1\}$, ma non al di fuori di esso. Per sottolineare tale differenza è allora opportuno denotare con $\tilde{s}[n]$ e $\tilde{S}[m]$ le sequenze periodizzate; di conseguenza le (VII.2.3) e (VII.2.4) possono essere riscritte nella forma:

$$(VII.2.5) \quad \tilde{S}[m] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{s}[n] e^{-j2\pi\frac{nm}{N}}$$

$$(VII.2.6) \quad \tilde{s}[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{S}[m] e^{j2\pi\frac{nm}{N}}$$

che costituiscono una coppia di trasformate denominate **trasformate** (diretta ed inversa) **discrete di Fourier** (DFT).

Definendo con s_N e S_N i seguenti vettori

$$(VII.2.7) \quad s_N = [s_p(0) \ s_p(1) \ \dots \ s_p(N-1)]^T, \quad S_N = [S_p(0) \ S_p(1) \ \dots \ S_p(N-1)]^T$$

e con W_N la seguente matrice:

$$(VII.2.8) \quad W_N = \left[e^{-j2\pi \frac{ij}{N}} \right]_{i,j}^{0,N-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi \frac{1}{N}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{N-1}{N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j2\pi \frac{N-1}{N}} & \dots & e^{-j2\pi \frac{(N-1)(N-1)}{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & \dots & W_N^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

dove si è posto:

$$(VII.2.9) \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

si ha:

$$(VII.2.10) \quad S_N = W_N s_N$$

In maniera analoga si ottiene:

$$(VII.2.11) \quad s_N = \frac{1}{N} W_N^* S_N$$

Dal confronto delle (VII.2.10) e (VII.2.11) discende:

$$(VII.2.12) \quad W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^*$$

che, denotando con I_N la matrice unitaria di ordine N , si può scrivere come segue:

$$(VII.2.13) \quad W_N W_N^* = N I_N$$

La matrice W_N è pertanto una matrice ortogonale.

Come nel caso delle altre trasformate di Fourier, la DFT gode di proprietà che sono riassunte nella Tabella VII.1

Tabella VII.1 – Proprietà della trasformata discreta di Fourier.

Proprietà	Segnale	Trasformata	Note
Linearità	$\sum_{i=1}^k a_i \tilde{s}_i[n]$	$\sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i[m]$	a_i costanti
Segnale coniugato	$\tilde{s}^*[n]$	$\tilde{S}^*[-m]$	
Trasformata coniugata	$\tilde{s}^*[-n]$	$\tilde{S}^*[m]$	
Traslazione in n	$\tilde{s}[n - n_0]$	$e^{-j2\pi \frac{nm_0}{N}} \tilde{S}[m]$	n_0 intero
Traslazione in m	$e^{j2\pi \frac{nm_0}{N}} \tilde{s}^*[m]$	$\tilde{S}[m - m_0]$	m_0 intero
Differenza in avanti in n	$\tilde{s}[n+1] - \tilde{s}[n]$	$[e^{j2\pi \frac{m}{N}} - 1] \tilde{S}[m]$	
Differenza all'indietro in n	$\tilde{s}[n] - \tilde{s}[n-1]$	$[1 - e^{-j2\pi \frac{m}{N}}] \tilde{S}[m]$	
Differenza in avanti in m	$[e^{-j2\pi \frac{n}{N}} - 1] \tilde{s}[n]$	$\tilde{S}[m+1] - \tilde{S}[m]$	
Differenza all'indietro in m	$[1 - e^{j2\pi \frac{n}{N}}] \tilde{s}[n]$	$\tilde{S}[m] - \tilde{S}[m-1]$	
Convoluzione in n	$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{s}_1[k] \tilde{s}_2[n-k]$ $\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{s}_1[n-k] \tilde{s}_2[k]$	$\tilde{S}_1[m] \tilde{S}_2[m]$	

Convoluzione in m	$\tilde{s}_1[n]\tilde{s}_2[n]$	$\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{S}_1[k]\tilde{S}_2[m-k]$ $\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{S}_1[m-k]\tilde{S}_2[k]$	
---------------------	--------------------------------	---	--

VII.3 – La trasformata rapida di Fourier.

L'applicazione della trasformata discreta di Fourier all'analisi dei segnali ha inizialmente incontrato una difficoltà a causa della notevole complessità di calcolo richiesta per eseguire le operazioni che comportano le (VIII.2.1) che qui vengono riscritte nella forma:

$$(VII.3.1) \quad S[m] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]W_N^{mn} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1)$$

$$(VII.3.2) \quad s[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} S[m]W_N^{-mn} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

essendo W_N definito dalla (VII.2.9).

Riferendoci per semplicità alla trasformazione diretta e supponendo che i dati $\{s[n]\}_{n=0}^{N-1}$ e i risultati della trasformazione $\{S[m]\}_{m=0}^{N-1}$ siano sequenze composte da elementi complessi, è immediato rendersi conto che per eseguire il calcolo del coefficiente $S[m]$ occorrono

- N moltiplicazioni complesse (tra i termini $s[n]$ e W_N^{mn})
- $N-1$ addizioni complesse

Poiché i coefficienti da calcolare sono N , occorrono, in definitiva:

- N^2 moltiplicazioni complesse
- $N(N-1)$ addizioni complesse

Se N è abbastanza elevato, si può ritenere che il numero di operazioni (moltiplicazioni o addizioni complesse) è pari a N^2 e cioè varia con il quadrato del numero dei punti. Poiché il tempo di calcolo può ritenersi proporzionale al numero di operazioni, è evidente che il tempo di elaborazione richiesto può raggiungere valori inaccettabili.

Per ridurre la complessità sono stati elaborati diversi algoritmi di calcolo che vanno sotto il nome di algoritmi di **trasformata rapida di Fourier** o algoritmi FFT (**F**ast **F**ourier **T**ransform).

In quel che segue sono presi in considerazione le due classi di algoritmi più comunemente adoperati che vanno sotto il nome di algoritmi basati sulla cosiddetta **decimazione nel tempo** e nella **decimazione nella frequenza**. È bene precisare che tali algoritmi possono essere applicati quando il numero di punti è una potenza di 2 e cioè se è

$$(VII.3.3) \quad N = 2^r$$

VII.3.1 – Algoritmi basati sulla decimazione nel tempo.

Con riferimento alla trasformata diretta definita dalla (VIII.3.1,a), si partizioni la sequenza di dati $\{s[n]\}_{n=0}^{N-1}$ in due sotto-sequenze $\{s[2k]\}_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}$ e $\{s[2k+1]\}_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}$ costituita dagli elementi di posto pari e di posto dispari rispettivamente. La (VII.3.1) così diventa:

$$\begin{aligned}
 S[m] &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s[2k]W_N^{m2k} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s[2k+1]W_N^{m(2k+1)} = \\
 &= \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s[2k](W_N^2)^{mk} + W_N^m \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s[2k+1](W_N^2)^{mk}
 \end{aligned}
 \tag{VII.3.4}$$

Ma è:

$$W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} = W_{\frac{N}{2}}
 \tag{VII.3.5}$$

per cui la (VIII.3.2) diventa:

$$S[m] = \underbrace{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s[2k]W_{N/2}^{mk}}_{P_1[m]} + W_N^m \underbrace{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s[2k+1]W_{N/2}^{mk}}_{Q_1[m]} \quad (m = 0, 1, \dots, N-1)
 \tag{VII.3.6}$$

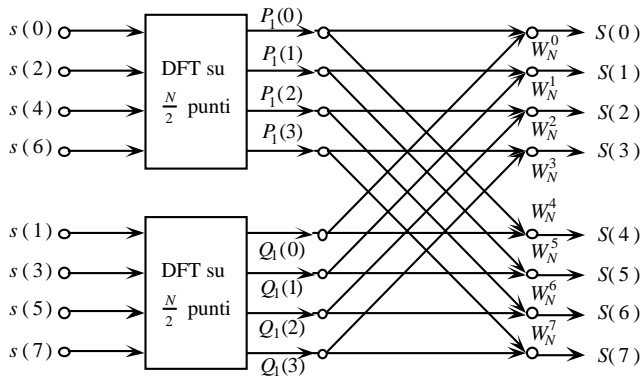


Fig. VII.2 - Scomposizione di una DFT su N punti.

diagramma di flusso di Fig. VII.2.

La procedura così esposta può essere iterata e cioè ogni DFT su $\frac{N}{2}$ punti può essere calcolata, in accordo con la (VIII.3.4), suddividendo ulteriormente i dati in ingresso in due sotto-insiemi composti dagli elementi di posto pari e da quelli di posto dispari rispettivamente. Così la $P_1[m]$ può essere schematizzata com'è mostrato nel grafo di Fig. VII.

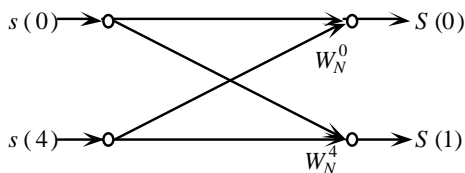


Fig. VII.4 - Dft su 2 punti

dove le due sommatorie, denotate con $P_1[m]$ e $Q_1[m]$, identificano due DFT su $\frac{N}{2}$ punti. È da osservare che anche se l'indice m corre da 0 a $N-1$, ogni somma si può calcolare per valori di m appartenenti all'intervallo $\{0, \frac{N}{2}-1\}$ dato che le sommatorie sono periodiche in m con periodicità $\frac{N}{2}$. Le operazioni coinvolte nella (VIII.3.4) sono rappresentate nel

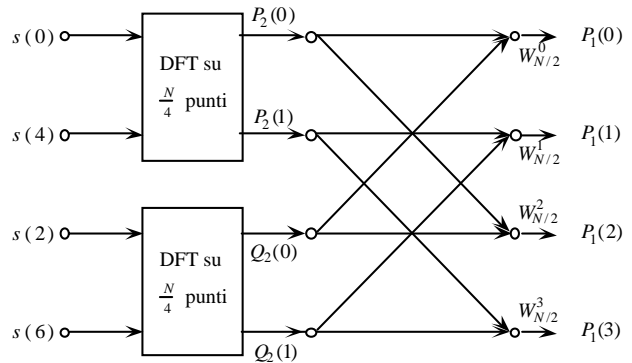


Fig. VII.3 - Scomposizione di una DFT di N/2 punti

3. Lo stesso si può fare per quanto riguarda la $P_2[m]$ la procedura si arresta quando si ottiene una DFT su due punti:

$$\begin{aligned}
 S(0) &= s(0) + s(1) \\
 S(1) &= s(0) - s(1)
 \end{aligned}
 \tag{VII.3.7}$$

alla quale corrisponde il grafo di Fig. VII.4.

VII.3.3 - Algoritmi basati sulla decimazione nella frequenza.

A differenza degli algoritmi basati sulla decimazione nel tempo, questi algoritmi sono ottenuti suddividendo la sommatoria che compare nella (VIII.3.1.a) come segue:

$$\begin{aligned}
 S[m] &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s[n]W_N^{mn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} s[n]W_N^{mn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s[n]W_N^{mn} + \sum_{n'=0}^{\frac{N}{2}-1} s[n'+\frac{N}{2}]W_N^{m[n'+\frac{N}{2}]} = \\
 \text{(VII.3.8)} \quad &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s[n]W_N^{mn} + W_N^{m\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} s[n+\frac{N}{2}]W_N^{mn}
 \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della trasformazione di indici $n = n' + \frac{N}{2}$. Poiché è

$$\text{(VII.3.9)} \quad W_N^{m\frac{N}{2}} = e^{-j2\pi\frac{mN}{2N}} = e^{-j\pi m} = (-1)^m$$

la precedente si può riscrivere come segue:

$$\text{(VII.3.10)} \quad S(m) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(s[n] + (-1)^m s\left[n+\frac{N}{2}\right] \right) W_N^{mn}$$

Considerando adesso separatamente i termini di posto pari ($m = 2k$) da quelli di posto dispari ($m = 2k + 1$), dalla precedente si deduce:

$$\text{(VII.3.11)} \quad S[2k] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{\left(s[n] + s\left[n+\frac{N}{2}\right] \right)}_{p_1[n]} W_N^{2kn} \quad S[2k+1] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \underbrace{\left(s[n] - s\left[n+\frac{N}{2}\right] \right)}_{q_1(n)} W_N^n W_N^{2kn}$$

che, tenendo conto della (VIII.3.3), diventano:

$$\begin{aligned}
 \text{(VII.3.12)} \quad S(2k) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(s[n] + s\left[n+\frac{N}{2}\right] \right) W_{N/2}^{kn} & (k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1) \\
 S(2k+1) &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left(s[n] - s\left[n+\frac{N}{2}\right] \right) W_N^n W_{N/2}^{kn} & (k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1)
 \end{aligned}$$

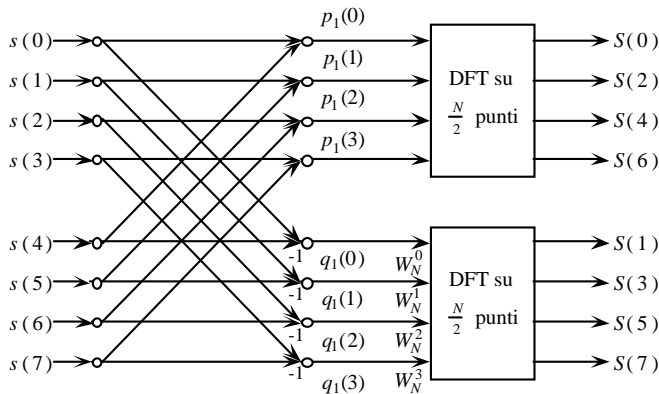


Fig. VII.5 – Scomposizione di una DFT su N punti.

$\{S[0], S[2], S[4], S[6]\}$ può essere generata come è indicato nel grafo di Fig. VII.6.

La procedura si arresta fino a quando non si perviene ad una DFT su 2 punti, rappresentata dal grafo di Fig. VII.7.

VII.3.2 – Riduzione della complessità.

Per valutare la riduzione di complessità

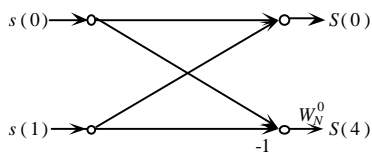


Fig. VII.7 – DFT su 2 punti

e cioè il calcolo della DFT su N è così ricondotto a quelle di due DFT su $\frac{N}{2}$ punti.

In Fig. VII.5 è riportato il grafo di flusso delle (VII.3.12).

La procedura esposta può essere reiterata; cioè ogni DFT su $\frac{N}{2}$ punti può essere espressa in 2 DFT su $\frac{N}{4}$ punti. Così la sequenza

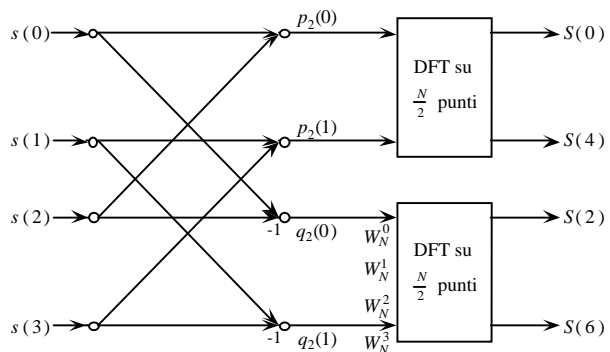


Fig. VII.6 – Scomposizione di una DFT di $\frac{N}{2}$ punti

connessa con l’algoritmo di decimazione nel tempo e nella frequenza, basta osservare che detto $\mathbf{N}(N)$ il numero totale di operazioni complesse (moltiplicazioni e addizioni) necessarie per il calcolo di una DFT su N punti, dal-

le (VII.3.6) e (VII.3.11) si deduce la seguente regola:

$$(VII.3.13) \quad \mathcal{N}(N) = \underbrace{\mathcal{N}\left(\frac{N}{2}\right) + N}_{\text{moltiplicazioni complesse}} + \underbrace{\mathcal{N}\left(\frac{N}{2}\right) + N}_{\text{addizioni complesse}} = 2\mathcal{N}\left(\frac{N}{2}\right) + 2N$$

che iterata successivamente fornisce:

$$(VII.3.14) \quad \begin{aligned} \mathcal{N}(N) &= 2 \left[\left[2\mathcal{N}\left(\frac{N}{4}\right) + 2\frac{N}{2} \right] \right] + 2N = 4\mathcal{N}\left(\frac{N}{4}\right) + 4N \\ \mathcal{N}(N) &= 4 \left[\left[2\mathcal{N}\left(\frac{N}{8}\right) + 2\frac{N}{4} \right] \right] + 4N = 8\mathcal{N}\left(\frac{N}{8}\right) + 6N \\ \mathcal{N}(N) &= 8 \left[\left[2\mathcal{N}\left(\frac{N}{16}\right) + 2\frac{N}{8} \right] \right] + 6N = 16\mathcal{N}\left(\frac{N}{16}\right) + 8N \\ \mathcal{N}(N) &= 16 \left[\left[2\mathcal{N}\left(\frac{N}{32}\right) + 2\frac{N}{16} \right] \right] + 8N = 32\mathcal{N}\left(\frac{N}{32}\right) + 10N \\ &\dots\dots\dots \\ \mathcal{N}(N) &= N\mathcal{N}\left(\frac{N}{N}\right) + (2 \cdot \log_2 N) \cdot N \end{aligned}$$

Poichè è $\mathcal{N}\left(\frac{N}{N}\right) = \mathcal{N}(1) = 1$, dal momento che la DFT su un punto comporta $S[0] = s[0] \cdot W_N^0$ e

quindi una sola operazione, si deduce che il numero totale di operazioni è:

$$(VII.3.15) \quad \mathcal{N}(N) = N + (2 \cdot \log_2 N) \cdot N \cong 2N \log_2 N$$

che confrontata con $2N^2$ che è il numero totale di operazione richieste nel calcolo diretto, comporta una riduzione di complessità del fattore:

$$(VII.3.16) \quad v = \frac{\log_2 N}{N}$$

che è molto piccolo per elevati valori di N .