

**1 - Definizione e classificazione dei segnali.**

Una grandezza fisica, alla cui variazione in funzione di determinate variabili, quali, ad esempio, il tempo, le coordinate di un punto nel piano o entrambe, è associata una certa quantità di informazione, costituisce un **segnale**.

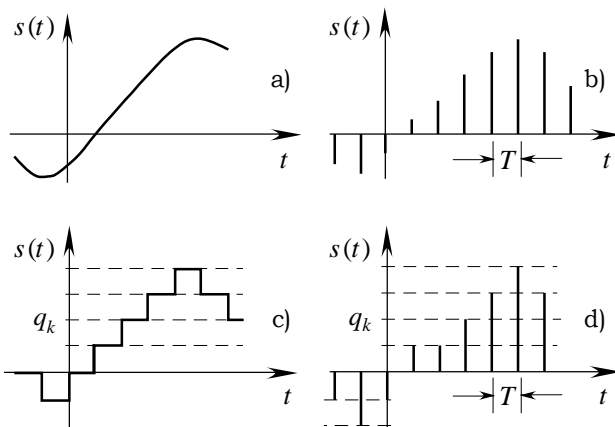
A seconda degli aspetti che interessa mettere in evidenza è possibile classificare i segnali secondo criteri diversi.

Una prima classificazione è di natura **fenomenologica**. Essa è basata sul tipo d'evoluzione subita dal segnale in funzione delle variabili indipendenti. Su questa base i segnali si distinguono in **determinati** e **aleatori**.

Limitandosi per il momento a considerare segnali che dipendono esclusivamente dal tempo, un segnale si dice determinato se i valori che esso assume in corrispondenza ad un qualsiasi istante sono conosciuti esattamente. Per contro i segnali aleatori sono quelli il cui andamento temporale è imprevedibile, anche se è possibile determinarne alcune caratteristiche medie. Di conseguenza, mentre un segnale determinato è perfettamente ripetibile, altrettanto non si può dire per un segnale aleatorio giacché, per la sua natura casuale, esso può assumere forme diverse anche se è osservato in esperimenti effettuati nelle medesime condizioni.

Una seconda classificazione dei segnali è di natura **morfologica**. Essa si basa sul carattere continuo o discreto dell'ampiezza del segnale o dalle variabili da cui dipende la sua evoluzione.

Facendo riferimento a segnali dipendenti soltanto dal tempo, si possono distinguere i segnali continui nel tempo (**segnali a tempo continuo**) e i segnali discreti nel tempo (**segnali a tempo discreto**).



**Fig.1** - a) Segnale a tempo continuo. b) Segnale a tempo discreto. c) Segnale quantizzato. d) Segnale numerico.

Nel primo caso la variabile  $t$  può assumere un qualsiasi valore appartenente ad un assegnato intervallo di ampiezza finita o infinita (v. Fig. 1,a). Nel secondo caso la variabile indipendente è definita in un insieme al più numerabile di valori  $\{t_n\}$  con  $\dots \leq t_{n-1} \leq t_n \leq t_{n+1} \leq \dots$  (v. Fig. 1,b). Di norma gli istanti  $\{t_n\}$  si succedono con regolarità cioè si ha  $t_n = nT$  cosicché l'insieme  $\{t_n\}$  è completamente specificato

individuando il periodo  $T$  ed il campo di variabilità dell'indice  $n$ .

Se infine l'ampiezza del segnale può assumere un insieme finito di valori  $\{q_n\}$  con  $q_{n-1} \leq q_n \leq q_{n+1}$ , il segnale si dice discreto in ampiezza. Un segnale discreto in ampiezza può

essere ulteriormente classificato in **segnale quantizzato** (v. Fig. 1,c) e in **segnale numerico** (v. Fig. 1,d) se esso è a tempo continuo o discreto.

Una terza classificazione è di natura **energetica**.

A tale scopo si definisce **energia specifica** associata ad un segnale rappresentato da una funzione definita su tutto l'asse dei tempi a valori generalmente complessi, la quantità:

$$(1.1) \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |s(t)|^2 dt$$

e cioè intendendo che l'integrale su tutto l'asse reale sia definito come il valore principale di Cauchy.

La **potenza specifica**, in armonia con la (1.1), è definita dal limite:

$$(1.2) \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt$$

Le definizioni di energia specifica e di potenza specifica appena fornite per i segnali a tempo continuo possono essere facilmente estese ai segnali a tempo discreto. In tal caso l'energia e la potenza specifica del segnale sono rispettivamente definite dalle:

$$(1.3) \quad E = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(nT)|^2$$

$$(1.4) \quad P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N |s(nT)|^2$$

Si noti che un segnale ad energia finita presenta una potenza specifica nulla; inoltre se la potenza specifica definita dalla (1.2) o dalla (1.4) è maggiore di zero, le quantità a secondo membro delle (1.1) e (1.3) non sono finite.

Ciò premesso, si definiscono segnali ad **energia finita** quei segnali la cui l'energia specifica è finita. Si dicono **potenza finita** quei segnali per i quali è finita e non nulla la potenza specifica.

Un'ulteriore classificazione è di natura **dimensionale**. Essa è basata sul numero di variabili indipendenti da cui il segnale dipende. Ad esempio i segnali che dipendendo soltanto dal tempo sono mono-dimensionali, mentre un'immagine fissa e una sequenza di immagini in bianco e nero sono esempi di un segnale rispettivamente bi- e tri-dimensionale.

## 2 – Segnali notevoli.

In quel che segue sono presentati alcuni segnali di uso corrente.

### 2.1 Segnali a tempo continuo.

#### 2.1.1 - Esponenziale complesso.

$$(2.1) \quad s(t) = A e^{j2\pi \frac{t}{T_0}}$$

È un segnale complesso a potenza finita dato che risulta:

$$(2.2) \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = A^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = A^2$$

#### 2.1.2 - Segnali sinusoidali

$$(2.3) \quad s_c(t) = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right) \quad s_s(t) = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right)$$

Anche questi sono segnali a potenza finita dal momento che si ha:

$$\begin{aligned}
 P_c &= A^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2(2\pi \frac{t}{T_0}) dt = A^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 + \cos(4\pi \frac{t}{T_0})}{2} dt = \\
 (2.4) \quad &= A^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \cos(4\pi \frac{t}{T_0}) dt \right] = \frac{A^2}{2} \left[ 1 + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi \frac{T}{T_0})}{2\pi \frac{T}{T_0}} \right] = \frac{A^2}{2}
 \end{aligned}$$

In modo analogo

$$\begin{aligned}
 P_s &= A^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2(2\pi \frac{t}{T_0}) dt = A^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 - \cos(4\pi \frac{t}{T_0})}{2} dt = \\
 (2.5) \quad &= A^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} dt - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} \cos(4\pi \frac{t}{T_0}) dt \right] = \frac{A^2}{2} \left[ 1 - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi \frac{T}{T_0})}{2\pi \frac{T}{T_0}} \right] = \frac{A^2}{2}
 \end{aligned}$$

**2.1.3 - Rettangolo unitario.**

Si consideri la funzione  $rect(x)$  definita dalla

$$(2.6) \quad rect(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

che rappresenta un rettangolo di altezza unitaria confinato nell'intervallo  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , come è mostrato in Fig. 2. Il segnale

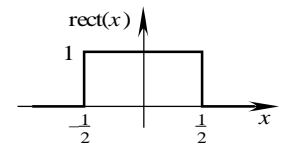


Fig.2 - Rettangolo unitario.

$$(2.7) \quad s(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$$

rappresenta, di conseguenza, un rettangolo di altezza unitaria confinato nell'intervallo  $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ .

Il segnale  $s(t)$ , definito dalla (2.6) è un segnale ad energia finita essendo

$$(2.8) \quad E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |s(t)|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = T$$

**2.1.4 - Segnale sinc.**

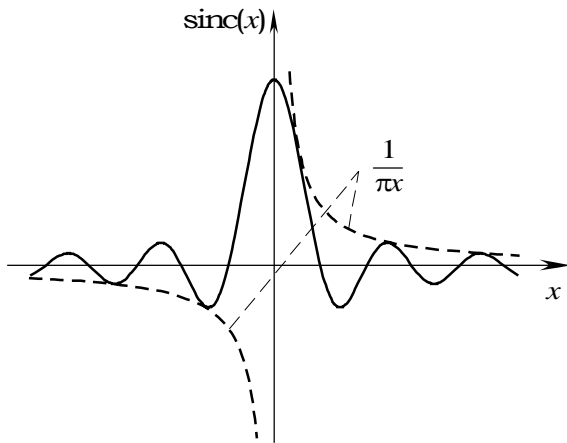


Fig.3 - Funzione sinc.

Si consideri la funzione  $sinc(x)$  definita dalla:

$$(2.9) \quad sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Essa, come mostra la Fig. 3, vale 1 per  $x=0$  e si annulla nei punti  $x = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Quando  $x \rightarrow \pm\infty$  la funzione  $sinc(x)$  tende a zero come  $x^{-1}$ .

**2.1.5 - Funzione segno.**

Si consideri la funzione  $sgn(x)$  definita dalla:

la:

$$(2.10) \quad sgn(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

e rappresentata in Fig. 4. Ad essa corrisponde un segnale a potenza finita essendo;

$$(2.11) \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} sgn^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt = 1$$

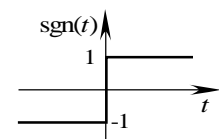
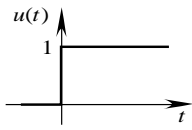


Fig.4 - Funzione segno.

**2.1.6 - Gradino unitario.**

È definito dalla

$$(2.12) \quad u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



ed è rappresentato in Fig. 5.

Esso è un segnale a potenza finita essendo:

$$(2.13) \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt = \frac{1}{2}$$

Fig.5 - Gradino unitario

## 2.2 Segnali a tempo discreto.

### 2.2.1 - Impulso unitario.

Il segnale  $\delta(nT)$  è definito dalla (v. Fig. 6):

$$(2.14) \quad \delta(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

È un segnale ad energia finita essendo

$$(2.15) \quad E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta^2(nT) = 1$$

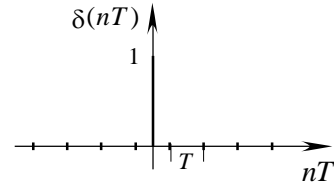


Fig.6 - Impulso unitario.

### 2.2.2 - Gradino unitario.

Il segnale:

$$(2.16) \quad u(nT) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

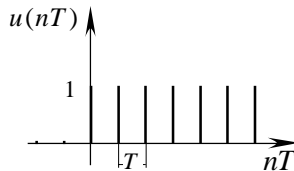


Fig.7 - Gradino unitario.

rappresenta il gradino unitario tempo discreto (v. Fig. 7). Esso è un segnale a potenza finita essendo:

$$(2.17) \quad P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N u^2(nT) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

## 3 - La delta di Dirac.

Per ottenere una rappresentazione intuitiva della delta di Dirac, basta considerare che, per ogni funzione  $\phi(t)$  continua nel punto  $t = 0$ , si può scrivere, invocando il teorema della media:

$$(3.1) \quad I_n = \int_{-\infty}^{\infty} n \text{rect}(nt) \phi(t) dt = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \phi(t) dt = \phi(\bar{t})$$

essendo  $\bar{t}$  un opportuno istante appartenente all'intervallo  $(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n})$ . (vedi Fig. 8). Al divergere di  $n$  si ha:

$$(3.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \phi(0)$$

dato che, al crescere di  $n$ ,  $\bar{t}$  tende a zero. Supponendo che si possono commutare le operazioni di limite con quello di integrazione, dalla (3.1), si ha:

$$(3.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0)$$

dove si è definito **delta di Dirac** la quantità:

$$(3.4) \quad \delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \text{rect}(nt)$$

È da osservare che la (3.3) deve intendersi come una formale scrittura delle operazioni indicate dalla (3.2).

È da osservare infine che seguendo tale interpretazione, dalla (3.4) si ottiene:

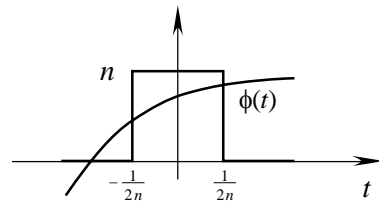


Fig.8 - Valutazione dell'integrale  $I_n$

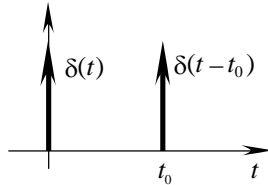
$$(3.5) \quad \delta(t-t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{rect}[n(t-t_0)]$$

che equivale alla:

$$(3.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\phi(t)dt = \phi(t_0)$$

che definisce la delta di Dirac traslata.

D'altra parte, essendo:



$$(3.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} n \operatorname{rect}(nt)dt = 1$$

si ha al limite per  $n \rightarrow \infty$  :

$$(3.8) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

**Fig.9** - Rappresentazione della  $\delta(t)$  e della  $\delta(t-t_0)$ .

Le (3.7) e (3.8) si interpretano dicendo che la delta di Dirac può essere considerata come il limite di una classe

funzioni rettangolari di area unitaria al tendere a zero della loro durata. La delta di Dirac è nulla su tutto l'asse reale eccetto che all'origine dove non è definita. In ogni caso la sua area è unitaria. Per questo motivo essa è rappresentata mediante una freccia rivolta verso l'alto e spiccata nel punto  $t=0$ . (v. Fig. 9). La delta traslata si rappresenta com'è mostrato nella stessa Fig. 9.

## 4 - Caratteristiche e proprietà della delta di Dirac.

### 4.1 - La delta di Dirac è la derivata del gradino unitario.

Poiché è:

$$(4.1) \quad \int_{-\infty}^t n \operatorname{rect}(n\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & t < -\frac{1}{2n} \\ \frac{1}{2} + nt & -\frac{1}{2n} \leq t \leq \frac{1}{2n} \\ 1 & t > \frac{1}{2n} \end{cases}$$

passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  si ha:

$$(4.2) \quad \int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = u(t)$$

dalla quale discende:

$$(4.3) \quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

### 4.2 - Derivate generalizzate.

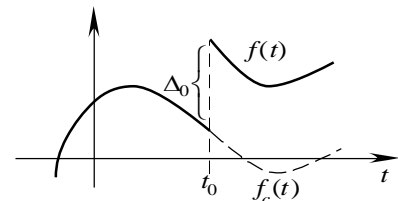
La delta di Dirac consente di dedurre un'interessante rappresentazione della derivata di una funzione continua a tratti. Sia  $f(t)$  è una funzione continua ovunque tranne che nel punto  $t_0$  dove presenta un salto di valore  $\Delta_0 = f(t_0^+) - f(t_0^-)$ . Si può scrivere:

$$(4.4) \quad f(t) = f_c(t) + \Delta_0 u(t-t_0)$$

dove  $f_c(t)$  è la funzione ottenuta da  $f(t)$  eliminando il salto (v. Fig. 10). Poiché  $f_c(t)$  è continua e derivabile ovunque tranne eventualmente nel punto  $t=t_0$  dove si potrebbe avere  $f(t_0^-) \neq f(t_0^+)$ , risulta, con esclusione del punto  $t=t_0$  :

$$(4.4) \quad f'(t) = f'_c(t) + \Delta_0 \delta(t-t_0)$$

che costituisce la derivata generalizzata della funzione  $f(t)$ .



**Fig.10** - Funzione continua a tratti.

Più in generale, se la funzione  $f(t)$  subisce nell'insieme dei punti  $\{t_i\}_{i=1}^N$  dei salti di valore  $\Delta_i = f(t_i^+) - f(t_i^-)$  la derivata generalizzata di  $f(t)$  vale, con esclusione del punto  $t = t_0$ :

$$(4.5) \quad f'(t) = f'_c(t) + \sum_{i=1}^N \Delta_i \delta(t - t_i)$$

## 5 – La pseudo-funzione $t^{-1}$ .

La funzione  $t^{-1}$  non è sommabile su un qualsiasi intervallo contenente l'origine e tanto meno lo è  $t^{-1}\phi(t)$  (salvo che  $\phi(t)$  non risulti infinitesima nell'origine). Ciononostante può definirsi un valore principale di Cauchy dell'integrale improprio di  $t^{-1}\phi(t)$ :

$$(5.1) \quad \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\phi(t)}{t} dt$$

per ogni  $\phi(t)$  che garantisce la convergenza della (5.1). Ciò significa che alla funzione  $t^{-1}$  può associarsi la cosiddetta pseudo-funzione  $\text{Pf}(t^{-1})$ , definita dalla:

$$(5.2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \text{Pf}(t^{-1})\phi(t)dt = \text{VP} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t} dt$$

## 6 – La convoluzione.

### 6.1 – Segnali a tempo continuo.

Si definisce **convoluzione** fra due segnali  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$  a tempo continuo il segnale  $s(t)$  definito dalla:

$$(6.1) \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau)s_2(t - \tau)d\tau = s_1 * s_2$$

Risulta anche, come si può verificare operando il cambiamento di variabili  $t - \tau \rightarrow \tau$ :

$$(6.2) \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - \tau)s_2(\tau)d\tau = s_2 * s_1$$

pertanto la convoluzione gode della proprietà commutativa. Inoltre è facile verificare che gode anche della proprietà distributiva e cioè:

$$(6.3) \quad s_1 * (s_2 + s_3) = s_1 * s_2 + s_1 * s_3$$

Identificando uno dei due segnali con la delta di Dirac  $\delta(t)$ , tenendo conto della (3.6), si può scrivere:

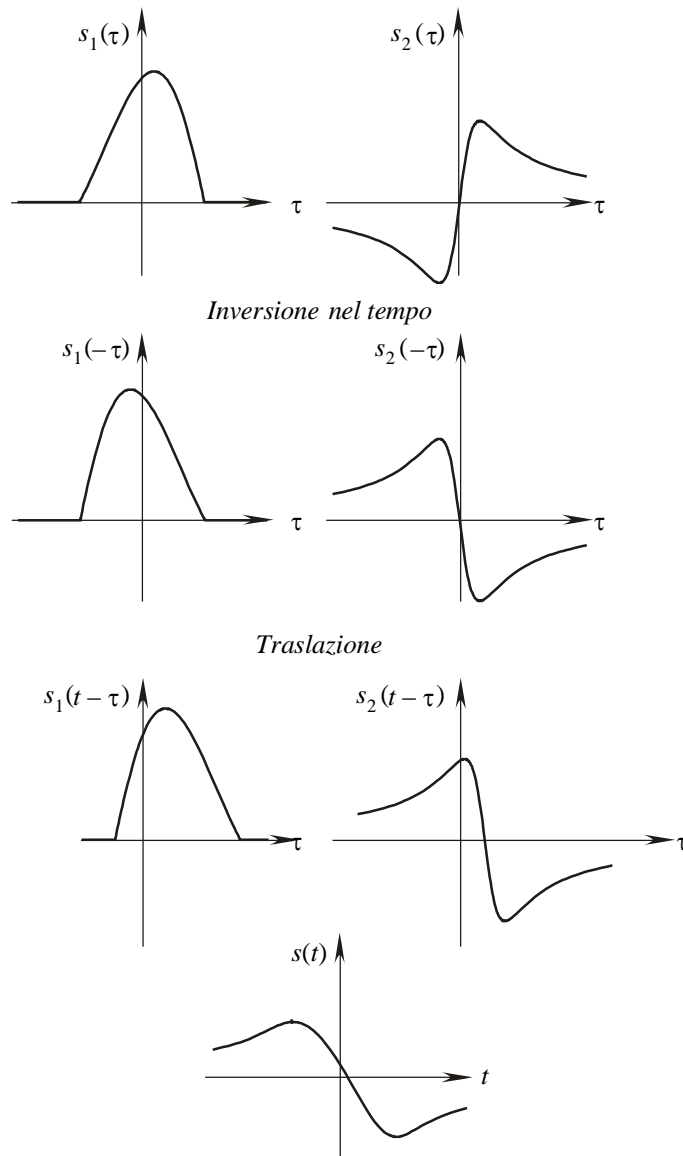
$$(6.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)\delta(\tau)d\tau = s(t)$$

che può essere interpretata nel seguente modo:

$$(6.5) \quad s * \delta = \delta * s = s$$

e cioè la delta di Dirac costituisce l'elemento unitario della convoluzione.

Per meglio comprendere il significato della convoluzione in Fig. 11 sono indicate le varie fasi che conducono alla (6.1) o (6.2). A proposito di tale figura si ricordi che essendo  $s(t - \tau) = s[-(\tau - t)]$ , il segnale  $s(t - \tau)$  si può pensare ottenuto ritardando di  $t$  il segnale  $s(-\tau)$  ottenuto da  $s(\tau)$  per inversione dell'asse dei tempi.



**Fig.11** – Convoluzione fra due segnali nel dominio del tempo.

**Esempio E.1**

Si determini la convoluzione del segnale  $s(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$  con se stesso.

Risulta per  $t > 0$  (v. Fig. E.1)

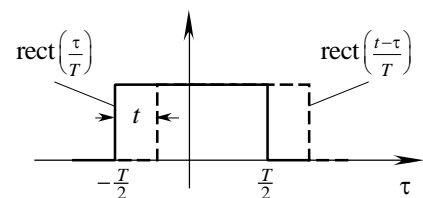
$$s(t) = \begin{cases} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} d\tau = T - t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

In modo analogo per  $t < 0$  si ha:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t < -T \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{t}{2}-|t|} d\tau = T - |t| & -T \leq t \leq 0 \end{cases}$$

e cioè

$$s(t) = (T - |t|) \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$



**Fig.E.1**

La valutazione della convoluzione fra due segnali può, in taluni casi, essere semplificata procedendo come di seguito indicato.

Se  $s'(t)$  denota la derivata della  $s(t)$  rispetto a  $t$ , si può scrivere:

$$(6.6) \quad s(t) = \int_{t_0}^t s'(\xi) d\xi + \phi(t_0)$$

dove  $t_0$  denota un opportuno istante e

$$(6.7) \quad s(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t_0 - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t_0 - \tau) s_2(\tau) d\tau$$

D'altronde, derivando la (6.1) o (6.2) si ottiene:

$$(6.8) \quad s'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2'(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_1'(t - \tau) s_2(\tau) d\tau$$

che, sostituita nella (6.6) consente di ottenere il risultato.

La procedura può eventualmente iterarsi facendo intervenire la derivata seconda del segnale  $s(t)$ .

È evidente che il metodo sopra presentato si rivela efficace in quei casi in cui l'integrale definito dalla (6.6) si calcola più semplicemente dell'integrale che compare nella (6.1) o (6.2)

### Esempio E.2

Si risolva l'esempio precedente con il metodo della derivazione.

Scegliendo  $t_0 = 0$  risulta:

$$s(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right) \text{rect}\left(-\frac{\tau}{T}\right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{\tau}{T}\right) d\tau = T$$

Inoltre essendo (vedi Esempio E.1):

$$\frac{d}{dt} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

risulta

$$s'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \left\{ \delta\left(\tau + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(\tau - \frac{T}{2}\right) \right\} d\tau = \text{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right) - \text{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

e quindi:

$$s(t) = (T - |\tau|) \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

## 6.2 - Segnali a tempo discreto.

Si definisce **convoluzione** fra due segnali  $s_1(nT)$  e  $s_2(nT)$  a tempo discreto il segnale  $\phi(nT)$  definito dalla:

$$(6.9) \quad s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(kT) s_2(nT - kT) = s_1 * s_2$$

che effettuando la trasformazione di indici  $n - k \rightarrow k$  diviene:

$$(6.10) \quad s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(nT - kT) s_2(kT) = s_2 * s_1$$

Pertanto la convoluzione gode della proprietà commutativa. Si ha inoltre (proprietà distributiva):

$$(6.11) \quad s_1 * (s_2 + s_3) = s_1 * s_2 + s_1 * s_3$$

Se si identifica uno dei due segnali con l'impulso unitario  $\delta(nT)$ , si ha:

$$(6.12) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(nT - kT) \delta(kT) = s(nT)$$

che può essere interpretata nel seguente modo:

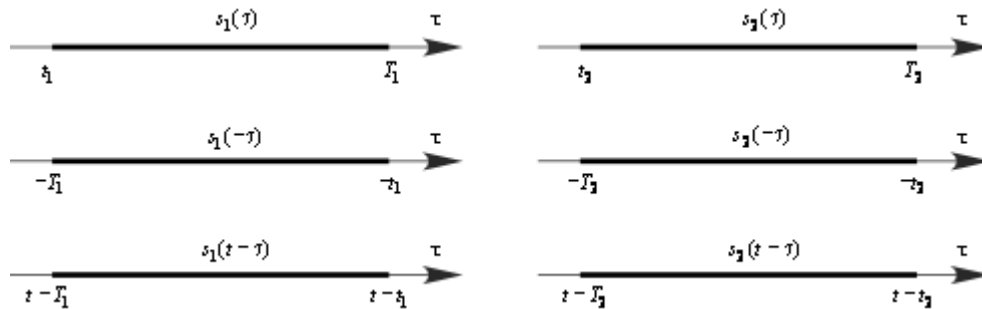


$$(6.13) \quad s * \delta = \delta * s = s$$

e cioè l'impulso unitario costituisce l'elemento unitario della convoluzione definita nel tempo discreto.

### 6.3 - Durata della convoluzione.

Siano  $s_1(\tau)$  e  $s_2(\tau)$  due segnali con supporti  $(t_1, T_1)$  e  $(t_2, T_2)$  limitati. In Fig 12 sono rappresentati i supporti dei segnali  $s_1(-\tau)$  e  $s_2(-\tau)$  nonché quelli di  $s_1(t-\tau)$  e  $s_2(t-\tau)$  rispetti-



**Fig. 12** – Durata della convoluzione

vamente. È evidente che l'integrale di involuzione è nullo quando gli intervalli  $(t_1, T_1)$  e  $(t-T_2, t-t_2)$  sono disgiunti oppure se sono disgiunti gli intervalli  $(t_2, T_2)$  e  $(t-T_1, t-t_1)$ . Questo accade quando sono soddisfatte le condizioni:

$$(6.14) \quad t_1 > t-t_2 \quad \text{e} \quad T_1 < t-T_2$$

oppure

$$(6.15) \quad t_2 > t-t_1 \quad \text{e} \quad T_2 < t-T_1$$

Ciò comporta che la convoluzione è identicamente nulla in tutti gli istanti che sono esterni all'intervallo:

$$(6.16) \quad t_1 + t_2 < t < T_1 + T_2$$

La durata della convoluzione vale quindi:

$$(6.17) \quad \Delta = (T_1 - t_1) + (T_2 - t_2)$$

e cioè pari alla somma delle durate dei segnali componenti.

È immediato verificare che se uno solo dei due segnali è a durata non limitata anche la convoluzione ha durata non limitata.

Le considerazioni svolte per i segnali a tempo continuo valgono, com'è facile verificare, anche per i segnali a tempo discreto.

