Capitolo II

CARATTERIZZAZIONE STATISTICA DEI SEGNALI

II.1 - Funzioni di probabilità del primo ordine.

Sia dato un esperimento casuale individuato da uno spazio di probabilità $\mathbf{S} = (\Omega, \mathbf{F}, \Pr)$.

Per segnale aleatorio reale s'intende un'applicazione che fa corrispondere a ciascun possibile risultato $\zeta \in \Omega$ dell'esperimento casuale una funzione (reale o complessa) del tempo tale da identificare una variabile aleatoria $s(t,\zeta)$ per ogni fissato t.

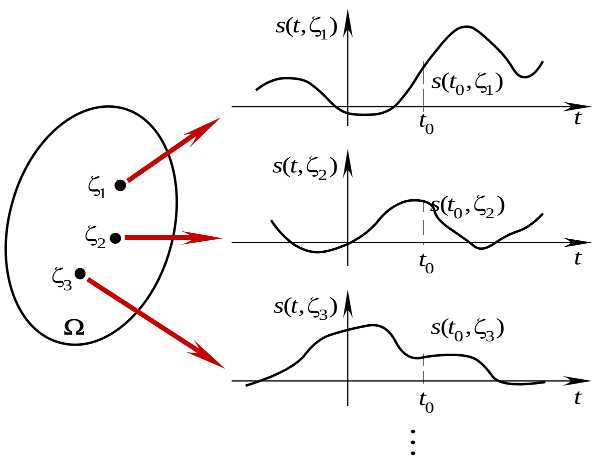

Fig.II.1- Segnale aleatorio.

In definitiva da quanto detto discende che se si fissa un valore di t il segnale aleatorio individua una variabile aleatoria su Ω; mentre se si fissa un risultato ζ si ottiene una funzione della sola variabile t, $s(t,\zeta)$, che costituisce una **manifestazione del segnale** com'è schematicamente indicato nella Fig. II.1.

In quel che segue, talvolta, un segnale aleatorio verrà denotato talvolta con $s(t)$, sottintendendo la dipendenza dal risultato dell'esperimento casuale ω. Dal contesto sarà chiaro quando ci si sta riferendo ad una variabile casuale, t assegnato, o a ad una particolare manifestazione, ζ fissato.

Ad esempio si consideri il segnale aleatorio la cui generica manifestazione è data dalla:

$$s(t,\varphi) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

dove φ è una variabile casuale appartenente all'intervallo $[0, 2\pi)$. Le manifestazioni del segnale sono costituite da tutte le possibili cosinusoidi di frequenza f_0 ottenute in corrispondenza a tutti i possibili valori di φ.

Si consideri l'evento $\boldsymbol{E}_x = \{\zeta : s(t,\zeta) \le x\}$ costituito da tutte le manifestazioni del segnale che all'istante t assumono un valore non maggiore di x. La probabilità che si verifichi l'evento $\boldsymbol{E}_x$ è data dalla:

(II.1.1) $$\Pr\{\boldsymbol{E}_x\} = P_s(x;t)$$

La funzione $P_s(x;t)$, così definita, costituisce **la distribuzione di probabilità del primo ordine** associata al segnale $s(t,\zeta)$. Ci si rende facilmente conto che la $P_s(x;t)$ coincide con la funzione di distribuzione di probabilità della variabile aleatoria individuata dal valore assunto dal segnale all'istante t.

Alla $P_s(x;t)$ si può associare una **densità di probabilità del primo ordine** $p_s(x;t)$ così definita:

(II.1.2) $$p_s(x;t) = \frac{\partial P_s(x;t)}{\partial x}$$

Sia $p_s(x;t)$ sia $P_s(x;t)$ sono in genere funzioni anche dell'istante t in cui si osserva il segnale. È opportuno inoltre sottolineare che la derivata nella (II.1.2) va intesa in senso generalizzato, la presenza d'eventuali discontinuità nella $P_s(x;t)$ si traduce infatti nella presenza di delta di Dirac di peso e posizione opportuni nella corrispondente densità $p_s(x;t)$.

È ovvio che le funzioni di probabilità $P_s(x;t)$ e $p_s(x;t)$ soddisfano le stesse probabilità studiate nel Cap. I a proposito delle variabili aleatorie monodimensionali.

In particolare:

Se $x \le y$ di ha $\boldsymbol{E}_x \subseteq \boldsymbol{E}_y$ e questo comporta che è $P_s(x;t) \le P_s(y;t)$. La distribuzione di probabilità del primo ordine è una funzione non decrescente di x. Pertanto, qualunque sia l'istante t, per tutti i valori di x in cui la $P_s(x;t)$ è derivabile in senso ordinario, risulta:

(II.1.5) $$p_s(x;t) \ge 0$$

Inoltre i pesi delle eventuali delta di Dirac presenti nella $p_s(x;t)$ non possono essere negativi.

Valgono le condizioni:

(II.1.3) $$\begin{gathered} P_s(-\infty;t) = 0 \\ P_s(+\infty;t) = 1 \end{gathered}$$

in quanto l'evento $\{s(t,\zeta) \le -\infty\}$ è l'evento impossibile e l'evento $\{s(t,\zeta) \le +\infty\}$ è l'evento certo.

Tenendo conto della prima delle (II.1.3), dalla (II.1.2) si deduce:

(II.1.4) $$P_s(x;t) = \int_{-\infty}^{x} p_s(\xi;t)d\xi$$

Inoltre, indipendentemente dal valore di t la seconda delle (II.1.3) si traduce per la $p_s(x;t)$ nella **condizione di normalizzazione**:

(II.1.5) $$\int_{-\infty}^{\infty} p(x;t)dx = 1$$

La probabilità che il segnale, in un assegnato istante t, assuma un valore appartenente all'intervallo $(a,b]$ vale:

(II.1.6) $$\Pr\{s(t,\zeta) \in (a,b]\} = P_s(b;t) - P_s(a;t) = \int_a^b p_s(x;t)dx$$

In Tabella II.1 sono riportate le proprietà fondamentali delle funzioni di probabilità del primo ordine di un segnale aleatorio.

II.2 - Funzioni di probabilità del secondo ordine.

Si consideri, per ogni coppia di numeri reali (x_1, x_2), $\boldsymbol{E}_{x_1x_2}$ il sottoinsieme di $\boldsymbol{\Omega}$ definito dalla:

(II.2.1) $$\boldsymbol{E}_{x_1x_2} = \{\zeta : s_1 \le x_1; s_2 \le x_2\}$$

dove, per comodità di notazione, $s_1 = s(t_1,\zeta)$ ed $s_2 = s(t_2,\zeta)$ indicano i valori assunti dalla generica manifestazione del segnale rispettivamente agli istanti t_1 e t_2. Come è stato osservato a proposito delle variabili aleatorie bidimensionali, un tale insieme costituisce un evento in $\boldsymbol{\Omega}$; la probabilità che esso si verifichi:

(II.2.2)
$$\Pr\left\{\boldsymbol{E}_{x_1x_2}\right\} = P_{s_1s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)$$

definisce la **distribuzione di probabilità del secondo ordine** associata al segnale aleatorio $s(t,\zeta)$ relativa ai due istanti di osservazione t_1,t_2.

Tabella II.1

Proprietà delle funzioni di probabilità del primo ordine di un segnale aleatorio

Distribuzione di probabilità	Densità di probabilità	Osservazioni
$P_s(x;t) = \Pr\left\{\zeta : s(t,\zeta) \le x\right\}$	$p_s(x;t) = \dfrac{\partial P_s(x;t)}{\partial x}$	
$x \le y \Rightarrow P_s(x;t) \le P_s(y;t)$	$p_s(x;t) \ge 0$	Nei punti di continuità
$P_s(-\infty;t) = 0$	$P_s(x;t) = \int_{-\infty}^{x} p_s(\xi;t)d\xi$	
$P_s(\infty;t) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} p_s(\xi;t)d\xi = 1$	Condizione di normalizzazione
$\Pr\left\{\zeta : a < s(t,\zeta) \le b\right\} = P_s(b;t) - P_s(a;t)$	$\Pr\left\{\zeta : a < s(t,\zeta) \le b\right\} = \int_a^b p_s(\xi;t)d\xi$	

Anche in questo caso è possibile individuare una **densità di probabilità del secondo ordine** data dalla:

(II.2.3)
$$p_{s_1s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) = \frac{\partial^2 P_{s_1s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

nella quale la derivazione è da intendersi in senso generalizzato.

La $P_{s_1s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)$ deve necessariamente soddisfare le uguaglianze:

(II.2.4)
$$\begin{array}{ll} P_{s_1s_2}(+\infty,+\infty;t_1,t_2) = 1 & P_{s_1s_2}(-\infty,-\infty;t_1,t_2) = 0 \\ P_{s_1s_2}(x_1,-\infty;t_1,t_2) = 0 & P_{s_1s_2}(-\infty,x_2;t_1,t_2) = 0 \end{array}$$

la prima delle quali esprime la probabilità associata all'evento certo; le restanti quelle di eventi impossibili, indipendentemente dagli istanti d'osservazione considerati.

La probabilità che all'istante t_1 il valore $s_1 = s(t_1,\zeta)$, assunto dalla generica manifestazione del segnale, sia compreso nell'intervallo $\left(a_1,b_1\right]$ e che a t_2 il valore $s_2 = s(t_2,\zeta)$, assunto dalla stessa manifestazione, appartenga all'intervallo $\left(a_2,b_2\right]$ si può calcolare in uno dei seguenti modi:

(II.2.5)
$$\begin{aligned} &\Pr\left\{\left\{(s_1,s_2) \in \left(a_1,b_1\right] \times \left(a_2,b_2\right]\right\}\right\} = \\ &= P_{s_1s_2}(a_2,b_2;t_1,t_2) - P_{s_1s_2}(a_1,b_2;t_1,t_2) - P_{s_1s_2}(a_2,b_1;t_1,t_2) + P_{s_1s_2}(a_1,b_1;t_1,t_2) = \\ &= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} p_{s_1s_2}(\xi,\eta;t_1,t_2)d\xi d\eta \end{aligned}$$

È inoltre evidente che si ha:

(II.2.6)
$$P_{s_1s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} p_{s_1s_2}(\xi,\eta;t_1,t_2)d\xi d\eta$$

Se $x_1 \le y_1$ e $x_2 \le y_2$ l'evento $\boldsymbol{E}_{x_1x_2}$ è contenuto nell'evento $\boldsymbol{E}_{y_1y_2}$ per cui deve essere:

(II.2.7)
$$P_{s_1s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) \le P_{s_1s_2}(y_1,y_2;t_1,t_2)$$

od anche:

(II.2.8)
$$p_{s_1s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)\geq 0$$

in tutti i punti in cui la derivata (II.2.3) esiste in senso ordinario, inoltre, i pesi delle delte di Dirac, eventualmente presenti nella $p_{s_1s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)$, non possono essere negativi.

Richiamando le (I.9.3) del Cap. I, si può scrivere:

(II.2.9)
$$\begin{aligned}&P_{s_1s_2}(\infty,x_2;t_1,t_2)=P_{s_2}(x_2;t_2)\\&P_{s_1s_2}(x_1,\infty;t_1,t_2)=P_{s_1}(x_1)\end{aligned}$$

che, ricordando le (II.2.6), diventano:

(II.2.10)
$$\begin{aligned}&P_{s_2}(x_2;t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_2}p_{s_1s_2}(\xi,\eta;t_1,t_2)d\xi d\eta\\&P_{s_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{\infty}p_{s_1s_2}(\xi,\eta;t_1,t_2)d\xi d\eta\end{aligned}$$

dalle quali, derivando, si deducono le:

(II.2.11)
$$\begin{aligned}&p_{s_2}(x_2;t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{s_1s_2}(\xi,x_2;t_1,t_2)d\xi\\&p_{s_1}(x_1;t_1)=\int_{-\infty}^{\infty}p_{s_1s_2}(x_1,\eta;t_1,t_2)d\eta\end{aligned}$$

La densità di probabilità del primo ordine di un segnale aleatorio è direttamente deducibile da quella del secondo ordine per **marginalizzazione**.

Si considerino gli eventi:

(II.2.12)
$$\boldsymbol{E}_2=\{\zeta:s(t_2,\zeta)\leq x_2\}\quad;\quad \boldsymbol{E}_1=\left\{\zeta:x_1-\frac{|\Delta x_1|}{2}<s(t_1,\zeta)\leq x_1+\frac{|\Delta x_1|}{2}\right\}$$

La probabilità dell'evento $\boldsymbol{E}_2$ condizionata dal manifestarsi dell'evento $\boldsymbol{E}_1$, per la formula di Bayes, vale:

(II.2.13)
$$\Pr\{\boldsymbol{E}_2\mid\boldsymbol{E}_1\}=\frac{\Pr\{\boldsymbol{E}_2\cap\boldsymbol{E}_1\}}{\Pr\{\boldsymbol{E}_1\}}=\frac{\int_{x_1-\frac{|\Delta x_1|}{2}}^{x_1+\frac{|\Delta x_1|}{2}}\int_{-\infty}^{x_2}p_{s_1s_2}(x,y;t_1,t_2)dxdy}{\int_{x_1-\frac{|\Delta x_1|}{2}}^{x_1+\frac{|\Delta x_1|}{2}}p_{s_1}(x;t_1)dx}$$

Se si fa tendere Δx_1 a zero, ammesso che la $p_{s_1}(x_1;t_1)$, sia continua in x_1, $\boldsymbol{E}_1$ si riduce all'evento singolare $\boldsymbol{E}_1=\{\zeta:s(t_1,\zeta)=x_1\}$ e si ha:

(II.2.14)
$$\lim_{\Delta x_1\to 0}\Pr\{\boldsymbol{E}_2\mid\boldsymbol{E}_1\}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\int_{x_1-\frac{|\Delta x_1|}{2}}^{x_1+\frac{|\Delta x_1|}{2}}\int_{-\infty}^{x_2}p_{s_1s_2}(x,y;t_1,t_2)dxdy}{\int_{x_1-\frac{|\Delta x_1|}{2}}^{x_1+\frac{|\Delta x_1|}{2}}p_{s_1}(x;t_1)dx}=\frac{\int_{-\infty}^{x_2}p_{s_1s_2}(x_1,y;t_1,t_2)dy}{p_{s_1}(x_1;t_1)}$$

Si noti il limite (II.2.14) esiste finito se risulta $p_{s_1}(x_1;t_1)\neq 0$ e definisce una funzione della variabile x_1 che soddisfa tutte le proprietà di una distribuzione di probabilità. Tale funzione, che si denota con $P_{s_2|s_1}(x_1,x_2;t_1,t_2)$ e prende il nome di **distribuzione di probabilità condizionata**. Alla $P_{s_2|s_1}(x_1,x_2;t_1,t_2)$ corrisponde la **densità di probabilità condizionata** data dalla:

(II.2.15)
$$p_{s_2|s_1}(x_1,x_2;t_1,t_2)=\frac{\partial P_{s_2|s_1}(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_2}$$

È facile rendersi conto che tale densità di probabilità può esprimersi in termini delle densità del primo e del secondo ordine associate al segnale $s(t,\zeta)$ come segue:

(II.2.16)
$$p_{s_1s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)=p_{s_1}(x_1;t_1)\cdot p_{s_2|s_1}(x_1,x_2;t_1,t_2)$$

In modo analogo, introducendo la densità di probabilità condizionata $p_{s_1|s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)$ si deduce:

(II.2.17) $$p_{s_1 s_2}(x_1 x_2;t_1,t_2) = p_{s_2}(x_2;t_2)\cdot p_{s_1|s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)$$

Si noti infine che risulta:

(II.2.18) $$\lim_{t_2\to t_1} p_{s_2|s_1}(x_1,x_2;t_1,t_2) = \lim_{t_1\to t_2} p_{s_1|s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) = \delta(x_1-x_2)$$

che discende immediatamente dal fatto che una stessa manifestazione del segnale non può assumere due valori distinti nello stesso istante.

Inoltre tenuto conto delle condizioni di normalizzazione:

(II.2.19) $$\int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1|s_2}(x,x_2;t_1,t_2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_2|s_1}(x_1,y;t_1,t_2)dy = 1$$

dalle (II.2.16) e (II.2.17) si deduce che le densità del primo ordine del segnale valgono rispettivamente:

(II.2.20) $$p_{s_1}(x_1;t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2}(x_1,y;t_1,t_2)dy$$

(II.2.21) $$p_{s_2}(x_2,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2}(x,x_2;t_1,t_2)dx$$

dalle quali si evince che la densità di probabilità del primo ordine di un segnale aleatorio è direttamente deducibile da quella del secondo ordine per **marginalizzazione**.

È inoltre evidente che:

(II.2.22) $$P_{s_1}(x_1;t_1) = \lim_{x_2\to+\infty} P_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)$$

(II.2.23) $$P_{s_2}(x_2,t_2) = \lim_{x_1\to+\infty} P_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)$$

In Tabella II.2 sono riportate le proprietà fondamentali delle funzioni di probabilità del secondo ordine di un segnale aleatorio.

Tabella II.2

Proprietà delle funzioni di probabilità del secondo ordine di un segnale aleatorio.

Distribuzione di probabilità	Densità di probabilità	Osservazioni
$P_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) =$ $= \Pr\{\zeta : s(t_1,\zeta)\le x_1; s(t_2,\zeta)\le x_2\}$	$p_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) = \dfrac{\partial^2 P_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$	
$x_1\le y_1; x_2\le y_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow P_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)\le P_{s_1 s_2}(y_1,y_2;t_1,t_2)$	$p_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)\ge 0$	Nei punti di continuità
$P_{s_1 s_2}(-\infty,x_2;t_1,t_2)=0$ $P_{s_1 s_2}(x_1,-\infty;t_1,t_2)=0$	$P_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) =$ $= \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} p_{s_1 s_2}(\xi,\eta;t_1,t_2)d\xi d\eta$	
$P_{s_1 s_2}(\infty,\infty;t_1,t_2)=1$	$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2}(\xi,\eta;t_1,t_2)d\xi d\eta = 1$	Condizione di normalizzazione
$\Pr\{\zeta : a_1 < s_1\le b_1; a_2 < s_2 \le b_2\} =$ $= P_{s_1 s_2}(a_2,b_2;t_2,t_2) - P_{s_1 s_2}(a_1,b_2;t_1,t_2) +$ $- P_{s_1 s_2}(a_2,b_1;t_2,t_1) + P_{s_1 s_2}(a_1,b_1;t_1,t_1)$	$\Pr\{\zeta : a_1 < s_1\le b_1; a_2 < s_2 \le b_2\} =$ $= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} p_{s_1 s_2}(\xi,\eta;t_1,t_2)d\xi d\eta$	
$P_{s_1}(x_1;t_1) = P_{s_1 s_2}(x_1,\infty;t_1,t_2)$ $P_{s_2}(x_2;t_2) = P_{s_1 s_2}(\infty,x_2;t_1,t_2)$	$p_{s_1}(x_1;t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2}(x_1,\eta;t_1,t_2)d\eta$ $p_{s_2}(x_2;t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2}(\xi,x_2;t_1,t_2)d\xi$	Marginalizzazione

II.3 - Funzioni di probabilità d'ordine superiore.

In maniera analoga a quanto fatto nei paragrafi precedenti, si può denotare con

(II.3.1) $$P_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$$

la probabilità dell'insieme

(II.3.2) $$\boldsymbol{E}_{x_1 x_2 \dots x_n} = \{s_1 \le x_1, s_2 \le x_2, \dots, s_n \le x_n\}$$

costituito da tutti i risultati ζ che danno luogo a manifestazioni del segnale $s(t,\zeta)$ che, in corrispondenza agli istanti di tempo $t_1, t_2, \dots, t_n$, assumono valori rispettivamente non superiori a $x_1, x_2, \dots x_n$.

La $P_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ denota la **distribuzione di probabilità di ordine** n associata al segnale. La relativa **densità di probabilità di ordine** n è:

(II.3.3) $$p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n P_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

Dalla $p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ si possono dedurre tutte le densità d'ordine inferiore per successiva marginalizzazione. Si ha infatti, generalizzando le (II.2.11):

(II.3.4) $$\begin{aligned}
&p_{s_1 s_2 \dots s_{n-1}}(x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) d\xi_n \\
&p_{s_1 s_2 \dots s_{n-2}}(x_1, \dots, x_{n-2}; t_1, t_2, \dots, t_{n-2}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) d\xi_n d\xi_{n-1} \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&p_{s_1}(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) d\xi_n d\xi_{n-1} \dots d\xi_2
\end{aligned}$$

La densità di probabilità d'ordine n deve inoltre soddisfare la seguente condizione di normalizzazione:

(II.3.5) $$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n; t_1, t_2, \dots t_{n-1}, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} dx_n = 1$$

Si ha:

(II.3.6) $$P_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{s_1 s_2 \dots s_n}(\xi_1, \dots, \xi_n; t_1, t_2, \dots, t_n) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

e sono soddisfatte le uguaglianze:

(II.3.7) $$P_{s_1 s_2 \dots s_n}(-\infty, \dots, -\infty; t_1, t_2, \dots, t_n) = 0 \ , \ P_{s_1 s_2 \dots s_n}(\infty, \dots, \infty; t_1, t_2, \dots, t_n) = 1$$

Si ha infine:

(II.3.8) $$p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \ge 0$$

in tutti i punti in cui $P_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ è derivabile in senso ordinario; inoltre i pesi delle eventuali delta di Dirac nella $p_{s_1 s_2 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ non possono essere negativi.

Quando sono note le funzioni di probabilità fino a all'ordine n di un segnale aleatorio, si dice che esso è statisticamente noto fino all'ordine n. È evidente che quanto più n è elevato tanto maggiori sono le informazioni che si hanno sulla natura del segnale.

II.4 - Segnali distinti. Funzioni di probabilità congiunte.

Siano $x(t,\zeta)$ e $y(t,\zeta)$ due segnali aleatori definiti sullo stesso spazio di probabilità. Si prenda in considerazione l'insieme $\boldsymbol{E}_{xy}$ composto da tutti i risultati tali che il valore assunto dalla generica manifestazione del segnale $x(t,\zeta)$ all'istante t_1 assuma un valore non superiore a x e che, all'istante t_2, il valore di $y(t,\zeta)$ non sia superiore a y. Tale insieme costituisce un evento dato che può essere ottenuto dall'intersezione dei due eventi $\{\zeta : x(t_1,\zeta) \le x\}$ e $\{\zeta : y(t_2,\zeta) \le y\}$; la probabilità ad esso associata, oltre che da x e da y, dipende evidentemente anche dagli istanti di osservazione t_1 e t_2 e risulta:

(II.4.1)
$$P_{x_1y_2}(x,y;t_1,t_2) = \Pr\{\boldsymbol{E}_{xy}\}$$

La funzione $P_{x_1y_2}(x,y;t_1,t_2)$, così definita, rappresenta la **distribuzione di probabilità congiunta** associata ai due segnali. Naturalmente tale distribuzione di probabilità, indipendentemente dagli istanti di tempo considerati, soddisfa le condizioni:

(II.4.2)
$$\begin{gathered} P_{x_1y_2}(+\infty,+\infty;t_1,t_2) = 1 \\ P_{x_1y_2}(x,-\infty;t_1,t_2) = P_{x_1y_2}(-\infty,y;t_1,t_2) = 0 \end{gathered}$$

La corrispondente funzione di **densità di probabilità congiunta** $p_{x_1y_2}(x,y;t_1,t_2)$ è la derivata seconda mista, eventualmente intesa in senso generalizzato, della $P_{x_1y_2}(x,y;t_1,t_2)$ e soddisfa le condizioni:

(II.4.3)
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{x_1y_2}(\xi,\eta;t_1,t_2)\,d\xi\,d\eta = 1$$

(II.4.4)
$$P_{x_1y_2}(x,y;t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p_{x_1y_2}(\xi,\eta;t_1,t_2)\,d\xi\,d\eta$$

Si ottiene infine

(II.4.5)
$$p_{x_1}(x,t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x_1y_2}(x,\eta;t_1,t_2)\,d\eta$$

e

(II.4.6)
$$p_{y_2}(y,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x_1y_2}(\xi,y;t_1,t_2)\,d\xi$$

che consentono di determinare le densità di probabilità del primo ordine associate ai segnali $x(t,\zeta)$ e $y(t,\zeta)$ nota che sia la loro densità di probabilità congiunta.

Se risulta:

(II.4.8)
$$p_{x_1y_2}(x,y;t_1,t_2) = p_{x_1}(x,t_1)\cdot p_{y_2}(y,t_2)$$

i segnali si dicono congiuntamente **statisticamente indipendenti**.