Capitolo III

VALORI MEDI. STAZIONARIETÀ ED ERGODICITÀ

III.1 - Medie statistiche del primo ordine.

Sia $f(\cdot)$ una funzione continua e si associ al segnale aleatorio $s(t,\zeta)$ la quantità definita dalla $y = f[s(t,\zeta)]$. Essa individua, a sua volta, un segnale aleatorio la cui generica manifestazione è posta in corrispondenza della generica manifestazione del segnale $s(t,\zeta)$. Tuttavia se si fissa il valore del tempo t, la quantità y assume il significato di una variabile aleatoria; se è nota la sua densità di probabilità ad essa si può associare una valore medio statistico. La grandezza così definita:

(III.1.1) $$E\{f(s)\} = \overline{f(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_s(x;t)dx$$

prende il nome di **valore medio statistico** della funzione $f(s)$. È opportuno sottolineare che tale media dipende in genere dall'istante di osservazione t. Essa, inoltre, in quanto dipendente dalla densità di probabilità del primo ordine, definisce una **media statistica del primo ordine**.

Se si pone $f(s) = s^n$ (con n intero) dalla (III.1.1) si ottiene il valore medio statistico della potenza n-esima del segnale:

(III.1.2) $$m_s^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_s(x;t)dx$$

che costituisce il **momento n-esimo del primo ordine del segnale** $s(t,\zeta)$.

In particolare, in virtù della (II.1.5), risulta $m_s^{(0)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_s(x;t)dx = 1$. Per $n = 1$ si ha:

(III.1.3) $$m_s^{(1)}(t) = E\{s(t,\zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_s(x;t)dx$$

che prende il nome di **valore medio statistico** del segnale.

Per $n = 2$ si deduce:

(III.1.4) $$m_s^{(2)}(t) = E\{s^2(t,\zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_s(x;t)dx$$

che rappresenta il **valore quadratico medio statistico** del segnale.

Se al segnale $s(t,\zeta)$ si sottrae il suo valor medio statistico si ottiene un nuovo segnale $s(t,\zeta) - m_s^{(1)}(t)$ il cui momento n-esimo del primo ordine:

(III.1.5) $$\mu_s^{(n)}(t) = E\left\{\left[s(t,\zeta) - m_s^{(1)}(t)\right]^n\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - m_s^{(1)}(t)\right]^n p_s(x;t)dx$$

definisce il **momento centrale n-del primo ordine** associato ad $s(t,\zeta)$. La (III.1.5) fornisce, in particolare, per $n = 2$:

(III.1.6) $$\sigma_s^2(t) \triangleq \mu_s^{(2)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - m_s^{(1)}(t)\right]^2 p_s(x;t)dx$$

denominata **varianza** del segnale. Risulta facilmente:

(III.1.7) $$\sigma_s^2(t) = m_s^{(2)}(t) - \left[m_s^{(1)}(t)\right]^2$$

III.2 – Medie statistiche del secondo ordine.

Più in generale dato un segnale $s = s(t,\zeta)$, fissata la n-upla $t_1,\dots,t_n$, può essere individuato un vettore $\boldsymbol{s}$ di variabili aleatorie le cui componenti sono rispettivamente: $s_1 = s(t_1,\zeta),\dots,s_n = s(t_n,\zeta)$. Alla grandezza $x = f(\boldsymbol{s})$ dove $f(\boldsymbol{s})$ denota una funzione definita in uno spazio n-dimensionale, è possibile associare la media statistica x ponendo:

(III.2.1)
$$E\{f(\boldsymbol{s})\} = \overline{f(\boldsymbol{s})} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) p_{s_1 s_2 \dots s_n}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{x}$$

dove $p_{s_1 s_2 \dots s_n}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{t})$ indica la densità di probabilità di ordine n del segnale.

In particolare, considerando solo due istanti di tempo t_1, t_2 la precedente si riduce alla:

(III.2.2)
$$E\{f(s_1,s_2)\} = \overline{f(s_1,s_2)} = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2) p_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) dx_1 dx_2$$

Se si pone $f(s_1,s_2) = s_1^p s_2^q$ dalla (III.2.2) si ottiene il momento $(p+q)$-esimo del secondo ordine del segnale:

(III.2.3)
$$m_s^{(p,q)}(t_1,t_2) = \overline{s_1^p s_2^q} = E\left\{s_1^p s_2^q\right\} = \iint_{\mathbb{R}^2} x_1^p x_2^q p_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) dx_1 dx_2$$

In particolare, per $p = q = 0$ si ottiene $m_s^{(0,0)}(t_1,t_2) = 1$ e per $p = q = 1$ fornisce la media $m_s^{(1,1)}(t_1,t_2)$ detta **funzione di autocorrelazione** del segnale:

(III.2.3)
$$R_s(t_1,t_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 p_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) dx_1 dx_2$$

Molto spesso è conveniente esprimere la funzione di autocorrelazione in funzione dell'istante t_1 e della differenza $t_2 - t_1$. Ponendo allora $t = t_1$ e $\tau = t_2 - t_1$ nella (III.2.3), la funzione di autocorrelazione diventa:

(III.2.4)
$$R_s(t,\tau) = \iint_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 p_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t,t+\tau) dx_1 dx_2$$

Si possono anche definire dei momenti centrali $(p+q)$-esimi del secondo ordine:

(III.2.5)
$$\begin{aligned} \mu_s^{(p,q)}(t_1,t_2) &= \overline{\left[s_1 - m_s^{(1)}(t_1)\right]^p \left[s_2 - m_s^{(1)}(t_2)\right]^q} = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x_1 - m_{1s}^{(1)}(t_1)\right]^p \left[x_2 - m_s^{(1)}(t_2)\right]^q p_{s_1 s_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

in particolare il momento centrale $\mu_s^{(1,1)}$ prende il nome di **autocovarianza** denotata con $\sigma_s(t_1,t_2)$ e risulta:

(III.2.6)
$$\sigma_s(t_1,t_2) = R_s(t_1,t_2) - E\{s_1\} E\{s_2\}$$

I momenti centrali $\mu_s^{(2,0)}$ e $\mu_s^{(0,2)}$ individuano la varianza del segnale calcolata negli istanti t_1 e t_2 rispettivamente:

(III.2.7)
$$\begin{aligned} \mu_s^{(2,0)}(t_1) &= \sigma_s^2(t_1) = \overline{\left[s_1 - m_s^{(1)}(t_1)\right]^2} \\ \mu_s^{(0,2)}(t_2) &= \sigma_s^2(t_2) = \overline{\left[s_2 - m_s^{(1)}(t_2)\right]^2} \end{aligned}$$

Anche nel caso di due segnali aleatori distinti $x(t)$ e $y(t)$, si può definire il valore medio statistico della funzione $f(x_1,y_2)$ mediante la:

(III.2.8)
$$E\{f(x_1,y_2)\} = \overline{f(x_1,y_2)} = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) p_{x_1 y_2}(x,y;t_1,t_2) dx dy$$

essendo rispettivamente x_1 e y_1 le variabili aleatorie $x(t_1,\zeta)$ e $y(t_2,\zeta)$ e dove $p_{x_1 y_2}(x,y;t_1,t_2)$ denota la densità di probabilità congiunta dei due segnali.

Il momento incrociato $(p+q)$-esimo è allora definito dalla:

(III.2.9)
$$E\left\{x_1^p y_2^q\right\} = \overline{x_1^p y_2^q} = \iint_{\mathbb{R}^2} x^p y^q p_{x_1 y_2}(x,y;t_1,t_2) dx dy$$

Qualora i segnali siano statisticamente indipendenti risulta evidentemente:

(III.2.10) $$E\left\{x_1^p y_2^q\right\} = E\left\{x_1^p\right\} \cdot E\left\{y_2^q\right\}$$

cioè il valore medio del binomio $x_1^p y_2^q$ si ottiene dal prodotto dei valori medi delle quantità x_1^p e y_2^q.

Se si pone nella (III.2.9) $p = q = 1$ si ha:

(III.2.11) $$R_{xy}(t_1, t_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy p_{x_1 y_2}(x, y; t_1, t_2) dxdy$$

che costituisce la **funzione di correlazione incrociata** o **di mutua correlazione** associata ai due segnali.

Se si pone nella precedente $t = t_1$ e $\tau = t_2 - t_1$ si ha

(III.2.12) $$R_{xy}(t, \tau) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy p_{x_1 y_2}(x, y; t, t+\tau) dxdy$$

e cioè la funzione di mutua correlazione è espressa in funzione dell'istante iniziale t e della differenza τ.

I momenti centrali $(p+q)$-esimi incrociati, sono definiti come segue:

(III.2.13) $$\begin{aligned}\overline{(x_1 - \overline{x}_1)^p (y_2 - \overline{y}_2)^q} &= E\left\{(x_1 - \overline{x}_1)^p (y_2 - \overline{y}_2)^q\right\} = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (x - \overline{x}_1)^p (y - \overline{y}_2)^q p_{x_1 y_2}(x, y; t_1, t_2) dxdy\end{aligned}$$

Ponendo $p = q = 1$ si ha:

(III.2.14) $$\begin{aligned}\sigma_{xy}(t_1, t_2) &\triangleq E\left\{(x_1 - \overline{x}_1)(y_2 - \overline{y}_2)\right\} = \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} (x - \overline{x}_1)(y - \overline{y}_2) p_{x_1 y_2}(x, y; t_1, t_2) dxdy\end{aligned}$$

che è la **funzione di covarianza incrociata** o **di mutua covarianza**. Si ottiene facilmente:

(III.2.15) $$\sigma_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2) - E\left\{x_1\right\} \cdot E\left\{y_2\right\}$$

Se i segnali sono statisticamente indipendenti risulta $R_{xy}(t_1, t_2) = E\left\{x_1\right\} \cdot E\left\{y_2\right\}$, quindi:

(III.2.16) $$\sigma_{xy}(t_1, t_2) = 0$$

III.3 – Segnali aleatori deterministici.

Una classe particolare di segnali aleatori è costituita dai cosiddetti segnali aleatori deterministici. In essi l'evoluzione della generica manifestazione per $t \geq \tau$ può essere dedotta dalla conoscenza del segnale in $t < \tau$. In generale un segnale di questo tipo è rappresentato da una funzione $s(t, \boldsymbol{v})$ in cui $\boldsymbol{v}$ è un n-vettore composto da n variabili aleatorie definite su uno stesso esperimento casuale caratterizzate da una densità di probabilità congiunta $p_{\boldsymbol{v}}(v_1, v_2, \ldots, v_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

In questo caso il valore medio statistico diventa:

(III.3.1) $$E\left\{s(t, \boldsymbol{v})\right\} = \overline{s(t, \boldsymbol{v})} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t, \boldsymbol{v}) p_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{v}$$

il valore quadratico medio:

(III.3.2) $$E\left\{s^2(t, \boldsymbol{v})\right\} = \overline{s^2(t, \boldsymbol{v})} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t, \boldsymbol{v}) p_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{v}$$

e la funzione di autocorrelazione:

(III.3.3) $$R_s(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t_1, \boldsymbol{v}) s(t_2, \boldsymbol{v}) p_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{t}) d\boldsymbol{v}$$

Esempio

Si consideri il segnale

$$s(t,\varphi) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

dove φ è una variabile aleatoria definita in $[0,2\pi)$ e caratterizzata dalla densità di probabilità $p_\varphi(\varphi)$.

Il valore medio del segnale vale:

$$E\{s\} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) p_\varphi(\varphi) d\varphi$$

il valore quadratico medio:

$$E\{s^2\} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) p_\varphi(\varphi) d\varphi$$

e la funzione di autocorrelazione:

$$R_s(t_1,t_2) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi) p_\varphi(\varphi) d\varphi$$

Se φ è uniformemente distribuita in $[0,2\pi)$ le precedenti diventano:

$$E\{s\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t + \varphi) d\varphi = 0$$

$$E\{s^2\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(4\pi f_0 t + 2\varphi)}{2} d\varphi = \frac{1}{2}$$

$$R_s(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\pi f_0 (t_2 - t_1)) + \cos(2\pi f_0 (t_1 + t_2 + 2\varphi)}{2} d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 (t_2 - t_1)$$

III.4 - Stazionarietà.

Un segnale aleatorio $s(t)$ si dice **stazionario in senso stretto** se le sue funzioni di probabilità, di qualsiasi ordine dipendono esclusivamente dalla posizione relativa degli istanti in cui il segnale viene osservato. Cioè se risulta:

(III.4.1)
$$p_{s_1 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = p_{s_1 \dots s_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T) \qquad \forall n \in \boldsymbol{N}, \forall \mathrm{T} \in \mathbb{R}$$

Se la precedente vale solo $n \le k$, il segnale si dice **stazionario all'ordine** k.

La condizione (III.4.1) comporta che la densità di probabilità di ordine n dipenda dalle differenze $\tau_{ij} = t_i - t_j$ fra gli istanti di osservazione.

In particolare per $n = 2$ si ha:

(III.4.2)
$$p_{s_1,s_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_{s_1,s_2)}(x_1, x_2; \tau)$$

essendo $\tau = t_2 - t_1$, mentre la densità di probabilità del primo ordine deve risultare indipendente dal tempo:

(III.4.3)
$$p_s(x;t) \equiv p_s(x)$$

Si noti che dal momento che la densità di probabilità di ordine $n-1$ può essere dedotta da quella di ordine n la stazionarietà all'ordine k comporta quella agli ordini inferiori, ma non il viceversa.

Una classe importante di segnali è costituita dai segnali **stazionari in senso lato**. Un segnale si dice stazionario in senso lato se risulta:

(III.4.4)
$$E\{s(t,\zeta)\} = \mathrm{cost}$$
$$E\{s(t_1,\zeta)s(t_2,\zeta)\} = R_s(t_2 - t_1)$$

cioè se il suo valore medio è indipendente dal tempo e se la sua l'autocorrelazione dipende solo dalla differenza fra gli istanti t_2 e t_1.

È evidente che, essendo $R_s(0) = E\left\{s^2(t,\zeta)\right\}$ la stazionarietà in senso lato implica che anche il valore quadratico medio non dipende da t.

È opportuno infine osservare che un segnale stazionario in senso stretto lo è anche in senso lato, ma non viceversa giacché, ad esempio, l'invarianza temporale del momento del secondo ordine non implica necessariamente quella della corrispondente densità di probabilità.

III.5 - Medie temporali ed ergodicità.

Le considerazioni sin qui svolte mostrano come è possibile ottenere delle informazioni su un segnale aleatorio a partire dall'insieme delle sue manifestazioni note che siano le sue funzioni di probabilità.

In molti casi si hanno a disposizione alcune manifestazioni del segnale (se non una sola) dalle quali possono dedursi solo quelle informazioni che si ottengono utilizzando le cosiddette medie temporali.

Se $s(t,\zeta)$ denota la generica manifestazione di un segnale aleatorio, la quantità

(III.5.1) $$\prec f[s(t,\zeta)] \succ = \lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f[s(t)]dt$$

se esiste, costituisce la **media temporale** della funzione $f(s)$ associata alla manifestazione $s(t,\zeta)$ del segnale.

Dalla (III.5.1) possono in particolare dedursi il **valore medio temporale**:

(III.5.2) $$\prec s(t,\zeta) \succ = \lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t,\zeta)dt$$

e il **valore quadratico medio temporale**:

(III.5.3) $$\prec s^2(t,\zeta) \succ = \lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s^2(t,\zeta)dt$$

che esprime la potenza media specifica associata alla manifestazione $s(t,\zeta)$.

Più in generale si può definire una media temporale associata alla funzione $f\left[s(t_1+t,\zeta), s(t_2+t,\zeta),\ldots, s(t_n+t,\zeta)\right]$ mediante la:

(III.5.4) $$\begin{aligned}&\prec f[s(t_1+t,\zeta), s(t_2+t,\zeta),\ldots, s(t_n+t,\zeta)] \succ = \\ &= \lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f[s(t_1+t,\zeta), s(t_2+t,\zeta),\ldots, s(t_n+t,\zeta)]dt\end{aligned}$$

Dalla (III.5.4) in particolare, ponendo $f\left[s(t_1+\lambda,\zeta), s(t_2+\lambda,\zeta)\right] = s(t_1+\lambda,\zeta)s(t_2+\lambda,\zeta)$ si ha:

(III.5.5) $$\prec s(t_1+\lambda,\zeta)s(t_2+\lambda,\zeta) \succ = \lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t_1+\lambda,\zeta)s(t_2+\lambda,\zeta)d\lambda$$

che, ponendo $t = t_1+\lambda$ e $\tau = (t_2+\lambda)-(t_1+\lambda)$ costituisce l'espressione della **funzione di autocorrelazione in media temporale** del segnale $s(t,\zeta)$. Risulta:

(III.5.6) $$\gamma_s(\tau,\zeta) = \lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t,\zeta)s(t+\tau,\zeta)dt$$

È da notare che, in ogni caso, le medie temporali, fornite dalla (III.5.1) o dalla (III.5.4), definiscono altrettante variabili aleatorie, dato che esse dipendono dalla manifestazione del segnale. È quindi possibile calcolare un loro valore medio statistico come segue:

$$E\left\{\prec f\left[s(t,\zeta)\right]\succ\right\} = E\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f[s(t,\zeta)]dt\right\} = \tag{III.5.7}$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} E\left\{f[s(t,\zeta)]\right\}dt = \prec E\left\{f[s(t,\zeta)]\right\}\succ$$

In maniera analoga, partendo dalla (III.5.4) si perviene alla:

$$E\left\{\sim f[s(t_1+t,\zeta),s(t_2+t,\zeta),\ldots,s(t_n+t,\zeta)]\succ\right\} = \tag{III.5.8}$$
$$= \prec E\left\{f[s(t_1+t,\zeta),s(t_2+t,\zeta),\ldots,s(t_n+t,\zeta)]\right\}\succ$$

Le (III.5.7) e (III.5.8) stanno a significare che le operazioni di media temporale e media statistica possono essere tra loro permutate.

Le medie temporali, di per sè, non permettono di ottenere delle informazioni di natura statistica del segnale. Tuttavia esiste una particolare classe di segnali per i quali ogni proprietà statistica può essere determinata a partire da una qualsiasi manifestazione. In altri termini, qualsiasi operazione di media effettuata nel tempo su una generica manifestazione conduce agli stessi risultati se si effettua l'operazione analoga sulla base dell'insieme delle manifestazioni. Un segnale di tale tipo si dice **ergodico**.

Normalmente si è interessati ad un particolare parametro del segnale (valore medio, valore quadratico medio o autocorrelazione). Di conseguenza l'ergodicità è formulata limitatamente al parametro in considerazione in quanto se un segnale aleatorio è ergodico rispetto a certi parametri può non esserlo per altri.

In particolare un segnale si dice ergodico in media quando risulta $\prec s(t,\zeta)\succ = E\{s(t,\zeta)\}$ e cioè:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t,\zeta)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x p_S(x;t)dx \tag{III.5.9}$$

si dice ergodico in funzione di autocorrelazione se $\prec s(t,\zeta)s(t+\tau,\zeta)\succ = E\{s(t,\zeta)s(t+\tau,\zeta)\}$ e cioè:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s(t,\zeta)s(t+\tau,)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2\, p_{s_1s_2}(x_1,x_2;t,t+\tau)dx_1dx_2 \tag{III.5.10}$$

Affinché la condizione di ergodicità si verifichi, occorre innanzi tutto che le medie temporali non dipendano dalla particolare manifestazione; inoltre è necessario che le medie statistiche a secondo membro delle (III.5.9) non dipendano da t e quelle definite dalla (III.5.10) dipendano solo da τ. Ciò comporta che perchè un segnale aleatorio sia ergodico è necessario che sia stazionario almeno in senso lato.

Poiché ponendo nella (III.5.10) $\tau = 0$ si ottiene:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} s^2(t,\zeta)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_S(x;t)dx \tag{III.5.11}$$

essendo $\lim_{\tau\to 0} p_{s_1s_2}(x_1,x_2;t,t+\tau) = p_{s_1}(x_1;t)\delta(x_2-x_1)$ [1] la condizione di ergodicità rispetto al valore quadratico medio discende da quelle dell'autocorrelazione.

[1] Si tengano presenti le (II.2.17) e (II.2.18) del Cap. II.