

Capitolo IV

CARATTERIZZAZIONE ENERGETICA DEI SEGNALI

Segnali a tempo continuo

IV.1 - Densità spettrale di potenza.

Analogamente al caso dei segnali determinati, è utile individuare una caratterizzazione energetica di un segnale aleatorio nel dominio della frequenza. A tal fine è opportuno associare, quando possibile, al segnale aleatorio la sua densità spettrale di potenza.

Sia dato un segnale aleatorio tale che quasi tutte le sue manifestazioni abbiano potenza specifica finita, cioè tale che l'insieme delle manifestazioni di potenza non limitata costituisca un evento di probabilità nulla. È naturale associare ad un tale processo una densità spettrale di potenza che sia la media statistica di quelle delle sue manifestazioni.

Più precisamente, sia $s(t, \zeta)$ una generica manifestazione di un segnale aleatorio; com'è noto dall'Analisi dei Segnali Determinati, la densità spettrale di potenza $w_s(f, \zeta)$ della generica manifestazione $s(t, \zeta)$ è data da:

$$(IV.1.1) \quad w_s(f, \zeta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_T(f, \zeta)|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{S_T(f, \zeta) S_T^*(f, \zeta)}{T}$$

dove $S_T(f, \zeta)$ è la trasformata di Fourier del segnale troncato $s_T(t, \zeta) = s(t, \zeta) \text{rect}\left(\frac{t-\zeta}{T}\right)$ e cioè:

$$(IV.1.2) \quad S_T(f, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} s_T(t, \zeta) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t, \zeta) e^{-j2\pi ft} dt$$

La densità spettrale di potenza $W_s(f)$ di un segnale aleatorio si ottiene effettuando la media statistica della quantità $w_s(f, \zeta)$ cioè si pone:

$$(IV.1.3) \quad W_s(f) = E \{w_s(f, \zeta)\}$$

Applicando il teorema di Wiener per segnali a potenza finita alla generica manifestazione $s(t, \zeta)$ si ha:

$$(IV.1.4) \quad w_s(f, \zeta) = F \{\gamma_s(t, \zeta)\}$$

essendo:

$$(IV.1.5) \quad \gamma_s(t, \zeta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t + \tau, \zeta) s^*(t, \zeta) dt$$

la funzione di autocorrelazione.

Tenendo conto delle (IV.1.4) e (IV.1.5), la (IV.1.3), commutando gli operatori $F\{\cdot\}$ e $E\{\cdot\}$, diventa:

$$(IV.1.6) \quad W_s(f) = E \{F \{\gamma_s(t, \zeta)\}\} = F \{E \{\gamma_s(t, \zeta)\}\}$$

od anche, ricordando l'espressione della funzione di autocorrelazione data dalla (IV.1.5):

$$(IV.1.7) \quad W_s(f) = F \left\{ E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t + \tau, \zeta) s^*(t, \zeta) dt \right\} \right\} = F \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E \{s(t + \tau, \zeta) s^*(t, \zeta)\} dt \right\}$$

In altri termini, la densità spettrale di un segnale aleatorio si può esprimere come segue:

$$(IV.1.8) \quad W_s(f) = F \{ \phi_s(\tau) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_s(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

essendo la funzione $\phi_s(\tau)$ definita dalla:

$$(IV.1.9) \quad \phi_s(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E \{ s(t + \tau, \zeta) s^*(t, \zeta) \} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_s(t, \tau) dt$$

La densità spettrale di potenza di un segnale aleatorio è uguale alla trasformata di Fourier della media temporale della funzione di autocorrelazione $R_s(t, \tau) = E \{ s(t + \tau, \zeta) s^*(t, \zeta) \}$ ⁽¹⁾, definita dalla (IV.1.9).

La (IV.1.8) costituisce il teorema di Wiener per segnali aleatori.

Nel caso di segnali stazionari (almeno in senso lato), la media statistica $E \{ s(t + \tau, \zeta) s^*(t, \zeta) \}$

dipende solo da τ , per cui si ha:

$$(IV.1.10) \quad \phi_s(\tau) = R_s(\tau)$$

e pertanto:

$$(IV.1.11) \quad W_s(f) = F \{ R_s(\tau) \} = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

Con riferimento alla (IV.1.9) si deduce:

$$(IV.1.12) \quad \phi_s(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E \{ |s(t, \zeta)|^2 \} dt$$

che, ricordando la proprietà 4 della Trasformata di Fourier, equivale alla:

$$(IV.1.13) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} E \{ |s(t, \zeta)|^2 \} dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_s(f) df$$

La media temporale del valore quadratico medio statistico di un segnale aleatorio si ottiene dall'integrale su tutto \mathbb{R} della densità spettrale.

Se il segnale è stazionario in autocorrelazione, la precedente diventa:

$$(IV.1.14) \quad m_s^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} W_s(f) df$$

IV.2 - Funzione di autocorrelazione.

La funzione di autocorrelazione:

$$(IV.2.1) \quad R_s(t, \tau) = E \{ s(t + \tau, \zeta) s^*(t, \zeta) \}$$

di un segnale aleatorio gioca un ruolo fondamentale nella caratterizzazione energetica dei segnali.

Ponendo nella (IV.2.1) $\tau = 0$ si ottiene:

$$(IV.2.2) \quad R_s(t, 0) = E \{ |s(t, \zeta)|^2 \} \geq 0$$

Dalla (IV.2.1), operando la trasformazione $t - \tau \rightarrow t$ discende:

$$(IV.2.3) \quad R_s(t, -\tau) = E \{ s(t - \tau, \zeta) s^*(t, \zeta) \} = E \{ s(t + \tau, \zeta) s^*(t, \zeta) \} = E \{ s(t', \zeta) s^*(t' - \tau, \zeta) \} = R_s^*(t, \tau)$$

Dall'ovvia condizione:

$$(IV.2.4) \quad E \{ |s(t + \tau, \zeta) + \lambda s(t, \zeta)|^2 \} \geq 0$$

⁽¹⁾ Osservando che il valore medio statistico di una variabile aleatoria complessa $Z(\zeta) = X(\zeta) + jY(\zeta)$ vale $E \{ Z(\zeta) \} = E \{ X(\zeta) \} + jE \{ Y(\zeta) \}$, si riconosce facilmente che la funzione di autocorrelazione di un segnale aleatorio complesso dipende dalla matrice di correlazione del vettore aleatorio composto dalla parte reale e dalla parte immaginaria del segnale.

valida per qualsiasi valore della costante complessa λ , discende:

$$(IV.2.5) \quad R_s(t + \tau, 0) + \lambda^* R_s(t, \tau) + \lambda R_s^*(t, \tau) + |\lambda|^2 R_s(t, 0) \geq 0$$

Poiché la forma quadratica è semidefinita positiva, il suo determinante deve risultare non negativo. È dunque $\begin{vmatrix} R_s(t + \tau, 0) & R_s(t, \tau) \\ R_s^*(t, \tau) & R_s(t, 0) \end{vmatrix} \geq 0$ da cui:

$$(IV.2.6) \quad |R_s(t, \tau)| \leq \sqrt{R_s(t, 0)R_s(t + \tau, 0)}$$

Nel caso di segnali stazionari la (IV.2.2) diventa:

$$(IV.2.7) \quad R_s(0) = E \{ |s(t)|^2 \} \geq 0$$

e la (IV.2.3), si semplifica nella:

$$(IV.2.8) \quad R_s(-\tau) = R_s^*(\tau)$$

e cioè la $R_s(\tau)$ gode della simmetria hermitiana.

Infine la disuguaglianza (IV.2.6) diventa:

$$(IV.2.9) \quad |R_s(\tau)| \leq R_s(0)$$

Le proprietà della funzione di autocorrelazione per segnali tempo continui sono riassunte nella Tab. IV.1

Tabella IV.1

Proprietà dell'autocorrelazione di segnali a tempo continuo

Segnali stazionari	Segnali non stazionari
$R_s(\tau) = E \{ s(t + \tau, \zeta) s^*(t, \zeta) \}$	$R_s(t, \tau) = E \{ s(t + \tau, \zeta) s^*(t, \zeta) \}$
$R_s(0) = E \{ s(t, \zeta) ^2 \}$	$R_s(t, t) = E \{ s(t, \zeta) ^2 \}$
$R_s(-\tau) = R_s^*(\tau)$	$R_s(t, \tau) = R_s^*(t, -\tau)$
$ R_s(\tau) \leq R_s(0)$	$ R_s(t, \tau) \leq \sqrt{R_s(t, 0)R_s(t + \tau, 0)}$

Al posto dell'autocorrelazione è utile, in certi casi, introdurre la **funzione di autocovarianza** definita dalla:

$$(IV.2.10) \quad \begin{aligned} \sigma_s(t, \tau) &= E \left\{ \left[s(t, \zeta) - E \{ s(t, \zeta) \} \right] \left[s(t + \tau, \zeta) - E \{ s(t + \tau, \zeta) \} \right] \right\} = \\ &= R_s(t, \tau) - E \{ s(t, \zeta) \} E \{ s(t + \tau, \zeta) \} \end{aligned}$$

Esempio E.IV.1

L'autocorrelazione della derivata $s'(t, \zeta)$ di un segnale è data dalla:

$$R_{s'}(\tau) = E \{ s'(t) s'(t + \tau) \}$$

Se il segnale è stazionario si ha:

$$\begin{aligned} R_{s'}(\tau) &= E \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t + \tau + h) - s(t + \tau)}{h} \right\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} E \left\{ \frac{s(t + h)s(t + \tau + h) - s(t)s(t + \tau + h) - s(t + h)s(t + \tau) + s(t)s(t + \tau)}{h^2} \right\} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{h} \left[\frac{R_s(\tau) - R_s(\tau - h)}{h} - \frac{R_s(\tau + h) - R_s(\tau)}{h} \right] \right\} = - \frac{d^2 R_s(\tau)}{d\tau^2} \end{aligned}$$

essendo $R_s(\tau)$ la funzione di autocorrelazione del segnale $s(t, \zeta)$.

La densità spettrale di potenza di $s'(t, \zeta)$ può essere espressa in termini della densità spettrale del segnale di potenza di $s(t, \zeta)$; si ha:

$$W_{s'}(f) = F \left\{ -\frac{d^2 R_s(\tau)}{d\tau^2} \right\} = 4\pi^2 f^2 W_s(f)$$

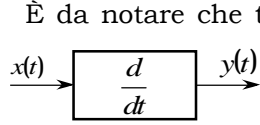


Fig. E.IV.1

È da notare che tale risultato poteva essere ottenuto semplicemente osservando che la derivata di un segnale può essere considerata come il segnale in uscita dal sistema lineare rappresentato in Fig. E.1, quando al suo ingresso è applicato il segnale $x(t)$. Poiché la risposta in frequenza del sistema è $H(f) = j2\pi f$, ne viene $W_{s'}(f) = |H(f)|^2 W_s(f)$.

IV.3 - Segnali distinti. Funzioni di correlazione e densità spettrale incrociate.

Le considerazioni svolte nei precedenti paragrafi possono essere facilmente estese al caso di n segnali aleatori reali e tempo continui $s_i(t, \zeta)$. In quel che segue è conveniente introdurre il vettore

$$(IV.3.1) \quad s(t, \zeta) = \begin{bmatrix} s_1(t, \zeta) \\ s_2(t, \zeta) \\ \dots \\ s_n(t, \zeta) \end{bmatrix}$$

Si definisce **matrice di correlazione** la matrice:

$$(IV.3.2) \quad R(t, \tau) = E \left\{ s^*(t, \zeta) s^T(t + \tau, \zeta) \right\} = \begin{bmatrix} E \left\{ s_1^*(t, \zeta) s_1(t + \tau, \zeta) \right\} & E \left\{ s_1^*(t, \zeta) s_2(t + \tau, \zeta) \right\} & \dots & E \left\{ s_1^*(t, \zeta) s_n(t + \tau, \zeta) \right\} \\ E \left\{ s_2^*(t, \zeta) s_1(t + \tau, \zeta) \right\} & E \left\{ s_2^*(t, \zeta) s_2(t + \tau, \zeta) \right\} & \dots & E \left\{ s_2^*(t, \zeta) s_n(t + \tau, \zeta) \right\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E \left\{ s_n^*(t, \zeta) s_1(t + \tau, \zeta) \right\} & E \left\{ s_n^*(t, \zeta) s_2(t + \tau, \zeta) \right\} & \dots & E \left\{ s_n^*(t, \zeta) s_n(t + \tau, \zeta) \right\} \end{bmatrix}$$

Essa dipende dalle variabili t e τ a meno che i segnali non siano congiuntamente stazionari. In questo caso la matrice di correlazione dipende solo da τ e si ha:

$$(IV.3.3) \quad R(\tau) = E \left\{ s^*(t, \zeta) s^T(t + \tau, \zeta) \right\}$$

Con riferimento alla (IV.3.2) gli elementi della diagonale principale della matrice di correlazione sono le autocorrelazioni dei segnali $s_i(t, \zeta)$, mentre gli altri elementi rappresentano le **mutue correlazioni** o **correlazioni incrociate**. Risulta ovviamente:

$$(IV.3.4) \quad R_{ij}(t, -\tau) = R_{ji}^*(t, \tau)$$

Se i segnali $s_i(t, \zeta)$ sono stazionari la precedente diventa:

$$(IV.3.5) \quad R_{ij}(\tau) = R_{ji}^*(-\tau)$$

Si prenda in esame il segnale:

$$(IV.3.6) \quad s(t, \zeta) = s_1(t, \zeta) + k s_2(t + \tau, \zeta)$$

dove k è una costante complessa. Dall'ovvia condizione $E \left\{ |s(t, \zeta)|^2 \right\} \geq 0$ discende che la forma

quadratica:

$$(IV.3.7) \quad R_{s_1}(t, 0) + k R_{s_1 s_2}(t, \tau) + k^* R_{s_2 s_1}^*(t, \tau) + |k|^2 R_{s_2}(t + \tau, 0) \geq 0$$

è semidefinita positiva. Ciò comporta che si deve verificare la condizione:

$$(IV.3.8) \quad \begin{bmatrix} R_{s_1}(t, 0) & R_{s_1 s_2}(t, \tau) \\ R_{s_1 s_2}^*(t, \tau) & R_{s_2}(t + \tau, 0) \end{bmatrix} \geq 0$$

dalla quale si deduce:

$$(IV.3.9) \quad |R_{s_1 s_2}(t, \tau)| \leq \sqrt{R_{s_1}(t, 0) \cdot R_{s_2}(t + \tau, 0)}$$

Sei segnali $s_1(t, \zeta)$ e $s_2(t, \zeta)$ sono congiuntamente stazionari, la precedente diviene:

$$(IV.3.10) \quad |R_{s_1 s_2}(\tau)| \leq \sqrt{R_{s_1 s_1}(0) \cdot R_{s_2 s_2}(0)}$$

In certi casi, è preferibile caratterizzare n segnali aleatori mediante la **matrice di covarianza** così definita:

$$(IV.3.11) \quad \sigma_s(t, \tau) = E \left\{ [s(t, \zeta) - m_s(t)]^* [s(t + \tau, \zeta) - m_s(t + \tau)]^T \right\} = \mathbf{R}_s(t, \tau) - \mathbf{m}_s^*(t) \mathbf{m}_s^T(t + \tau)$$

dove $\mathbf{m}_s(t)$ è il vettore dei valori medi dei segnali valutato nell'istante t definito dalla:

$$(IV.3.12) \quad \mathbf{m}_s(t) = \begin{bmatrix} E \{s_1(t, \zeta)\} \\ E \{s_2(t, \zeta)\} \\ \vdots \\ E \{s_n(t, \zeta)\} \end{bmatrix}$$

Due segnali aleatori $s_1(t, \zeta)$ e $s_2(t, \zeta)$ si dicono **ortogonali** se la loro funzione di mutua correlazione è nulla, **incorrelati** se è nulla la loro funzione di mutua covarianza.

È da notare che se i segnali sono statisticamente indipendenti sono anche incorrelati dal momento che risulta:

$$(IV.3.13) \quad R_{s_1 s_2}(t, t + \tau) = E \{s_1^*(t, \zeta)\} \cdot E \{s_1(t + \tau, \zeta)\}$$

Non è vero il contrario cioè se due segnali sono incorrelati non è detto che essi siano anche statisticamente indipendenti.

IV.4 – Il rumore bianco.

Un segnale aleatorio $n(t, \zeta)$ stazionario la cui densità spettrale è costante è denominato rumore bianco. Per tale segnale risulta:

$$(IV.4.1) \quad W_n(f) = \frac{N_0}{2} = \text{cost}$$

Poiché manifestamente il valore quadratico medio del segnale dato dall'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} W_n(f) df$ non è definito, tale segnale non è fisicamente realizzabile; tuttavia risulta un modello molto utile perché parecchi disturbi, quali ad es. il rumore termico, il rumore atmosferico ed altro, presentano una densità spettrale pressoché costante almeno entro la banda di interesse.

La funzione di autocorrelazione del rumore bianco vale:

$$(IV.4.2) \quad R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

Un tipo di rumore bianco a valore quadratico medio finito è quello in cui la densità spettrale si mantiene costante solo all'interno di una banda finita e nulla al di fuori. A seconda della dislocazione della banda nel dominio della frequenza il rumore bianco si classifica in rumore di tipo passa-basso e in rumore di tipo passa-banda.

IV.4.1 – Il rumore bianco di tipo passa-basso.

Si ha:

$$(IV.4.3) \quad W_n(f) = \frac{N_0}{2} \text{rect}\left(\frac{f}{2f_m}\right)$$

Risulta:

$$(IV.4.4) \quad R_n(\tau) = N_0 f_m \text{sinc}(2f_m \tau)$$

La densità spettrale e la funzione di autocorrelazione del rumore di tipo passa-basso sono riportati in Fig. IV.1.

IV.4.2 – Il rumore bianco di tipo passa-banda.

Si ha:

$$(IV.4.5) \quad W_n(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & f \in [f_1, f_2] \\ 0 & f \notin [f_1, f_2] \end{cases}$$

La funzione di autocorrelazione vale:

$$(IV.4.6) \quad R_n(\tau) = N_0 B \cdot \text{sinc}(B\tau) \cdot \cos(2\pi f_0 \tau)$$

dove f_0 e B denotano rispettivamente la frequenza centrale e l'ampiezza di banda del segnale aleatorio dati dalle:

$$(IV.4.7) \quad f_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \quad B = f_2 - f_1$$

La densità spettrale e la funzione di autocorrelazione del rumore di tipo passa-basso sono riportati in Fig.

IV.2.

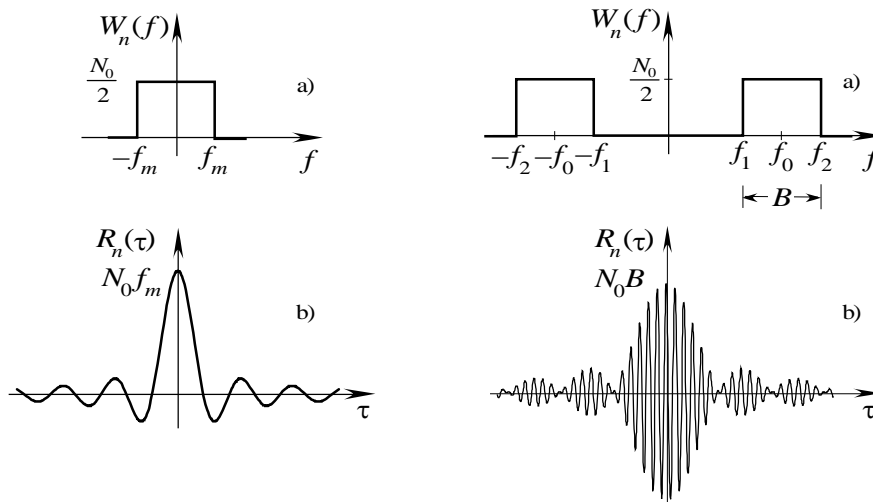


Fig. IV.1 - Densità ed autocorrelazione di un rumore di tipo passa-basso.

Fig. IV.2 - Densità ed autocorrelazione di un rumore di tipo passa-banda.

Segnali a tempo discreto

IV.5 - Densità spettrale di potenza.

La densità spettrale di potenza $W_s(f)$ per i segnali a tempo discreto è definita, analogamente a quanto visto per i segnali a tempo continuo, come la media statistica delle densità spettrali di potenza delle manifestazioni.

Se $s(nT, \zeta)$ denota la generica manifestazione di un segnale aleatorio, la densità spettrale di potenza è:

$$(IV.5.1) \quad w_s(f, \zeta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} |S_N(f, \zeta)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)T} S_N(f, \zeta) S_N^*(f, \zeta)$$

dove $S_N(f, \zeta)$ denota la trasformata di Fourier discreta del segnale troncato $s_N(nT, \zeta)$ e cioè:

$$(IV.5.2) \quad S_N(f, \zeta) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_N(nT, \zeta) e^{-j2\pi n f T} = T \sum_{n=-N}^N s(nT, \zeta) e^{-j2\pi n f T}$$

Effettuando la media statistica della quantità $w_s(f, \zeta)$ si ottiene la densità spettrale di potenza del segnale aleatorio:

$$(IV.5.3) \quad W_s(f) = E \{ w_s(f, \zeta) \}$$

Applicando il teorema di Wiener per segnali a potenza finita alla generica manifestazione $s(nT, \zeta)$ si ha:

$$(IV.5.4) \quad w_s(f, \zeta) = F \{ \gamma_s(kT, \zeta) \}$$

essendo:

$$(IV.5.5) \quad \gamma_s(kT, \zeta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N s(nT, \zeta) s(nT+kT, \zeta)$$

la funzione di autocorrelazione.

Tenendo conto delle (IV.5.5) e (IV.5.5), la (IV.5.3), commutando gli operatori $F \{ \cdot \}$ e $E \{ \cdot \}$,

diventa:

$$(IV.5.6) \quad W_s(f) = E \{ F \{ \gamma_s(k, \zeta) \} \} = F \{ E \{ \gamma_s(k, \zeta) \} \}$$

e cioè:

$$(IV.5.7) \quad W_s(f) = F \left\{ E \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N s^*(nT, \zeta) s(nT+kT, \zeta) \right\} \right\} = F \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N E \{ s^*(nT, \zeta) s(nT+kT, \zeta) \} \right\}$$

Analogamente al caso di segnali tempo continui, la densità spettrale di un segnale aleatorio tempo discreto si può esprimere come segue:

$$(IV.5.8) \quad W_s(f) = F \{ \phi_s(kT) \} = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_s(kT) e^{-j2\pi k f T}$$

essendo la funzione $\phi_s(\tau)$ definita dalla:

$$(IV.5.9) \quad \phi_s(kT) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N E \{ s^*(nT, \zeta) s(nT+kT, \zeta) \} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N R_s(nT, nT+kT)$$

La densità spettrale di potenza di un segnale aleatorio è uguale alla trasformata di Fourier discreta della media temporale della funzione di autocorrelazione

$R_s(nT, kT) = E \left\{ s^*(nT, \zeta) s(nT + kT, \zeta) \right\}$, definita dalla (IV.1.9).

La (IV.5.8) costituisce il teorema di Wiener per segnali aleatori.

Nel caso di segnali stazionari (almeno in senso lato), si ha:

$$(IV.5.10) \quad \phi_s(kT) = R_s(kT)$$

e pertanto:

$$(IV.5.11) \quad W_s(f) = F \{ R_s(kT) \} = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_s(kT) e^{-j2k\pi kT}$$

Ponendo nella (IV.5.9) $k = 0$ si deduce:

$$(IV.5.12) \quad \phi_s(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N E \left\{ |s(nT, \zeta)|^2 \right\}$$

che, ricordando la proprietà 4 della Trasformata di Fourier, equivale alla:

$$(IV.5.13) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N E \left\{ |s(nT, \zeta)|^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} W_s(f) df$$

La media temporale del valore quadratico medio statistico di un segnale aleatorio si ottiene dall'integrale su tutto \mathbb{R} della densità spettrale.

La simmetria hermitiana di cui gode l'autocorrelazione, fa sì che risulti $\phi_s(kT) = \phi_s^*(-kT)$, la quale comporta che la densità spettrale di potenza è una funzione reale e pari del suo argomento.

IV.6 - Funzione di autocorrelazione.

Sia $s(nT, \zeta)$ un segnale aleatorio a tempo discreto. La sua funzione di autocorrelazione è definita dalla:

$$(IV.6.1) \quad R_s(nT, kT) = E \left\{ s^*(nT, \zeta) s(nT + kT, \zeta) \right\}$$

la quale, in generale, dipende dagli indici n e k . Se il segnale è stazionario (almeno in senso lato) l'autocorrelazione dipende solo dalla differenza tra gli istanti di osservazione e quindi dipende da un solo indice:

$$(IV.6.2) \quad R_s(kT) = E \left\{ s^*(nT, \zeta) s(nT + kT, \zeta) \right\}$$

Ponendo nella (IV.6.1), $k = 0$ si ottiene:

$$(IV.6.3) \quad R_s(nT, 0) = E \left\{ |s(nT, \zeta)|^2 \right\} \geq 0$$

che, nel caso di segnali stazionari, si riduce alla:

$$(IV.6.4) \quad R_s(0) = E \left\{ |s(nT, \zeta)|^2 \right\} \geq 0$$

Dalla (IV.6.1), operando la trasformazione $nT - kT \rightarrow nT$, si deduce facilmente:

$$(IV.6.5) \quad R_s(nT, -kT) = E \left\{ s^*(nT, \zeta) s(nT - kT, \zeta) \right\} = E \left\{ s(nT, \zeta) s^*(nT + kT, \zeta) \right\} = R_s^*(nT, kT)$$

che se il segnale è stazionario, diventa:

$$(IV.6.6) \quad R_s(kT) = R_s^*(-kT)$$

Pertanto l'autocorrelazione di un segnale stazionario, almeno in senso lato, gode della simmetria hermitiana.

Le proprietà dell'autocorrelazione sono riassunte nella Tab. IV.4

Tabella IV.2

**Proprietà dell'autocorrelazione
di segnali a tempo discreto**

Segnali stazionari	Segnali non stazionari
$R_s(kT) = E \left\{ s^*(nT, \zeta) s(nT + kT, \zeta) \right\}$	$R_s(nT, kT) = E \left\{ s^*(nT, \zeta) s(nT + kT, \zeta) \right\}$
$R_s(0) = E \left\{ s(nT, \zeta) ^2 \right\}$	$R_s(nT, nT) = E \left\{ s(nT, \zeta) ^2 \right\}$
$R_s(-kT) = R_s^*(kT)$	$R_s(nT, mT) = R_s^*(mT, nT)$
$ R_s(kT) \leq R_s(0)$	$ R_s(mT, nT) \leq \sqrt{R_s(mT, mT) R_s(nT, nT)}$