Capitolo V

SISTEMI LINEARI CON INGRESSI ALEATORI

Sistemi lineari a tempo continuo

V.1 - Caratterizzazione nel dominio del tempo.

Un sistema lineare analogico, in generale tempo variante, caratterizzato da una risposta impulsiva data da $h(t,\tau)$ trasforma ogni manifestazione $x(t,\zeta)$ del segnale in ingresso in una manifestazione $y(t,\zeta)$ del segnale in uscita secondo la:

(V.1.1) $$y(t,\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau,\zeta)h(t,\tau)d\tau$$

In generale la valutazione delle funzioni di probabilità associate al segnale $y(t,\zeta)$ è molto complessa, a meno che $x(t,\zeta)$ non sia gaussiano, cosicché, nella maggior parte dei casi, ci si limita alla valutazione della media statistica e delle funzioni di correlazione, come sarà in seguito illustrato.

V.1.1 - Valore medio del segnale in uscita

Prendendo il valore medio statistico della (V.1.1) si ha:

(V.1.2) $$E\{y(t,\zeta)\}=E\left\{\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau,\zeta)h(t,\tau)d\tau\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}E\{x(\tau,\zeta)\}h(t,\tau)d\tau$$

che, denotando con $m_x^{(1)}(t)$ e $m_y^{(1)}(t)$ i valor medi dei segnali $x(t,\zeta)$ e $y(t,\zeta)$ rispettivamente valutati all'istante t, assume la forma:

(V.1.3) $$m_y^{(1)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}m_x^{(1)}(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

Se il sistema è tempo invariante, dalla (V.1.3) si deduce:

(V.1.4) $$m_y^{(1)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}m_x^{(1)}(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}m_x^{(1)}(t-\tau)h(\tau)d\tau=m_x^{(1)}*h$$

e cioè il valor medio del segnale in uscita è ottenuto dalla convoluzione del valor medio del segnale in ingresso con la risposta impulsiva del sistema. In altre parole, la quantità $m_y^{(1)}(t)$ si identifica con la risposta del sistema quando al suo ingresso è applicato il segnale determinato $m_x^{(1)}(t)$. Se inoltre il segnale in ingresso è stazionario, dalla (V.1.4) discende:

(V.1.5) $$m_y^{(1)}=m_x^{(1)}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)dt=m_x^{(1)}\cdot H(0)$$

Il valore medio del segnale in uscita è uguale al prodotto del valore medio del segnale in ingresso per la risposta in frequenza valutata all'origine: il segnale $y(t,\zeta)$ è così stazionario in senso lato.

V.1.2 Funzione di autocorrelazione del segnale in uscita.

Dalla (V.1.1) si ottiene:

(V.1.6) $$y(t_1,\zeta)y(t_2,\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau_1,\zeta)x(\tau_2,\zeta)h(t_1,\tau_1)h(t_2,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

che, prendendo le medie statistiche diviene:

(V.1.7) $$R_y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau_1,\tau_2)h(t_1,\tau_1)h(t_2,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

Se il segnale in ingresso è stazionario e il sistema è tempo invariante la (V.1.7) diventa:

(V.1.8) $$R_y(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau_2-\tau_1)h(t_1-\tau_1)h(t_2-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

che, introducendo le posizioni $u=t_1-\tau_1$, $v=(t_1-\tau_1)-(t_2-\tau_2)=(\tau_2-\tau_1)-\tau$ con $\tau=t_2-t_1$, assume la forma:

(V.1.9) $$R_y(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau+v)\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(u)h(u-v)du\right]dv$$

dalla quale si deduce che il segnale in uscita è stazionario in autocorrelazione in senso lato almeno.

V.1.4 Funzione di correlazione incrociata

Moltiplicando la (V.1.1), scritta per $t=t_2$, per $x(t_1,\zeta)$ si ottiene:

(V.1.10) $$x(t_1,\zeta)y(t_2,\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t_1,\zeta)x(\vartheta,\zeta)h(t_2,\vartheta)d\vartheta$$

che mediata fornisce:

(V.1.11) $$R_{xy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(t_1,\vartheta)h(t_2,\vartheta)d\vartheta$$

essendo $R_{xy}(t_1,t_2)$ la correlazione incrociata fra i segnali $x(t,\zeta)$ e $y(t,\zeta)$.

Nel caso di ingressi stazionari e di sistemi tempo invarianti la (V.1.11) si riduce alla:

(V.1.12) $$R_{xy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\vartheta-t_1)h(t_2-\vartheta)d\vartheta$$

che ponendo come prima $u=t_2-\vartheta_1$ e $\tau=t_2-t_1$ diventa:

(V.1.13) $$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}R_x(\tau-u)h(u)du$$

La funzione $R_{xy}(t_1,t_2)$ dipende solo dalla differenza $\tau=t_2-t_1$ fra gli istanti considerati e pertanto i due segnali $x(t,\zeta)$ e $y(t,\zeta)$ sono congiuntamente stazionari.

Esempio E.V.1

Si prenda in considerazione il filtro passa basso di cui all'Esempio E.VI.6 della Parte I cui il segnale in ingresso è un segnale aleatorio caratterizzato da un valor medio nullo e da una funzione di autocorrelazione data dalla:

$$R_x(\tau)=e^{-|\tau|}$$

La risposta in frequenza del filtro è:

$$H(f)=\frac{1}{1+j2\pi fRC}$$

e di conseguenza la risposta impulsiva vale:

$$h(t)=\frac{u(t)}{RC}e^{-t/RC}$$

a) Il valor medio del segnale in uscita è manifestamente nullo.

b) La funzione di autocorrelazione del segnale in uscita è determinata dalla (V.1.9). In tal caso essendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(u)h(v-u)du=\begin{cases}\dfrac{1}{R^2C^2}\displaystyle\int_v^{\infty}e^{-\frac{2u-v}{RC}}du=\dfrac{1}{2RC}e^{-\frac{v}{RC}} & v>0\\[2ex] \dfrac{1}{R^2C^2}\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-\frac{2u-v}{RC}}du=\dfrac{1}{2RC}e^{\frac{v}{RC}} & v<0\end{cases}$$

e cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(u)h(v-u)du=\frac{1}{2RC}e^{-\frac{|v|}{RC}}$$

Si ha dunque:

$$R_y(\tau)=\frac{1}{2RC}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|v+\tau|}e^{-|v|/RC}dv=\frac{1}{2RC}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}e^{-|x-\tau|}dx$$

Considerando il caso di $\tau>0$ la precedente diviene:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2RC}\left\{\int_0^\tau e^{-x}e^{(x-\tau)/RC}dx + \int_\tau^\infty e^{-x}e^{-(x-\tau)/RC}dx\right\} = \frac{e^{-\tau/RC}}{2(RC-1)} - \frac{e^{-\tau}}{R^2C^2-1}$$

Poiché la funzione di autocorrelazione risulta una funzione pari del suo argomento si ha:

$$R_y(\tau) = \frac{e^{-|\tau|/RC}}{2(RC-1)} - \frac{e^{-|\tau|}}{R^2C^2-1}$$

Dalla precedente può determinarsi il valore quadratico medio del segnale in uscita. Infatti risulta:

$$E\left\{y^2(t,\zeta)\right\} = R_y(0) = \frac{1}{2(RC-1)} - \frac{1}{R^2C^2-1} = \frac{1}{2(RC+1)}$$

V.2 - Caratterizzazione nel dominio della frequenza.

Nel caso dei sistemi analogici e tempo invarianti, le relazioni fra le funzioni di autocorrelazione dei segnali in ingresso e di uscita risultano alquanto più semplici se riportate nel dominio della frequenza.

Sia il segnale in ingresso $x(t,\zeta)$ stazionario e caratterizzato da una densità spettrale data da $W_x(f)$. La densità spettrale del segnale in uscita dal sistema si ottiene dalla:

(V.2.1) $$W_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

dove la funzione di autocorrelazione $R_y(\tau)$ è definita dalla (V.1.9). D'altra parte ponendo:

(V.2.2) $$\phi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(u-v)du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h[-(v-u)]du = h(t)*h(-t)$$

la (V.1.9) si scrive:

(V.2.3) $$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau+v)\phi(v)dv = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau-v)\phi(-v)dv$$

dove nell'ultimo integrale si è operata la trasformazione $\nu \to -\nu$.

Dalla (V.2.2) si deduce che la $R_y(\tau)$ si ottiene dalla convoluzione della funzione $\phi(-v)$ con la $R_x(\tau)$. Di conseguenza, denotando con $\Phi(f)$ la trasformata di Fourier di $\phi(\nu)$ la (V.2.3) si trasforma nella:

(V.2.4) $$W_y(f) = \boldsymbol{F}\left\{R_y(\tau)\right\} = \Phi(-f)W_x(f)$$

giacché è $\boldsymbol{F}\left\{\phi(-u)\right\} = \Phi(-f)$.

Con riferimento alla (V.2.2) si deduce inoltre che è:

(V.2.5) $$\Phi(f) = H(f)H(-f)$$

e quindi si ottiene:

(V.2.6) $$W_y(f) = W_x(f)H(f)H(-f) = W_x(f)\left|H(f)\right|^2$$

dove si è fatto uso della proprietà di simmetria hermitiana della risposta in frequenza del sistema.

Dalla (V.2.6) si deduce infine l'espressione del valore quadratico medio del segnale in uscita

(V.2.7) $$E\left\{y^2(t,\zeta)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} W_y(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f)\left|H(f)\right|^2 df$$

Esempio E.V.2

Se in ingresso al filtro passa basso di cui all'Esempio E.I.6 è applicato un rumore bianco caratterizzato cioè da una densità spettrale pari a N_0 la densità spettrale del segnale in uscita vale:

$$W_y(f) = \frac{N_0}{1+\left(2\pi fRC\right)^2}$$

Il valore quadratico medio del segnale in uscita vale allora:

$$E\left\{y^2(t,\zeta)\right\} = N_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{df}{1+\left(2\pi fRC\right)^2} = \frac{N_0}{2\pi RC}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{N_0}{2RC}$$

Esempio E.V.3

All'ingresso di un filtro RC passa basso, di cui all'Esempio E.I.6, è applicato un rumore $n(t,\zeta)$ stazionario, a valor medio nullo e densità spettrale costante e pari a N_0 al quale si sovrappone un segnale determinato costituito da un gradino unitario.

Detto pertanto

$$x(t,\zeta) = u(t) + n(t,\zeta)$$

il segnale in ingresso, la risposta $y(t,\zeta)$ del filtro sarà composta da:

a) dalla risposta al gradino che vale

$$u(t)\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

b) dalla risposta al rumore

$$\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau,\zeta)h(t-\tau)d\tau$$

È dunque:

(a)
$$y(t,\zeta) = u(t)\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau,\zeta)h(t-\tau)d\tau$$

Il segnale $y(t,\zeta)$ è pertanto gaussiano e quindi la sua statistica è individuata dal valor medio e dalla funzione di autocovarianza.

Con riferimento alla (a) si ha:

$$E\left\{y(,\zeta)\right\} = u(t)\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

e

$$k_y(\tau) = E\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau,\zeta)h(t-\tau)d\tau\right]^2\right\} = \boldsymbol{F}^{-1}\left\{N_0\left|H(f)\right|^2\right\} = N_0\boldsymbol{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+\left(2\pi fRC\right)^2}\right\} = \frac{N_0}{2RC}e^{-\frac{2|\tau|}{RC}}$$

Esempio E.V.4

Si cosideri un filtro ideale passa banda di frequenza centrale f_0 e banda B. Se tale filtro è sollecitato da un segnale di densità spettrale $W_x(f)$ il valore quadratico medio del segnale in uscita vale:

$$E\left\{y^2(t,\zeta)\right\} = \int_{-f_0-\frac{B}{2}}^{-f_0+\frac{B}{2}} W_x(f)df + \int_{f_0-\frac{B}{2}}^{f_0+\frac{B}{2}} W_x(f)df$$

Se l'ampiezza di banda B del filtro si può ritenere sufficientemente piccola, la precedente si può approssimare con la:

$$E\left\{y^2(t,\zeta)\right\} \cong \left[W_x(-f_0)+W_x(f_0)\right]B = 2BW_x(f_0)$$

dalla quale si conclude che dalla condizione $E\left\{y^2(t,\zeta)\right\} \geq 0$ discende:

$$W_x(f_0) \geq 0$$

La condizione di positività della densità spettrale di un segnale aleatorio acquista così un'interessante interpretazione.

Esempio E.V.5

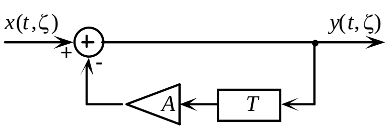

Fig. E.V.1

Il sistema riportato in Fig. E.V.1 è sollecitato da un rumore bianco di tipo passa basso, stazionario e a valor medio pari a m_x.

L'equazione del sistema è:

(b)
$$y(t,\zeta) = x(t,\zeta) - Ay(t-T,\zeta)$$

e la sua risposta in frequenza vale:

$$H(f) = \frac{1}{1+Ae^{-j2\pi fT}}$$

a) Calcolo del valore medio del segnale in uscita.

Dalla (b) si ha, essendo il segnale $y(t,\zeta)$ stazionario:

$$m_y = E\left\{y(t,\zeta)\right\} = \frac{m_x}{1+A}$$

b) Calcolo del valore quadratico medio del segnale in uscita.

$$E\left\{y^2(t,\zeta)\right\} = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_x(f)\left|\frac{1}{1+e^{-j2\pi fT}}\right|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W_x(f)}{\left(1+A^2\right)+2A\cos(2\pi fT)}df$$

che, denotando con $\left(-f_m, f_m\right)$ la banda del segnale in ingresso, diventa:

$$E\left\{y^2(t,\zeta)\right\} = \eta\int_{-f_m}^{f_m} \frac{df}{\left(1+A^2\right)+2A\cos(2\pi fT)}$$

Per risolvere questo integrale si osservi che si ha:

$$\frac{1}{\left(1+A^2\right)+2A\cos\left(2\pi fT\right)} = \frac{1}{\left(1+A^2\right)\left(\cos^2\left(\pi fT\right)+\sin^2\left(\pi fT\right)\right)+2A\left(\cos^2\left(\pi fT\right)-\sin^2\left(\pi fT\right)\right)}$$

per cui ponendo

$$x = \mathrm{tg}\left(\pi fT\right)$$

risulta:

$$E\left\{y^2(t,\zeta)\right\} = \frac{N_0}{\pi T}\int_{-\mathrm{tg}(\pi f_m T)}^{\mathrm{tg}(\pi f_m T)} \frac{dx}{\left(1+A\right)^2+\left(1-A\right)^2 x^2} = \frac{2\eta}{\pi T(1-A^2)}\,\mathrm{arctg}\left\{\frac{1-A}{1+A}\,\mathrm{tg}\left(\pi f_m T\right)\right\}$$

c) <u>Calcolo della varianza del segnale in uscita</u>.

Si ha:

$$\sigma_y^2 = E\left\{y^2(t,\zeta)\right\} - m_y^2 = \frac{2N_0}{\pi T(1-A^2)}\,\mathrm{arctg}\left\{\frac{1-A}{1+A}\,\mathrm{tg}\left(\pi f_m T\right)\right\} - \frac{m_x^2}{\left(1+A\right)^2}$$