

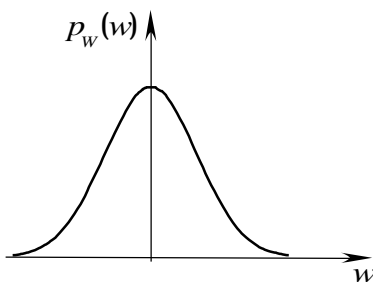
**VI.1 – Variabili aleatorie normali o gaussiane.**

Sia  $W$  una variabile aleatoria caratterizzata dalla seguente densità di probabilità:

$$(VI.1.1) \quad p_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}}$$

rappresentata in Fig. VI.1.

Una tale variabile aleatoria presenta:



**Fig.VI.1** Densità di probabilità di una variabile aleatoria normale o gaussiana.

a) *valor medio nullo.*

Infatti è:

$$(VI.1.2) \quad m_W \equiv E\{W\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w e^{-\frac{w^2}{2}} dw = 0$$

essendo l'integrando una funzione dispari di  $w$ .

b) *varianza unitaria.*

Infatti, essendo il valor medio nullo, è:

$$(VI.1.3) \quad \sigma_W^2 = E\{W^2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 e^{-\frac{w^2}{2}} dw$$

che, notando che è  $d\left\{\exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)\right\} = -w \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) dw$ , diviene, sviluppando l'integrale per parti:

$$(VI.1.4) \quad \sigma_W^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w d\left[-\exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-w \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = 1$$

dove si è tenuto conto che è, per la condizione di normalizzazione:

$$(VI.1.5) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw = 1$$

Una variabile aleatoria siffatta si definisce normale (o gaussiana) a valor medio nullo e varianza unitaria e si scrive:

$$(VI.1.6) \quad W \approx \mathcal{N}(0,1)$$

Di particolare interesse è la funzione  $Q$ , definita dalla

$$(VI.1.7) \quad Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{w^2}{2}} dw$$

Essa non può essere espressa in forma chiusa; tuttavia se ne possono dare efficaci approssimazioni per valori elevati del suo argomento. A tale scopo si ha:

$$(VI.1.8) \quad \begin{aligned} \int_x^{\infty} e^{-w^2/2} dw &= \int_x^{\infty} \frac{1}{w} (w e^{-w^2/2}) dw = \int_x^{\infty} \frac{1}{w} d(-e^{-w^2/2}) = \\ &= \frac{1}{w} (-e^{-w^2/2}) \Big|_x^{\infty} - \int_x^{\infty} \frac{1}{w^2} e^{-w^2/2} dw = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{\infty} \frac{1}{w^2} e^{-w^2/2} dw \end{aligned}$$

D'altra parte poiché, per  $x > 0$ , è:

$$(VI.1.9) \quad 0 < \int_x^{\infty} \frac{1}{w^2} e^{-w^2/2} dw = \int_x^{\infty} \frac{w}{w^3} e^{-w^2/2} dw < \frac{1}{x^3} \int_x^{\infty} w e^{-w^2/2} dw = \frac{e^{-x^2/2}}{x^3}$$

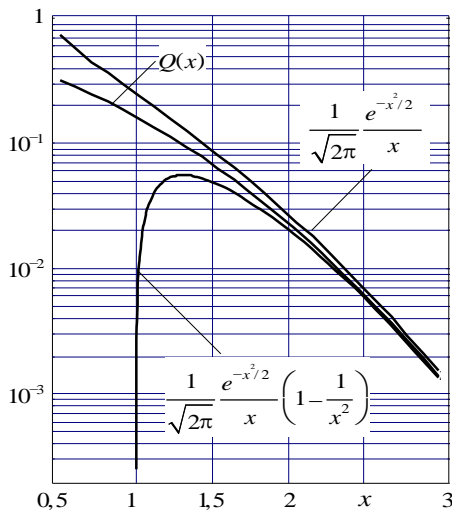


Fig. VI.2 - Funzione Q e suoi limiti.

$I_x \equiv \left[ x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2} \right]$  è eguale alla probabilità che  $W$  appartenga all'intervallo  $I_w \equiv \left[ w - \frac{\Delta w}{2}, w + \frac{\Delta w}{2} \right]$  (v. Fig. VI.3). In altre parole, supponendo  $\Delta w$  e  $\Delta x$  abbastanza piccoli, si deve avere:

$$(VI.1.12) \quad p_x(x) |\Delta x| = p_w(w) |\Delta w|$$

dove si è tenuto conto del fatto che le probabilità interessate sono quantità positive. La (VI.1.12), essendo  $w = \frac{x-b}{a}$ , può essere riscritta come segue:

$$(VI.1.13) \quad p_x(x) = \frac{p_w\left(\frac{x-b}{a}\right)}{\left|\frac{\Delta x}{\Delta w}\right|} = \frac{1}{|a|} p_w\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

e cioè:

$$(VI.1.14) \quad p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$$

Dalla (VI.1.11) si ricava il valore medio:

$$(VI.1.15) \quad m_x = E\{X\} = aE\{W\} + b = b$$

e la varianza;

$$(VI.1.16) \quad \sigma_x^2 = E\{(X - m_x)^2\} = E\{(X - b)^2\} = E\{(aW)^2\} = a^2$$

per cui la (VI.1.14) assume la forma:

$$(VI.1.17) \quad p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$$

che costituisce la più generale espressione delle densità di probabilità di una variabile aleatoria gaussiana caratterizzata da un valor medio  $\mu_x$  e da una varianza  $\sigma_x^2$ . Si scrive:

$$(VI.1.18) \quad X \approx \mathcal{N}(m_x, \sigma_x^2)$$

si ottiene:

$$(VI.1.10) \quad \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) < Q(x) < \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi x}} \quad (x > 0)$$

Nella Fig.VI.2 sono riportati i limiti dati dalla (VI.1.10) unitamente all'andamento della funzione  $Q(x)$ .

Sia  $X$  una variabile aleatoria definita dalla

$$(VI.1.11) \quad X = aW + b$$

con  $a$  ( $a \neq 0$ ) e  $b$  costanti reali. Per determinare la densità di probabilità di  $X$ , basta osservare che la probabilità che  $X$  appartenga all'intervallo

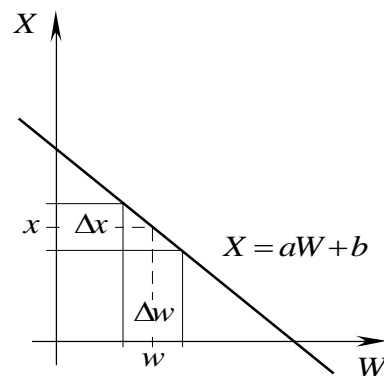


Fig.VI.3- Determinazione della d.d.p. della v.a. X.

## VI.2 – Vettori aleatori a valori reali, normali o gaussiani.

Sia  $\mathbf{W}$  un vettore aleatorio a valori reali ad  $n$  dimensioni:

$$(VI.2.1) \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix}$$

caratterizzato dalla densità di probabilità congiunta delle sue componenti:

$$(VI.2.2) \quad p_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i^2\right) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{w}\right)$$

È facile verificare che le componenti  $W_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sono variabili aleatorie gaussiane, statisticamente indipendenti, con valor medio nullo e varianza unitaria. Infatti dalla (VI.2.2) si ha:

$$(VI.2.3) \quad p_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} w_i^2}$$

La  $p_{\mathbf{W}}(\mathbf{w})$  è ottenuta dal prodotto delle  $n$  densità di probabilità marginali:

$$(VI.2.4) \quad p_{W_i}(w_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} w_i^2}$$

Risulta:

$$(VI.2.5) \quad m_{W_i} = E\{W_i\} = 0; \quad \sigma_{W_i}^2 = E\{W_i^2\} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Inoltre le componenti di  $\mathbf{W}$  sono, come è facile verificare, statisticamente indipendenti; cioè:

$$(VI.2.6) \quad E\{W_r W_s\} = \begin{cases} 1 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases}$$

Le (VI.2.5) e (VI.2.6) sono riassunte nelle:

$$(VI.2.7) \quad \mathbf{m}_{\mathbf{W}} = E\{\mathbf{W}\} = \mathbf{0} \quad ; \quad \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{W}} = E\{\mathbf{W}\mathbf{W}^T\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Un vettore aleatorio di questo tipo è pertanto caratterizzato da un vettore dei valori medi nullo e da una matrice di correlazione  $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{W}}$  unitaria. Un vettore siffatto si dice normale (o gaussiano) e si denota come segue:

$$(VI.2.8) \quad \mathbf{W} \approx \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

Sia ora

$$(VI.2.9) \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{a}$$

un vettore aleatorio a valori reali ottenuto da  $\mathbf{W}$  per trasformazione affine la cui matrice  $\mathbf{A}$ , di dimensioni  $n \times n$ , si suppone non singolare. Per dedurre la densità di probabilità congiunta  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  delle componenti del vettore  $\mathbf{X}$  in funzione dell'analoga densità  $p_{\mathbf{W}}(\mathbf{w})$  delle componenti del vettore  $\mathbf{W}$ , basta osservare che, detto  $\Delta \mathbf{x}$  un elemento infinitesimo dello spazio  $\mathbb{R}^n$ , si deve avere:

$$(VI.2.10) \quad p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})|\Delta \mathbf{x}| = p_{\mathbf{W}}(\mathbf{w})|\Delta \mathbf{w}|$$

dove  $\Delta \mathbf{w}$  denota l'elemento dello spazio  $\mathbb{R}^n$  che, per effetto della trasformazione (VI.2.9), porta a  $\Delta \mathbf{x}$ . È noto dalla Geometria che è

$$(VI.2.11) \quad |\Delta \mathbf{x}| = |\det(\mathbf{J})| |\Delta \mathbf{w}|$$

essendo  $\mathbf{J}$  la matrice jacobiana della trasformazione, il cui generico elemento è definito dalla  $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial w_j}$ . Si ha  $\mathbf{J} = \mathbf{A}$ . Pertanto, ricordando la (VI.2.9) è:

$$(VI.2.12) \quad p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{p_{\mathbf{W}}[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})]}{|\det(\mathbf{A})|} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n} |\det(\mathbf{A})|} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n} |\det(\mathbf{A})|} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{b})^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{b})\right]$$

Dalla (VI.2.9), tenendo conto delle (VI.2.7), si deducono le espressioni del vettore dei valori medi e della matrice di covarianza del vettore aleatorio  $\mathbf{X}$ .

$$(VI.2.13) \quad \mathbf{m}_{\mathbf{X}} = E\{\mathbf{X}\} = \mathbf{A}E\{\mathbf{W}\} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}} = E\{(\mathbf{X} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}})^T\} = E\{\mathbf{A}\mathbf{w}\mathbf{w}^T \mathbf{A}^T\} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$$

e di conseguenza la (VI.2.12) può essere riscritta nella forma:

$$(VI.2.14) \quad p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n} |\det(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}})|} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}})^T (\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}})^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}})\right]$$

essendo  $\det(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^T) = [\det(\mathbf{A})]^2$ .

Viceversa è facile mostrare che è sempre possibile definire almeno una trasformazione affine, del tipo della (VI.2.9), che conduca ad un vettore  $\mathbf{X} \approx \mathcal{N}(\mathbf{m}_{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}})$ , a partire dal vettore  $\mathbf{W} \approx \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . In altre parole ciò equivale a dire che, dati i parametri  $\mathbf{m}_{\mathbf{X}}$  e  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}$  che caratterizzano un vettore aleatorio  $\mathbf{X}$ , è sempre possibile determinare un vettore  $\mathbf{a}$  e una matrice  $\mathbf{A}$  che soddisfino le (VI.2.13). Per quanto riguarda il vettore  $\mathbf{a}$  è:

$$(VI.2.15) \quad \mathbf{a} = \mathbf{m}_{\mathbf{X}}$$

mentre una possibile soluzione per la matrice  $\mathbf{A}$  è (v. Appendice):

$$(VI.2.16) \quad \mathbf{A} = \mathbf{U} \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \mathbf{U}^T$$

dove  $\mathbf{U}$  denota la matrice composta dagli autovettori  $\mathbf{u}_i$  e  $\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  una matrice diagonale composta dagli autovalori della matrice  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}$ :

$$(VI.2.17) \quad \mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n] ; \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Un vettore aleatorio è definito normale (o gaussiano) quando la sua densità di probabilità congiunta è della forma espressa dalla (VI.2.14). La statistica di un vettore gaussiano è pertanto completamente determinata se si conosce il vettore dei valori medi  $\mathbf{m}_{\mathbf{X}}$  e la matrice di covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}}$ . Poiché è:

$$(VI.2.18) \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}} = E\{(\mathbf{X} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}})^T\} = E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^T - \mathbf{X}\mathbf{m}_{\mathbf{X}}^T - \mathbf{m}_{\mathbf{X}}\mathbf{X}^T + \mathbf{m}_{\mathbf{X}}\mathbf{m}_{\mathbf{X}}^T\} = E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^T\} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}}\mathbf{m}_{\mathbf{X}}^T$$

tale statistica è anche definita dal vettore dei valori medi  $\mathbf{m}_{\mathbf{X}}$  e dalla matrice di correlazione  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}} = E\{\mathbf{X}\mathbf{X}^T\}$ . Si scrive:

$$(VI.2.19) \quad \mathbf{X} \approx \mathcal{N}(\mathbf{m}_{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}})$$

È importante osservare che ogni trasformazione lineare di un vettore gaussiano produce un vettore anch'esso gaussiano. Sia:

$$(VI.2.20) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{TX} + \mathbf{h}$$

un generica trasformazione lineare in cui  $\mathbf{Y}$  denota un vettore ad  $m$  dimensioni,  $\mathbf{T}$  la matrice di trasformazione, supposta non singolare, di dimensioni  $(m \times n)$  ed  $\mathbf{h}$  un vettore di  $n$  dimensioni. Tenendo conto della (VI.2.9) si ha:

$$(VI.2.21) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{T}(\mathbf{AW} + \mathbf{b}) + \mathbf{h} = (\mathbf{TA})\mathbf{W} + (\mathbf{Tb} + \mathbf{h})$$

che definisce un vettore gaussiano ad  $n$  dimensioni.

### VI.3 – I segnali gaussiani.

Un segnale aleatorio  $s(t, \zeta)$ , a valore reale, si dice normale o gaussiano se l'insieme dei suoi campioni presi in corrispondenza a una generica  $n$ -pla d'istanti  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , costituisce un vettore aleatorio gaussiano. In altri termini se, detto  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ , con  $x_i = s(t_i, \zeta)$  risulta:

$$(VI.3.1) \quad p_{s_1, s_2, \dots, s_n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\det(\boldsymbol{\Sigma}_s)|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_s)^T \boldsymbol{\Sigma}_s^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_s)\right] \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$$

dove  $\mathbf{m}_s = [m_s(t_1), m_s(t_2), \dots, m_s(t_n)]^T$  è un vettore la cui  $i$ -esima componente è ottenuta calcolando il valore medio del segnale  $m_s(t) = E\{s(t, \zeta)\}$  nell'istante  $t_i$ , e il generico elemento della matrice  $\boldsymbol{\Sigma}_s$

$$(VI.3.2) \quad \sigma_s(t_i, t_j) = E\left\{\left[s(t_i, \zeta) - \overline{s(t_i, \zeta)}\right]\left[s(t_j, \zeta) - \overline{s(t_j, \zeta)}\right]\right\}$$

esprime la covarianza delle variabili aleatorie individuate dal segnale agli istanti  $t_i$  e  $t_j$ .

Ci si rende facilmente conto del fatto che un segnale gaussiano stazionario in senso lato è anche in senso stretto. Infatti, se il segnale è stazionario in senso lato, almeno fino al secondo ordine, gli elementi della sua matrice di covarianza dipendono soltanto dalle differenze tra gli istanti di tempo  $t_i$  e  $t_j$  e il valore medio del segnale è indipendente dal tempo, quindi tale è anche il vettore  $\mathbf{m}_s$  che compare nella sua densità di probabilità. La statistica del segnale è allora invariante rispetto a qualsiasi traslazione dell'origine dei tempi.

Poiché dalla (VI.3.2) discende:

$$(VI.3.3) \quad \sigma_s(t_i, t_j) = R_s(t_i, t_j) - E\{s(t_i, \zeta)\}E\{s(t_j, \zeta)\} = R_s(t_i, t_j) - m_s(t_i)m_s(t_j)$$

la funzione di covarianza può essere espressa in termini della funzione di autocorrelazione e del valore medio; la statistica di un segnale gaussiano, quindi, risulta perfettamente nota se si conosce il valore medio e la funzione di autocorrelazione.

### VI.4 - Trasformazioni lineari di segnali gaussiani.

Sia  $y(t, \zeta)$  un segnale aleatorio dipendente dal segnale  $x(t, \zeta)$  mediante una trasformazione lineare del tipo:

$$(VI.4.1) \quad y(t, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \tau)x(\tau, \zeta)d\tau$$

dove  $\varphi(t, \tau)$  denota una funzione peso dipendente dalle variabili  $t$  e  $\tau$ .

Dividendo il dominio d'integrazione nella (VI.4.1) in intervalli disgiunti di ampiezza  $\Delta$ , l'integrale può essere calcolato mediante la:

$$(VI.4.2) \quad y(t, \zeta) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \Delta \sum_{i=-N}^N \varphi(t, i\Delta) x(i\Delta, \zeta)$$

Valutando la precedente in  $t = j\Delta$ , con  $j \in \mathbb{Z}$ , si ottiene:

$$(VI.4.3) \quad y(j\Delta, \zeta) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \Delta \sum_{i=-N}^N \varphi(j\Delta, i\Delta) x(i\Delta, \zeta) \quad j \in \mathbb{Z}$$

L'argomento del limite nella (VI.4.3) può essere interpretato, per fissati  $N$  e  $\Delta$ , come la componente  $j$ -esima  $y_j = y(j\Delta, \zeta) = \sum_{i=-N}^N \varphi(j\Delta, i\Delta) x(i\Delta, \zeta)$  di un vettore aleatorio  $Y$  ottenuto dal prodotto tra una matrice  $T$  il cui generico elemento è  $\Delta \cdot \varphi(j\Delta, i\Delta)$  e un  $2N+1$  vettore aleatorio gaussiano la cui  $i$ -esima componente vale  $x(i\Delta, \zeta)$ .  $Y$  pertanto, indipendentemente dai valori di  $N$  e  $\Delta$ , è un vettore aleatorio gaussiano e tale resta passando al limite per  $N \rightarrow \infty$  e  $\Delta \rightarrow 0$ . Quindi  $y(t, \zeta)$  è un segnale gaussiano, la sua densità di probabilità, a qualunque ordine, dipende soltanto dal valor medio e dalla funzione di autocorrelazione.

Dalla (VI.4.1), prendendo il valore medio statistico di ambo i membri, si ha, con ovvio significato dei simboli:

$$(VI.4.4) \quad m_y(t) = E\{y(t, \zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \tau) E\{x(\tau, \zeta)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \tau) m_x(\tau) d\tau$$

La funzione di autocorrelazione vale:

$$(VI.4.5) \quad \begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= E\{y(t_1, \zeta)y(t_2, \zeta)\} = \\ &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_1, \tau_1)x(\tau_1, \zeta)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t_2, \tau_2)x(\tau_2, \zeta)d\tau_2\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(\tau_1, \zeta)x(\tau_2, \zeta)\} \varphi(t_1, \tau_1)\varphi(t_2, \tau_2)d\tau_1d\tau_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau_1, \tau_2)\varphi(t_1, \tau_1)\varphi(t_2, \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \end{aligned}$$

avendo denotato con  $R_x(t_1, t_2)$  la funzione di autocorrelazione di  $x(t, \zeta)$ .

Sia  $a(\zeta)$  una variabile aleatoria dedotta da un segnale  $x(t, \zeta)$  gaussiano mediante una trasformazione lineare della forma:

$$(VI.4.6) \quad a(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau)x(\tau, \zeta)d\tau$$

essendo  $\varphi(\tau)$  una funzione peso. Procedendo come prima e cioè dividendo il dominio d'integrazione nella (VI.4.6) in intervalli disgiunti di ampiezza  $\Delta$ , l'integrale può essere calcolato mediante la:

$$(VI.4.7) \quad a(\zeta) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta \rightarrow 0}} \Delta \sum_{i=-N}^N \varphi(i\Delta)x(i\Delta, \zeta)$$

Per fissati  $N$  e  $\Delta$  è immediato riconoscere che la quantità  $a(\zeta)$ , in quanto combinazione lineare di quantità congiuntamente gaussiane, è una variabile aleatoria gaussiana la cui densità di probabilità del primo ordine dipende dal valor medio e dalla funzione di autocorrelazione.

Dalla (VI.4.6), prendendo il valore medio statistico di ambo i membri, si ha:

$$(VI.4.8) \quad m_a = E\{a(\zeta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) E\{x(\tau, \zeta)\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) m_x(\tau) d\tau$$

e:

$$\begin{aligned} R_a^2 &= E\{a^2(\zeta)\} = \\ (VI.4.9) \quad &= E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau_1)x(\tau_1, \zeta)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau_2)x(\tau_2, \zeta)d\tau_2\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(\tau_1, \zeta)x(\tau_2, \zeta)\} \varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau_1, \tau_2)\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \end{aligned}$$

## APPENDICE

### Ortogonalizzazione della matrice di covarianza.

Sia  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  l'insieme degli autovalori (supposti distinti) della matrice di covarianza  $\Sigma$  di una vettore gaussiano  $X$ . Se  $u_i$  rappresenta l'autovettore (supposto normalizzato) corrispondente all'autovalore  $\lambda_i$  si ha:

$$(1) \quad \Sigma u_i = \lambda_i u_i$$

Sia  $U$  la matrice composta da tutti gli autovettori e cioè:

$$(2) \quad U = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

in cui  $u_{ij}$  rappresenta la componente  $j$ -esima del vettore  $u_i$ . Si ha:

$$(3) \quad \begin{aligned} \Sigma U &= [\Sigma u_1 \quad \Sigma u_2 \quad \dots \quad \Sigma u_n] = [\lambda_1 u_1 \quad \lambda_2 u_2 \quad \dots \quad \lambda_n u_n] \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 u_{11} \\ \lambda_1 u_{12} \\ \vdots \\ \lambda_1 u_{1n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \lambda_2 u_{21} \\ \lambda_2 u_{22} \\ \vdots \\ \lambda_2 u_{2n} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \lambda_n u_{n1} \\ \lambda_n u_{n2} \\ \vdots \\ \lambda_n u_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} u_{n1} \\ u_{n2} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \\ &= U \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \end{aligned}$$

dove  $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  denota la matrice diagonale

$$(4) \quad \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Dalla (3) si deduce, premoltiplicando per  $U^{-1}$ :

$$(5) \quad U^{-1} \Sigma U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

da cui:

$$(6) \quad \Sigma = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) U^{-1}$$