Laurea in Ingegneria Elettronica - A.A.2011/2012
Fondamenti di comunicazioni elettriche
Prova in itinere - 24 aprile 2012

1) Determinare la trasformata di Fourier del segnale

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t + 1 & t \in (0,1) \\ 3e^{1-t} & t > 1 \end{cases}$$

Si richiede inoltre di valutare una tra le seguenti: energia, densità spettrale di energia, durata efficace o banda efficace.

2) Determinare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di un segnale ad onda quadra con un duty cycle del 40% ed ampiezze pari a -2 e 2.

3) Determinare la minima frequenza teoricamente sufficiente a permettere la ricostruzione del segnale

$$g(t) = \mathrm{sinc}(t)\,\mathrm{sinc}(2t)\cos(2\pi t)$$

Svolgimento (uno dei possibili)

1) il segnale può essere espresso come

$$g(t) = (2t+1)\,\mathrm{rect}(t - 1/2) + 3e^{-(t-1)}\,\mathrm{u}(t-1)$$

Il primo addendo ha derivata data da

$$\delta(t) + 2\,\mathrm{rect}(t-1/2) - 3\delta(t-1)$$

Mentre il secondo addendo è il segnale $e^{-t}\,\mathrm{u}(t)$ ritardato di 1 e moltiplicato per 3.

La trasformata richiesta è quindi

$$G(f) = \frac{1 + 2\,\mathrm{sinc}(f)e^{-j\pi f} - 3e^{-j2\pi f}}{j2\pi f} + \frac{3e^{-j2\pi f}}{1 + j2\pi f}.$$

Per $f = 0$ si ha $G(0) = \int g(t)dt = 5$.

Fra quelli richiesti il calcolo più semplice[†] è quello dell'energia:

$$\mathcal{E} = \int_0^1 (2t+1)^2 dt + \int_1^\infty 9e^{-2(t-1)}dt = \left.\frac{(2t+1)^3}{6}\right|_0^1 + \left.\frac{9e^{-2(t-1)}}{-2}\right|_1^\infty = \frac{53}{6}$$

2) (questo esercizio può essere svolto in più modi che producono risultati analoghi ma non identici, sia perché si può scegliere quale sia il valore "attivo" sia perché si può traslare di una quantità arbitraria il segnale) scegliendo arbitrariamente periodo pari a 5, il segnale ad onda quadra varrà 2 per un tempo pari a 2 e -2 per il tempo restante. Può essere scritto come:

$$g_{T_0}(t) = 4\,\mathrm{rect}(t/2) - 2\,\mathrm{rect}(t/5)$$

Ottenendo quindi

$$G_n = \frac{8}{5}\mathrm{sinc}(2n/5) - 2\,\mathrm{sinc}(n) = \begin{cases} -\dfrac{2}{5} & n = 0 \\ \dfrac{8}{5}\mathrm{sinc}(2n/5) & n \neq 0 \end{cases}$$

3) il segnale può essere riscritto come

[†] In realtà il più semplice era il calcolo della banda efficace: osservando che $G(f) \to 0$ come $1/f$ (a causa della discontinuità non eliminabile in $t = 0$), risulta infinita!

$$g(t)=\mathrm{sinc}(t)\frac{\sin(2\pi t)\cos(2\pi t)}{2\pi t}=\mathrm{sinc}(t)\frac{\sin(4\pi t)}{4\pi t}=\mathrm{sinc}(t)\,\mathrm{sinc}(4t)$$

quindi

$$G(f)=\mathrm{rect}(f)*\frac{1}{4}\mathrm{rect}(f\,/\,4)$$

che risulta non nulla per $-5\,/\,2<f<5\,/\,2$, da cui si deduce che $f_{\max}=5\,/\,2$ e la frequenza di campionamento minima teoricamente sufficiente a ricostruire il segnale risulta $f_{s,\min}=5$.