Laurea in Ingegneria Elettronica - A.A.2011/2012
Fondamenti di comunicazioni elettriche
Prova finale - 15 giugno 2012

1) La variabile aleatoria X è distribuita uniformemente nell'intervallo $[-e, e]$. Trovare la densità di probabilità di $Y = \ln |X|$

2) Una sequenza di variabili aleatorie identicamente distribuite, indipendenti ed equiprobabili $b_k \in \{0,1\}$ viene utilizzata per costruire la sequenza $a_k = b_k - b_{k-2}$. Trovare media ed autocorrelazione della sequenza a_k e determinare se la sequenza è o meno stazionaria in senso lato

3) Un canale trasmissivo risulta modellabile come segue:

$$y_k = a_k + n_k$$

dove il termine n_k risulta avere densità di probabilità data da

$$f_n(\alpha) = e^{-\alpha}\,\mathrm{u}(\alpha)$$

Ammesso che i simboli trasmessi sul canale siano equiprobabili nell'insieme $\{0,1\}$, si richiede di determinare le regioni di decisione a massima verosimiglianza e la probabilità di errore

Svolgimento

1) La densità di probabilità di $Y = \ln |X|$ è data da

$$f_Y(\beta) = \frac{d}{d\beta}F_Y(\beta) = \frac{d}{d\beta}\Pr\{Y \le \beta\} = \frac{d}{d\beta}\Pr\{\ln |X| \le \beta\}$$

$$\Pr\{\ln |X| \le \beta\} = \Pr\{|X| \le e^\beta\} = \int_{-e^\beta}^{e^\beta} f_X(\alpha)d\alpha$$

$$f_Y(\beta) = \frac{d}{d\beta}\int_{-e^\beta}^{e^\beta} f_X(\alpha)d\alpha = \frac{d}{d\beta}\left[F_X(e^\beta) - F_X(-e^\beta)\right] =$$
$$= f_X(e^\beta)e^\beta + f_X(-e^\beta)e^\beta$$

Sostituendo l'espressione della $f_X(\alpha)$ si ottiene

$$f_Y(\beta) = \frac{e^\beta}{2e}\mathrm{rect}(\frac{e^\beta}{2e}) + \frac{e^\beta}{2e}\mathrm{rect}(\frac{-e^\beta}{2e}) = e^{\beta-1}\,\mathrm{rect}(\frac{1}{2}e^{\beta-1}),$$

infine, poiché

$$e^{\beta-1} < 1 \Leftrightarrow \beta < 1$$

$$\mathrm{rect}(\frac{1}{2}e^{\beta-1}) = \mathrm{u}(1-\beta)$$

si ottiene

$$f_Y(\beta) = e^{-(1-\beta)}\,\mathrm{u}(1-\beta).$$

2) La media è data da

$$\mathrm{E}\left[a_k\right] = \mathrm{E}\left[b_k - b_{k-2}\right] = \mathrm{E}\left[b_k\right] - \mathrm{E}\left[b_{k-2}\right] = 1/2 - 1/2 = 0$$

Dove si è usata la media della sequenza b_k: $0 \cdot \Pr\{b_k = 0\} + 1 \cdot \Pr\{b_k = 1\} = 1/2$

L'autocorrelazione risulta

$$R_a(k,m) = \mathrm{E}\left[a_k a_m^*\right] = \mathrm{E}\left[(b_k - b_{k-2})(b_m - b_{m-2})^*\right] =$$
$$= \mathrm{E}\left[b_k b_m^*\right] - \mathrm{E}\left[b_k b_{m-2}^*\right] - \mathrm{E}\left[b_{k-2} b_m^*\right] + \mathrm{E}\left[b_{k-2} b_{m-2}^*\right]$$

Che, tenendo conto del fatto che $\mathrm{E}\left[b_k b_m^*\right] = \frac{1}{2}\delta_{k-m}$, si può semplificare come segue

$$R_a(k-m) = \delta_{k-m} - \frac{1}{2}\delta_{k-m+2} - \frac{1}{2}\delta_{k-m-2}$$

Poiché la media non dipende dall'indice temporale *k* e l'autocorrelazione dipende solo dalla differenza tra gli indici temporali *m* e *k*, la sequenza risulta stazionaria almeno in senso lato.

3) Le regioni di decisione a massima verosimiglianza sono definite dalla condizione

$$\hat{a}_k = \arg\max_a f(y_k \mid a_k = a)$$

In questo caso risulta

$$\hat{a}_k = 0 \Leftrightarrow f(y_k \mid a_k = 0) > f(y_k \mid a_k = 1)$$

Dove appaiono

$$f(y_k \mid a_k = 0) = f_n(y_k) = e^{-y_k}\,\mathrm{u}(y_k)$$

$$f(y_k \mid a_k = 1) = f_n(y_k - 1) = e^{-(y_k - 1)}\,\mathrm{u}(y_k - 1)$$

Risulta allora

$$\hat{a}_k = 0 \Leftrightarrow e^{-y_k}\,\mathrm{u}(y_k) > e^{-(y_k-1)}\,\mathrm{u}(y_k - 1) \Leftrightarrow y_k \in (0,1)$$

$$\hat{a}_k = 1 \Leftrightarrow e^{-y_k}\,\mathrm{u}(y_k) < e^{-(y_k-1)}\,\mathrm{u}(y_k - 1) \Leftrightarrow y_k > 1$$

E la probabilità di errore

$$\begin{aligned}\Pr(\text{errore}) &= \Pr\{\hat{a}_k = 1, a_k = 0\} + \Pr\{\hat{a}_k = 0, a_k = 1\} = \\ &= \frac{1}{2}\Pr\{n_k > 1\} + \frac{1}{2}\Pr\{1 + n_k \in (0,1)\} = \\ &= \frac{1}{2}\int_1^\infty e^{-\alpha}\,\mathrm{u}(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2}\int_{-1}^0 e^{-\alpha}\,\mathrm{u}(\alpha)d\alpha = \frac{1}{2}e^{-1}\end{aligned}$$