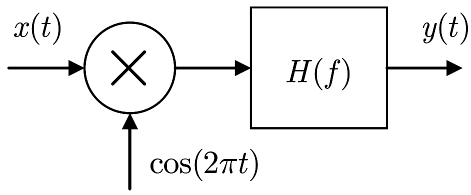
Laurea in Ingegneria Elettronica - A.A.2011/2012
Fondamenti di comunicazioni elettriche
Primo appello - 22 giugno 2012

Parte I – Analisi di Fourier

1) Determinare la trasformata di Fourier del segnale
$$g(t) = e^{-t}\,\mathrm{rect}(t - 1/2)$$
2) Determinare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier
$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(t-nT)^2}$$
3) Calcolare l'energia del segnale presente all'uscita del sistema



Sapendo che $x(t) = \mathrm{sinc}^2(t)$ e $H(f) = \mathrm{rect}(f)$

Svolgimento

1) Si può scrivere
$$g(t) = e^{-t}\,\mathrm{u}(t) - e^{-t}\,\mathrm{u}(t-1) = e^{-t}\,\mathrm{u}(t) - e^{-1}e^{-(t-1)}\,\mathrm{u}(t-1)$$
E risulta
$$G(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} - e^{-1}\frac{e^{-j2\pi f}}{1+j2\pi f} = \frac{1-e^{-(1+j2\pi f)}}{1+j2\pi f}$$
2) Il segnale può essere scritto come
$$g(t) = e^{-\pi t^2} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$
E si ottiene
$$G(f) = e^{-\pi f^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\delta(f - \frac{n}{T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{-\pi \frac{n^2}{T^2}} \delta(f - \frac{n}{T})$$
Quindi i coefficienti dello sviluppo in serie richiesti sono
$$G_n = \frac{1}{T} e^{-\pi \frac{n^2}{T^2}}$$
3) Ricordando che $F[\mathrm{sinc}^2(t)] = (1-|\,f\,|)\,\mathrm{rect}(f/2)$ e che
$F[\cos(2\pi t)] = \frac{1}{2}\delta(f+1) + \frac{1}{2}\delta(f-1)$, si ottiene (conviene procedere in modo grafico)
$$Y(f) = H(f)(\frac{1}{2}X(f+1) + \frac{1}{2}X(f-1)) =$$
$$= -\frac{f}{2}\mathrm{rect}(\frac{f+1/4}{1/2}) + \frac{f}{2}\mathrm{rect}(\frac{f-1/4}{1/2}) = \frac{1}{2}\,|\,f\,|\,\mathrm{rect}(f)$$

Per il calcolo dell'energia, utilizzando la relazione di Parseval (teorema di Rayleigh), si ottiene

$$\mathrm{E}_y = \int_{-\infty}^{\infty} |\, Y(f)\,|^2 \, df = \frac{1}{4}\int_{-1/2}^{1/2} f^2 df = \frac{1}{48}$$

Parte II – Probabilità e segnali aleatori

1) La variabile aleatoria *X* ha densità di probabilità data da $f_X(\alpha) = e^{-\alpha}\,\mathrm{u}(\alpha)$. Trovare valore medio e varianza di $Y = e^{-X}$

2) Determinare le regioni di decisione a massima verosimiglianza per un sistema di trasmissione numerica in banda base su canale AWGN che impiega la costellazione $\{-2,-1,+1,+2\}$

3) Il segnale $x(t) = \mathrm{u}(t - t_0)$ dipende dalla variabile aleatoria t_0 avente distribuzione esponenziale $f_{t_0}(\alpha) = e^{-\alpha}\,\mathrm{u}(\alpha)$. Supponendo che all'istante $t_1 > 0$ risulti $x(t_1) = 0$, trovare la densità di probabilità condizionata $f_{t_0|x(t_1)=0}(\beta)$. (*Suggerimento*: esprimere, per quanto possibile, le probabilità in funzione della $F_{t_0}(\alpha)$, distribuzione cumulativa di probabilità della variabile t_0)

Svolgimento

1) Il valor medio risulta

$$\overline{Y} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha}\, d\alpha = \frac{1}{2}$$

Il valore quadratico medio e la varianza risultano

$$\overline{Y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha} f_X(\alpha)\, d\alpha = \int_{0}^{\infty} e^{-3\alpha}\, d\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_Y^2 = \overline{Y^2} - \overline{Y}^2 = \frac{1}{12}$$

2) Visto che il canale è AWGN e la regola di decisione è quella a massima verosimiglianza, le regioni di decisione si possono trovare graficamente con la regola della minima distanza. La regione di decisione del punto -2 risulta l'intervallo $(-\infty, -3/2)$, quella del punto -1 l'intervallo $(-3/2, 0)$, quella del punto $+1$ l'intervallo $(0, 3/2)$ e infine quella del punto $+3$ l'intervallo $(3/2, \infty)$.

3) La distribuzione cumulativa della probabilità richiesta è data da

$$F_{t_0|x(t_1)=0}(\beta) = \Pr\{t_0 \le \beta \mid x(t_1) = 0\} = \frac{\Pr\{t_0 \le \beta\} \cap \{x(t_1) = 0\}}{\Pr\{x(t_1) = 0\}}$$

L'evento condizionante $\{x(t_1) = 0\}$ si può esprimere come $\{\mathrm{u}(t_1 - t_0) = 0\}$ ovvero $\{t_0 > t_1\}$, quindi

$$F_{t_0|x(t_1)=0}(\beta) = \frac{\Pr\{t_0 \le \beta\} \cap \{t_0 > t_1\}}{\Pr\{t_0 > t_1\}} = \begin{cases} 0 & \beta < t_1 \\ \dfrac{\Pr\{t_0 \in (t_1, \beta]\}}{\Pr\{t_0 > t_1\}} & \beta > t_1 \end{cases}$$

Notando che

$$\frac{\Pr\{t_0 \in (t_1, \beta]\}}{\Pr\{t_0 > t_1\}} = \frac{F_{t_0}(\beta) - F_{t_0}(t_1)}{1 - F_{t_0}(t_1)}$$

Si ottiene infine

$$f_{t_0|x(t_1)=0}(\beta) = \begin{cases} 0 & \beta < t_1 \\ \dfrac{1}{1 - F_{t_0}(t_1)} f_{t_0}(\beta) & \beta > t_1 \end{cases}$$

che sostituendo l'espressione della $F_{t_0}(t_1) = (1 - e^{-t_1})\,\mathrm{u}(t_1)$ risulta

$$f_{t_0|x(t_1)=0}(\beta) = e^{-(\beta - t_1)}\,\mathrm{u}(\beta - t_1)$$