Laurea in Ingegneria Elettronica - A.A.2011/2012
Fondamenti di comunicazioni elettriche
Secondo appello - 2 luglio 2012

Parte I – Analisi di Fourier

1) Determinare la trasformata di Fourier del segnale

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin^4(\pi t) & t \in (0,1) \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

2) Calcolare il prodotto di convoluzione tra i segnali

$$h(t) = \delta(t-1) - e^{-(t-1)}\,\mathrm{u}(t-1)$$

$$x(t) = t\,\mathrm{u}(t)$$

3) Il segnale

$$x(t) = \mathrm{sinc}^2(10^4 t)$$

viene immesso in un sistema di trasmissione a tempo discreto operante alla frequenza di campionamento di 8kHz.
Ammettendo che all'ingresso del sistema sia presente un filtro anti-aliasing ideale e che le operazioni di campionamento e ricostruzione siano effettuate anch'esse in modo ideale, trovare l'espressione del segnale ricostruito al ricevitore. Determinare infine quale risulterebbe il segnale ricostruito in assenza di filtro anti-aliasing.

Svolgimento

1) Poiché $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$ e $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$, si può scrivere

$$\sin^4(x) = (\sin^2(x))^2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x))^2 =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos^2(2x) - \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

Il segnale può essere allora scritto come segue

$$g(t) = \sin^4(\pi t)\,\mathrm{rect}(t - \frac{1}{2}) = \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \frac{1}{8}\cos(4\pi t)\right]\mathrm{rect}(t - \frac{1}{2})$$

Da cui segue, usando la proprietà di modulazione

$$G(f) = \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\delta(f+1) - \frac{1}{4}\delta(f-1) + \frac{1}{16}\delta(f+2) + \frac{1}{16}\delta(f-2)\right] * \mathrm{sinc}(f)e^{-j\pi f} =$$
$$= \frac{1}{8}e^{-j\pi f}\left[3\,\mathrm{sinc}(f) + 2\,\mathrm{sinc}(f+1) + 2\,\mathrm{sinc}(f-1) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(f+2) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(f-2)\right]$$

2) Per definizione si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = [\delta(t-1) - e^{-(t-1)}\,\mathrm{u}(t-1)] * x(t) = \\ &= x(t-1) - e^{-(t-1)}\,\mathrm{u}(t-1) * x(t) \end{aligned}$$

In questa appare la traslazione di

$$\begin{aligned} e^{-t}\,\mathrm{u}(t) * x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}\,\mathrm{u}(\tau)(t-\tau)\,\mathrm{u}(t-\tau)d\tau = \\ &= \begin{cases} 0 & t<0 \\ \displaystyle\int_0^t e^{-\tau}(t-\tau)d\tau = t-(1-e^{-t}) & t>0 \end{cases} \\ &= [t-(1-e^{-t})]\,\mathrm{u}(t) \end{aligned}$$

E risulta infine

$$y(t) = (1-e^{-(t-1)})\,\mathrm{u}(t-1)$$

3) Il segnale ha spettro dato da

$$X(f) = \frac{1}{10^4}(1-\frac{|\,f\,|}{10^4})\,\mathrm{rect}(\frac{f}{2\cdot 10^4})$$

quindi la frequenza minima teoricamente sufficiente a rappresentarlo completamente risulta $f_{s,\min} = 20\mathrm{kHz}$. Poiché il sistema opera alla frequenza di campionamento di 8kHz, questo segnale non può essere rappresentato (e ricostruito) accuratamente.

In presenza di un filtro anti-aliasing ideale il segnale viene sottoposto a filtraggio passa basso con frequenza di taglio tale da renderlo compatibile con la frequenza di campionamento del sistema, cioè 4kHz.

In questo caso, quindi, il segnale ricostruito all'uscita del sistema ha spettro dato da

$$\begin{aligned} X_{AA}(f) &= \frac{1}{10^4}(1-\frac{|\,f\,|}{10^4})\,\mathrm{rect}(\frac{f}{8\cdot 10^3}) = \\ &= \frac{1}{10^4}\frac{3}{5}\,\mathrm{rect}(\frac{f}{8\cdot 10^3}) + \frac{1}{10^4}\frac{2}{5}(1-\frac{|\,f\,|}{4\cdot 10^3})\,\mathrm{rect}(\frac{f}{8\cdot 10^3}) \end{aligned}$$

L'espressione nel dominio del tempo risulta quindi

$$x_{AA}(t) = \frac{12}{25}\mathrm{sinc}(8000t) + \frac{4}{25}\mathrm{sinc}^2(4000t)$$

Nel caso poi che all'ingresso del sistema non sia presente un filtro anti-aliasing, il segnale ricostruito all'uscita del sistema è il filtraggio passa-basso della ripetizione periodica dello spettro del segnale originario.

Procedendo graficamente, risulta

$$X_{NoAA}(f) = \frac{1}{10^4}\frac{6}{5}\,\mathrm{rect}(\frac{f}{8\cdot 10^3}) + \frac{1}{10^4}\frac{1}{5}(1-\frac{|\,f\,|}{2\cdot 10^3})\,\mathrm{rect}(\frac{f}{4\cdot 10^3})$$

Ed infine

$$x_{NoAA}(t) = \frac{24}{25}\mathrm{sinc}(8000t) + \frac{1}{25}\mathrm{sinc}^2(2000t)$$

Parte II – Probabilità e segnali aleatori

1) Trovare la densità di probabilità della variabile aleatoria $Y = \sqrt{1 - X^2}$, dove la variabile aleatoria X ha densità di probabilità uniforme in $[0,1]$.
2) In una rete locale wireless sono presenti tre stazioni *A*, *B*, *C*. In un dato istante ciascuna stazione tenta di trasmettere con probabilità pari rispettivamente a $\Pr\{\mathrm{Tx}_A\} = 1/2$, $\Pr\{\mathrm{Tx}_B\} = 1/4$, $\Pr\{\mathrm{Tx}_C\} = 1/8$. Con probabilità complementare le stazioni non tentano di trasmettere, ma sono invece in modalità di ricezione.
Il destinatario, che è sempre una delle tre stazioni, riceve correttamente il segnale trasmesso da un'altra stazione solo se questa è l'unica a trasmettere, e in caso contrario si verifica una *collisione*. Determinare la probabilità che si verifichi una collisione, ammesso che almeno una stazione tenti di trasmettere in un dato istante.
Determinare infine la probabilità che una trasmissione completata con successo provenga rispettivamente da ciascuna delle tre stazioni.
3) Si consideri un processo di rumore gaussiano $n(t)$ avente media nulla e autocorrelazione data da $R_n(t_1, t_2) = e^{-|t_1 - t_2|}$. Un segnale aleatorio $w(t)$ è ottenuto a partire da $n(t)$ nel modo seguente

$$w(t) = \int_0^t n(\varphi) d\varphi$$

Trovare media e varianza del segnale $w(t)$.

Svolgimento

1) Per definizione

$$f_Y(\beta) = \frac{d}{d\beta} F_Y(\beta) = \frac{d}{d\beta} \Pr\{Y \le \beta\} = \frac{d}{d\beta} \Pr\{\sqrt{1 - X^2} \le \beta\}$$

La diseguaglianza (la discussione conviene farla graficamente) ha senso per $-1 \le X \le 1$ ed è soddisfatta per $X \le -\sqrt{1-\beta^2} \vee X \ge \sqrt{1-\beta^2}$ se $\beta^2 < 1$, mentre è sempre soddisfatta per $\beta^2 > 1$, quindi risulta

$$\Pr\{\sqrt{1 - X^2} \le \beta\} = \begin{cases} \Pr \varnothing = 0 & \beta < 0 \\ \displaystyle\int_{-1}^{-\sqrt{1-\beta^2}} f_X(\alpha) d\alpha + \int_{\sqrt{1-\beta^2}}^{1} f_X(\alpha) d\alpha & 0 < \beta < 1 \\ 1 & \beta > 1 \end{cases}$$

Risulta infine

$$f_Y(\beta) = \begin{cases} 0 & \beta < 0 \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 < \beta < 1 \\ 0 & \beta > 1 \end{cases}$$

2) Visti i dati del problema, è possibile compilare la seguente tabella

A	*B*	*C*	Pr	commento
Rx	Rx	Rx	$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{7}{8} = \frac{21}{64}$	silenzio
Rx	Rx	Tx	$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{8} = \frac{3}{64}$	*C* trasmette con successo
Rx	Tx	Rx	$\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{7}{8} = \frac{7}{64}$	*B* trasmette con successo
Rx	Tx	Tx	$\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8} = \frac{1}{64}$	collisione tra *B* e *C*
Tx	Rx	Rx	$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{7}{8} = \frac{21}{64}$	*A* trasmette con successo
Tx	Rx	Tx	$\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{8} = \frac{3}{64}$	collisione tra *A* e *C*
Tx	Tx	Rx	$\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{7}{8} = \frac{7}{64}$	collisione tra *A* e *B*
Tx	Tx	Tx	$\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8} = \frac{1}{64}$	collisione tra *A*, *B* e *C*

La probabilità che almeno una delle stazioni tenti di trasmettere è $43/64$, e che si verifichi una collisione ammesso che almeno una delle stazioni tenti di trasmettere risulta $12/43$.
La probabilità che una trasmissione abbia successo è $31/64$, quindi le probabilità condizionate risultano rispettivamente $21/31$, $7/31$ e $3/31$.

3) Vista la linearità della media, si ha

$$\overline{w(t)} = \int_0^t \overline{n(\varphi)}\, d\varphi = 0$$

Per quanto riguarda la varianza, risulta

$$\begin{aligned}
\overline{w(t)^2} &= \int_0^t \int_0^t \overline{n(\varphi_1)n(\varphi_2)}\, d\varphi_2 d\varphi_1 = \int_0^t \int_0^t e^{-|\varphi_1-\varphi_2|}\, d\varphi_2 d\varphi_1 = \\
&= \int_0^t \int_0^{\varphi_1} e^{-|\varphi_1-\varphi_2|}\, d\varphi_2 d\varphi_1 + \int_0^t \int_{\varphi_1}^t e^{-|\varphi_1-\varphi_2|}\, d\varphi_2 d\varphi_1 = \\
&= \int_0^t 1 - e^{-\varphi_1} d\varphi_1 + \int_0^t 1 - e^{\varphi_1 - t} d\varphi_1 = 2t - 2(1-e^{-t})
\end{aligned}$$