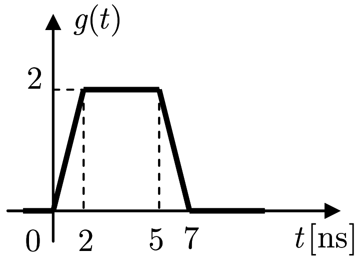
Laurea in Ingegneria Elettronica - A.A.2011/2012
Fondamenti di comunicazioni elettriche
Terzo appello - 11 luglio 2012

Parte I – Analisi di Fourier

1) Trovare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del segnale ottenuto ripetendo con frequenza 100MHz l'impulso in figura



2) Valutare la densità spettrale di energia del segnale

$$g(t) = te^{-t}\,\mathrm{u}(t)$$

3) Ammettendo di valutare l'errore di ricostruzione di un segnale ad energia finita campionato idealmente con la formula

$$e(f_S) = 10\log_{10}\frac{\int_{|f|>f_S/2} |G(f)|^2\,df}{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\,df}\ [\mathrm{dB}]$$

Si determini la frequenza di campionamento alla quale l'errore di ricostruzione del segnale

$$g(t) = \mathrm{sinc}^2(t)$$

Risulta pari a -30dB.

Svolgimento

1) Una possibile espressione per il segnale $g(t)$ è

$$g(t) = \begin{cases} 10^9 t & 0 < t < 2\cdot 10^{-9} \\ 2 & 2\cdot 10^{-9} < t < 5\cdot 10^{-9} \\ 7 - 10^9 t & 5\cdot 10^{-9} < t < 7\cdot 10^{-9} \\ 0 & t < 0 \vee t > 7\cdot 10^{-9} \end{cases}$$

Con frequenza di ripetizione $f_0 = 100\mathrm{MHz}$, il periodo risulta $T_0 = 10\mathrm{ns}$.

I coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier sono dati da

$$G_n = \frac{1}{T_0} G(n / T_0)$$

E la trasformata di Fourier di $g(t)$ si trova facilmente usando il teorema di derivazione:

$$g'(t) = \begin{cases} 10^9 & 0 < t < 2\cdot 10^{-9} \\ 0 & 2\cdot 10^{-9} < t < 5\cdot 10^{-9} \\ -10^9 & 5\cdot 10^{-9} < t < 7\cdot 10^{-9} \\ 0 & t < 0 \vee t > 7\cdot 10^{-9} \end{cases} =$$

$$= 10^9 \operatorname{rect}(\frac{t-10^{-9}}{2\cdot 10^{-9}}) - 10^9 \operatorname{rect}(\frac{t-6\cdot 10^{-9}}{2\cdot 10^{-9}})$$

$$G(f) = \begin{cases} 2\operatorname{sinc}(2\cdot 10^{-9} f)\dfrac{e^{-j2\pi f 10^{-9}} - e^{-j2\pi f 6\cdot 10^{-9}}}{j2\pi f} & f \neq 0 \\ 10^{-8} & f = 0 \end{cases} =$$

$$= 10^{-8}\operatorname{sinc}(2\cdot 10^{-9} f)\operatorname{sinc}(5\cdot 10^{-9} f) e^{-j2\pi\frac{7}{2}\cdot 10^{-9} f}$$

E risulta infine

$$G_n = \operatorname{sinc}(\frac{n}{5})\operatorname{sinc}(\frac{n}{2}) e^{-j2\pi\frac{7/2}{10}n}$$

2) La trasformata di Fourier di $g(t) = te^{-t}\,\mathrm{u}(t)$ è data da

$$G(f) = \frac{1}{-j2\pi}\frac{d}{df}\frac{1}{1+j2\pi f} = \frac{1}{(1+j2\pi f)^2}$$

Quindi la densità spettrale di energia risulta

$$|G(f)|^2 = \left|\frac{1}{(1+j2\pi f)^2}\right|^2 = \left|\frac{1}{1-4\pi^2 f^2 + j4\pi f}\right|^2 = \frac{1}{(1-4\pi^2 f^2)^2 + (4\pi f)^2}$$

3) Per utilizzare la formula data occorre trovare la densità spettrale di energia di $g(t)$:

$$G(f) = (1-|f|)\operatorname{rect}(f/2)$$

$$|G(f)|^2 = (1-|f|)^2\operatorname{rect}(f/2) = \begin{cases} 0 & |f| > 1 \\ (1-f)^2 & f \in [0,1] \\ (1+f)^2 & f \in [-1,0] \end{cases}$$

Risulta quindi

$$\int_{|f|>f_s/2} |G(f)|^2\, df \underset{\frac{f_s}{2}\in[0,1]}{=} 2\int_{f_s/2}^{1} (1-f)^2 df = 2\left.\frac{(1-f)^3}{-3}\right|_{f_s/2}^{1} = \frac{2}{3}(1-f_s/2)^3$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\, df = \frac{2}{3}$$

Ed infine, per trovare la frequenza richiesta, occorre risolvere

$$e = 10\log_{10}\frac{\frac{2}{3}(1-f_s/2)^3}{\frac{2}{3}} = -30 \Rightarrow f_s = \frac{18}{10}$$

Parte II – Probabilità e segnali aleatori

1) Due variabili aleatorie indipendenti X_1 ed X_2 hanno densità di probabilità esponenziale rispettivamente con media $1/\lambda_1$ e $1/\lambda_2$. Trovare la probabilità che il minimo tra queste due variabili sia X_1.

2) Due variabili aleatorie X ed Y sono uniformemente distribuite nella ragione $[0,2]\times[0,2]$. Trovare la densità di probabilità della variabile aleatoria X condizionata al verificarsi dell'evento $|X-Y|<1$.

3) Un sistema di trasmissione numerica sul canale AWGN utilizza come costellazione l'insieme di punti $C=\{2+i,2i,-2+i,-2-i,-2i,2-i\}$. Trovare le regioni di decisione a massima verosimiglianza.
Si consideri poi il caso che i simboli trasmessi non siano equiprobabili, ma invece sia $\Pr\{a_k=\pm 2\pm i\}=p$ e $\Pr\{a_k=\pm 2i\}=q$. Ammesso di utilizzare la regola di decisione MAP, trovare il rapporto p/q affinché l'origine del piano appartenga al bordo di tutte le regioni di decisione.

Svolgimento

1) La probabilità richiesta può essere scritta come

$$\Pr\{\min(X_1,X_2)=X_1\}=\Pr\{X_1<X_2\}$$

Sul piano X_1, X_2 questo evento corrisponde alla regione di piano che giace al di sopra della bisettrice di primo e terzo quadrante, quindi

$$\Pr\{X_1<X_2\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\alpha_1}^{\infty} f_{X_1X_2}(\alpha_1,\alpha_2)d\alpha_2 d\alpha_1=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\alpha_1}^{\infty} f_{X_1}(\alpha_1)f_{X_2}(\alpha_2)d\alpha_2 d\alpha_1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\alpha_1}^{\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1\alpha_1}\,\mathrm{u}(\alpha_1)\lambda_2 e^{-\lambda_2\alpha_2}\,\mathrm{u}(\alpha_2)d\alpha_2 d\alpha_1=$$

$$=\lambda_1\lambda_2\int_0^{\infty} e^{-\lambda_1\alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\infty} e^{-\lambda_2\alpha_2}d\alpha_2 d\alpha_1=\lambda_1\lambda_2\int_0^{\infty} e^{-\lambda_1\alpha_1}\frac{1}{\lambda_2}e^{-\lambda_2\alpha_1}d\alpha_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

2) La densità di probabilità congiunta delle due variabili aleatorie è data da

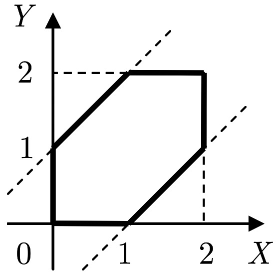
$$f_{XY}(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}\mathrm{rect}(\alpha/2)\mathrm{rect}(\beta/2)$$

L'evento condizionante è rappresentabile come la regione del piano (X,Y) delimitata dalle rette $Y=X+1$ e $Y=X-1$, quindi la densità di probabilità richiesta è data da

$$f_{X|E}(\gamma)=\frac{d}{d\alpha}\Pr\{X\le\gamma\mid E\}=\frac{d}{d\gamma}\frac{\Pr\{X\le\gamma\cap E\}}{\Pr\{E\}}=$$

$$=\frac{d}{d\gamma}\frac{\int_{-\infty}^{\gamma}\int_{\alpha-1}^{\alpha+1} f_{XY}(\alpha,\beta)d\beta d\alpha}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\alpha-1}^{\alpha+1} f_{XY}(\alpha,\beta)d\beta d\alpha}$$

Per calcolare questi integrali, tenuto conto del fatto che la densità di probabilità è costante dove non è nulla, conviene procedere in modo grafico. La regione in cui la densità di probabilità è non nulla e contemporaneamente è verificato l'evento è quella delimitata in figura



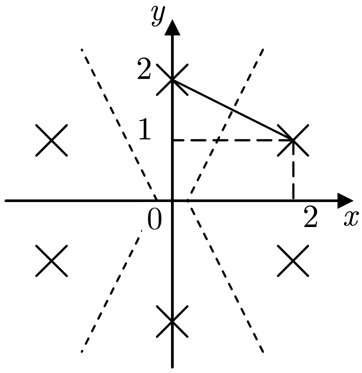
Si ottiene quindi

$$\int_{-\infty}^{\gamma}\int_{\alpha-1}^{\alpha+1} f_{XY}(\alpha,\beta)d\beta d\alpha = \begin{cases} 0 & \gamma < 0 \\ \int_0^{\gamma}\int_0^{\alpha+1} \frac{1}{4} d\beta d\alpha = \frac{\gamma^2+2\gamma}{8} & \gamma \in [0,1] \\ \frac{3}{8} + \int_1^{\gamma}\int_{\alpha-1}^{2} \frac{1}{4} d\beta d\alpha = \frac{6\gamma-2-\gamma^2}{8} & \gamma \in [1,2] \\ \frac{3}{4} & \gamma > 2 \end{cases}$$

Ed infine

$$f_{X|E}(\gamma) = \begin{cases} 0 & \gamma < 0 \vee \gamma > 2 \\ \frac{\gamma+1}{3} & \gamma \in [0,1] \\ \frac{3-\gamma}{3} & \gamma \in [1,2] \end{cases}$$

3) Per trovare le regioni di decisione a massima verosimiglianza conviene, come al solito, procedere in modo grafico (denotando con x la parte reale ed y la parte immaginaria)



Le rette che delimitano le regioni di decisione sono $y = 0$, $y = \pm 2x \pm 1/2$ (il punto in cui si incontrano per $y = 0$ è $x = \pm 1/4$).

Nel caso poi che i simboli trasmessi non siano equiprobabili, osserviamo che, per simmetria, l'origine apparterrà sempre alla regione di decisione binaria tra i punti $-2i$ e $2i$. Affinché l'origine appartenga al bordo di tutte le regioni di decisione, occorre che l'origine appartenga anche al bordo della regione di decisione tra i punti $2+i$ e $2i$.

Ricaviamo allora la regola di decisione MAP nel caso di due simboli c_A e c_B aventi probabilità di emissione rispettivamente p_A e p_B:

$$\hat{c} = c_A \Leftrightarrow p_A f_n(r - c_A) > p_B f_n(r - c_B)$$

Ovvero

$$\ln p_A - \frac{\left\| r - c_A \right\|^2}{2\sigma^2} > \ln p_B - \frac{\left\| r - c_B \right\|^2}{2\sigma^2}$$

$$2\sigma^2 \ln p_A - (r - c_A)(r - c_A)^* > 2\sigma^2 \ln p_B - (r - c_B)(r - c_B)^*$$

Dopo alcuni passaggi (nei quali conviene porre $r' = r - \frac{c_A + c_B}{2}$) risulta:

$$\mathrm{Re}\{r - \frac{c_A + c_B}{2}\}\,\mathrm{Re}\{c_B - c_A\} + \mathrm{Im}\{r - \frac{c_A + c_B}{2}\}\,\mathrm{Im}\{c_B - c_A\} < \sigma^2 \ln \frac{p_A}{p_B}$$

Che si può interpretare come "decidi per *A* rispetto a *B* se la proiezione del vettore $r' = r - \frac{c_A + c_B}{2}$ lungo la direzione del segmento tratto da *A* verso *B* è minore di $\sigma^2 \ln \frac{p_A}{p_B}$". Si verifica subito che questa produce la regola di decisione a massima verosimiglianza quando $p_A = p_B$.

A questo punto per rispondere al quesito, dobbiamo imporre che, con $c_A = 2 + i$, $p_A = p$, $c_B = 2i$ e $p_B = q$, l'origine si trovi sul bordo della regione di decisione:

$$\mathrm{Re}\{-\frac{c_A + c_B}{2}\}\,\mathrm{Re}\{c_B - c_A\} + \mathrm{Im}\{-\frac{c_A + c_B}{2}\}\,\mathrm{Im}\{c_B - c_A\} = \sigma^2 \ln \frac{p_A}{p_B}$$

Si trova

$$p \,/\, q = \exp \frac{1}{2\sigma^2}.$$

Ed i valori di p e q si possono ricavare dalla condizione di normalizzazione

$$4p + 2q = 1.$$