Laurea in Ingegneria Elettronica - A.A.2011/2012
Fondamenti di comunicazioni elettriche
Prova scritta del 4 settembre 2012

Parte I – Analisi di Fourier

1) Determinare la densità spettrale di energia del segnale

$$g(t) = te^{-t^2}.$$

2) Si consideri il segnale

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(t-2n).$$

Determinarne il periodo T_0, la potenza, e i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier G_n. Si consideri quindi il segnale

$$\tilde{g}(t) = \sum_{n=-N}^{N} G_n e^{j2\pi n\frac{t}{T_0}}$$

e si determini il numero N di armoniche necessario affinché $\tilde{g}(t)$ raggiunga il 50% della potenza di $g(t)$.

3) Un sistema di elaborazione di segnali opera secondo la relazione

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} x(\tau)x(\tau - 1/2)d\tau$$

Determinare se si tratta di un sistema lineare e tempo-invariante, e determinare l'uscita dal sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$x(t) = \mathrm{rect}(t - 1/2)$$

Svolgimento

1) Utilizzando la proprietà di derivazione in frequenza si ha

$$G(f) = \frac{1}{-j2\pi}\frac{d}{df}\mathrm{F}[e^{-t^2}]$$

Per determinare la trasformata di e^{-t^2} utilizziamo la proprietà del cambio di scala e la trasformata notevole dell'impulso gaussiano

$$\mathrm{F}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi}e^{-\pi^2 f^2}$$

ottenendo quindi la trasformata del segnale

$$G(f) = -j\pi^{3/2} f e^{-\pi^2 f^2}$$

e la densità spettrale di energia richiesta

$$\left|G(f)\right|^2 = \pi^3 f^2 e^{-2\pi^2 f^2}.$$

2) Si tratta di un segnale periodico per costruzione, avente periodo $T_0 = 2$. I coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier risultano quindi

$$G_n = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(n/2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & n = 0 \\ 0 & n = 2k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \\ \dfrac{(-1)^k}{\pi(2k+1)} & n = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La potenza del segnale si ottiene come l'energia in un periodo divisa per il periodo, e risulta pari ad $1/2$.

La potenza del segnale $\tilde{g}(t)$ è pari alla somma dei moduli quadri dei coefficienti coinvolti nella sommatoria, ovvero è data da

$$\begin{aligned} P_{\tilde{g}} &= \sum_{n=-N}^{N} |G_n|^2 = |G_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{N} |G_n|^2 = \\ &= \left|\frac{1}{2}\right|^2 + 2\sum_{k=0}^{N} \left|\frac{1}{\pi(2k+1)}\right|^2 \end{aligned}$$

Osservando che $|G_0|^2 = 1/4$, si deduce che il numero di armoniche necessarie per rappresentare il 50% della potenza del segnale è $N = 0$, corrispondente alla sola componente in continua.

3) La proprietà di linearità del sistema può essere scritta

$$S\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t); t\} = \alpha_1 S\{x_1(t); t\} + \alpha_2 S\{x_2(t); t\},$$

ovvero in questo caso

$$\begin{aligned} &\int_{t-1}^{t} (\alpha_1 x_1(\tau) + \alpha_2 x_2(\tau))(\alpha_1 x_1(\tau - 1/2) + \alpha_2 x_2(\tau - 1/2))d\tau = \\ &\qquad = \alpha_1 \int_{t-1}^{t} x_1(\tau) x_1(\tau - 1/2)d\tau + \alpha_2 \int_{t-1}^{t} x_2(\tau) x_2(\tau - 1/2)d\tau \end{aligned}$$

che è evidentemente falsa (ad esempio, nel secondo termine non appare α_1^2), quindi il sistema non è lineare.

La proprietà di tempo invarianza può essere scritta

$$S\{x(t - t_0); t\} = S\{x(t); t - t_0\}$$

ovvero in questo caso

$$\int_{t-1}^{t} x(\tau - t_0) x(\tau - t_0 - 1/2)d\tau = \int_{t-t_0-1}^{t-t_0} x(\tau) x(\tau - 1/2)d\tau$$

che, si verifica con la sostituzione $\tau - t_0 = \zeta$, è vera, quindi il sistema è tempo-invariante.

L'uscita del sistema in corrispondenza all'ingresso $x(t) = \mathrm{rect}(t - 1/2)$ è data da

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-1}^{t} \mathrm{rect}(\tau - 1/2)\,\mathrm{rect}(\tau - 1) d\tau = \\ &= \int_{t-1}^{t} \mathrm{u}(\tau - 1/2) - \mathrm{u}(\tau - 1) d\tau = \\ &= (t - 1/2)\,\mathrm{u}(t - 1/2) - (t - 1)\,\mathrm{u}(t - 1) \\ &\quad -(t - 3/2)\,\mathrm{u}(t - 3/2) + (t - 2)\,\mathrm{u}(t - 2) \end{aligned}$$

Che ha la forma di un trapezio avente come base maggiore l'intervallo $[1/2, 2]$, come base minore l'intervallo $[1, 3/2]$ ed altezza $1/2$.

Parte II – Probabilità e segnali aleatori

1) Determinare la densità di probabilità della differenza tra due variabili aleatorie indipendenti *X* ed *Y*, entrambe uniformi nell'intervallo $[0,1]$.

2) Le misure X_1 ed X_2 dipendono dalla variabile aleatoria *X* secondo le rispettive relazioni $X_1 = a_1 X + b_1$ e $X_2 = a_2 X + b_2$. Le quantità a_1, a_2, b_1 e b_2 sono costanti non aleatorie. Determinare il coefficiente di correlazione tra le due misure (μ indica le medie e σ le deviazioni standard)

$$\rho_{12} = \frac{\mathrm{E}[X_1 X_2] - \mu_1 \mu_2}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

3) Il segnale aleatorio

$$g(t, T) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T^2 / 2}{T^2}\right)$$

Dipende dalla variabile aleatoria *T*, uniforme nell'intervallo $[0,1]$. Trovare il valor medio del segnale.

Svolgimento

1) La densità di probabilità della differenza di due variabili aleatorie può essere trovata, per definizione, come

$$f_Z(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} F_Z(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} \Pr\{Z \le \gamma\} = \frac{d}{d\gamma} \Pr\{X - Y \le \gamma\}$$

La regione di piano in cui si verifica l'evento $\{X - Y \le \gamma\}$ è il semipiano identificato dalla condizione $Y \ge X - \gamma$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} f_Z(\gamma) &= \frac{d}{d\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\alpha-\gamma}^{\infty} f_{XY}(\alpha, \beta) d\beta d\alpha = \frac{d}{d\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\alpha-\gamma}^{\infty} f_X(\alpha) f_Y(\beta) d\beta d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha) f_Y(\alpha - \gamma) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha) f_Y(-(\gamma - \alpha)) d\alpha \end{aligned}$$

Che si può leggere come un prodotto di convoluzione tra $f_X(\alpha) = \mathrm{rect}(\alpha - 1/2)$ ed $f_Y(-\alpha) = \mathrm{rect}(\alpha + 1/2)$, da cui si ottiene $f_Z(\gamma) = (1 - |\gamma|)\,\mathrm{rect}(\gamma / 2)$.

2) Si ha, per la linearità dell'operatore di media,

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \mathrm{E}[X_1] = \mathrm{E}[a_1 X + b_1] = \\ &= a_1\,\mathrm{E}[X] + b_1 = a_1\mu_X + b_1 \\ \mu_2 &= \mathrm{E}[X_2] = \mathrm{E}[a_2 X + b_2] = \\ &= a_2\,\mathrm{E}[X] + b_2 = a_2\mu_X + b_2 \\ \sigma_1^2 &= \mathrm{E}[(X_1-\mu_1)^2] = \mathrm{E}[(a_1X + b_1 - a_1\mu_X - b_1)^2] = \\ &= \mathrm{E}[a_1^2(X-\mu_X)^2] = a_1^2\,\mathrm{E}[(X-\mu_X)^2] = a_1^2\sigma_X^2 \\ \sigma_2^2 &= \mathrm{E}[(X_2-\mu_2)^2] = \mathrm{E}[(a_2X + b_2 - a_2\mu_X - b_2)^2] = \\ &= \mathrm{E}[a_2^2(X-\mu_X)^2] = a_2^2\,\mathrm{E}[(X-\mu_X)^2] = a_2^2\sigma_X^2 \\ \mathrm{E}[X_1X_2] - \mu_1\mu_2 &= \mathrm{E}[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)] = \\ &= \mathrm{E}[a_1a_2(X-\mu_X)(X-\mu_X)] = a_1a_2\sigma_X^2\end{aligned}$$

E si ottiene infine

$$\rho_{12} = \frac{a_1a_2}{\sqrt{a_1^2a_2^2}} = \mathrm{sign}(a_1)\,\mathrm{sign}(a_2)\,.$$

3) Conviene introdurre una variabile aleatoria ausiliaria $Z = T^2$. Il segnale può essere riscritto come

$$g(t,Z) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - Z/2}{Z}\right) = \begin{cases} 1 & t \in [0,Z] \\ 0 & t \notin [0,Z] \end{cases}$$

dipendente dalla variabile aleatoria *Z*, avente densità di probabilità data da

$$f_Z(\gamma) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\,\mathrm{rect}(\gamma - 1/2)\,.$$

Poiché il segnale assume valore unitario dove non nullo, si ha

$$\overline{g(t,Z)} = \Pr\{g(t,Z)=1\} = \begin{cases} 0 & t < 0 \vee t > 1 \\ \int_t^1 f_Z(\gamma)d\gamma & t \in [0,1] \end{cases}$$

ovvero

$$\overline{g(t,Z)} = (1-\sqrt{t})\,\mathrm{rect}(t - 1/2)\,.$$