Laurea in Ingegneria Elettronica - A.A.2011/2012
Fondamenti di comunicazioni elettriche
Prova scritta del 18 settembre 2012

Parte I – Analisi di Fourier

1) Determinare per quale valore di A l'energia del segnale

$$g(t) = 2\,\mathrm{sinc}(2t) - A\,\mathrm{sinc}^2(t)$$

risulta minima.

2) Determinare periodo e coefficienti dello sviluppo in serie del segnale

$$g(t) = \left|\cos^3(\pi t)\right|.$$

3) Un sistema di elaborazione di segnali opera secondo la relazione

$$y(t) = \int_{t-1/2}^{t+1/2} x(\tau)e^{-j2\pi\tau}d\tau$$

Determinare se si tratta di un sistema (a) lineare e (b) tempo-invariante, e trovare l'uscita dal sistema in corrispondenza al segnale di ingresso

$$x(t) = \cos(\pi t).$$

Svolgimento

1) Per determinare l'energia del segnale passiamo in frequenza

$$G(f) = \mathrm{rect}(f\,/\,2) - A(1-|f|)\,\mathrm{rect}(f\,/\,2) =$$
$$= \begin{cases} 0 & |f| > 1 \\ 1 - A + Af & 0 < f < 1 \\ 1 - A - Af & -1 < f < 0 \end{cases}$$

ed utilizziamo il teorema di Rayleigh (o relazione di Parseval):

$$\mathcal{E} = \int \left|G(f)\right|^2 df = 2\int_0^1 (1 - A + Af)^2 df =$$
$$= 2\int_0^1 (1-A)^2 + 2(1-A)Af + A^2f^2 df =$$
$$= 2(1-A)^2 + 2(1-A)A + 2A^2\frac{1}{3} = 2 - 2A + \frac{2A^2}{3}$$

Per determinare il valore di A per il quale l'energia è minima basta trovare lo zero della derivata prima (e verificare che la derivata seconda sia positiva)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dA} = -2 + \frac{4A}{3} = 0 \Leftrightarrow A = \frac{3}{2}$$

2) Poiché tra un semiperiodo ed il successivo la funzione coseno cambia segno mantenendo gli stessi valori assoluti, si deduce che il segnale è periodico di periodo unitario.

Per trovare i coefficienti dello sviluppo in serie consideriamo il segnale troncato

$$g_{T_0}(t) = g(t)\,\mathrm{rect}(t / T_0) = \left|\cos^3(\pi t)\right|\mathrm{rect}(t) = \cos^3(\pi t)\,\mathrm{rect}(t)$$

Osservando che vale l'identità trigonometrica (dimostrabile in modo semplice con la formula di Eulero per il coseno)

$$\cos^3(\pi t) = \frac{1}{4}\cos(3\pi t) + \frac{3}{4}\cos(\pi t),$$

si trova

$$G_{T_0}(f) = \frac{1}{8}\mathrm{sinc}(f - \frac{3}{2}) + \frac{1}{8}\mathrm{sinc}(f + \frac{3}{2}) + \frac{3}{8}\mathrm{sinc}(f - \frac{1}{2}) + \frac{3}{8}\mathrm{sinc}(f + \frac{1}{2}),$$

ed infine

$$G_n = \frac{1}{T_0}G_{T_0}(\frac{n}{T_0}) = \frac{1}{8}\mathrm{sinc}(n - \frac{3}{2}) + \frac{1}{8}\mathrm{sinc}(n + \frac{3}{2}) + \frac{3}{8}\mathrm{sinc}(n - \frac{1}{2}) + \frac{3}{8}\mathrm{sinc}(n + \frac{1}{2}).$$

3) La proprietà di linearità del sistema può essere scritta

$$S\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t); t\} = \alpha_1 S\{x_1(t); t\} + \alpha_2 S\{x_2(t); t\},$$

ovvero in questo caso

$$\int_{t-1/2}^{t+1/2} \left[\alpha_1 x_1(\tau) + \alpha_2 x_2(\tau)\right] e^{-j2\pi\tau} d\tau = \alpha_1 \int_{t-1/2}^{t+1/2} x_1(\tau) e^{-j2\pi\tau} d\tau + \alpha_2 \int_{t-1/2}^{t+1/2} x_2(\tau) e^{-j2\pi\tau} d\tau$$

che si trova essere vera, quindi il sistema è lineare.

La proprietà di tempo invarianza può essere scritta

$$S\{x(t - t_0); t\} = S\{x(t); t - t_0\}$$

ovvero in questo caso

$$\int_{t-1/2}^{t+1/2} x(\tau - t_0) e^{-j2\pi\tau} d\tau = \int_{t-t_0-1/2}^{t-t_0+1/2} x(\tau) e^{-j2\pi\tau} d\tau$$

che, con la sostituzione $\tau - t_0 = \zeta$, diventa

$$\int_{t-t_0-1/2}^{t-t_0+1/2} x(\zeta) e^{-j2\pi(\zeta + t_0)} d\zeta = \int_{t-t_0-1/2}^{t-t_0+1/2} x(\tau) e^{-j2\pi\tau} d\tau$$

che è vera solo per alcuni valori di t_0, quindi il sistema non è tempo-invariante.

L'uscita del sistema in corrispondenza all'ingresso $x(t) = \cos(\pi t)$ è data da

$$y(t) = \int_{t-1/2}^{t+1/2} \cos(\pi\tau) e^{-j2\pi\tau} d\tau = \int_{t-1/2}^{t+1/2} \frac{e^{-j\pi\tau} + e^{-j3\pi\tau}}{2} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{-j\pi\tau}}{-j\pi}\Bigg|_{t-1/2}^{t+1/2} + \frac{1}{2}\frac{e^{-j3\pi\tau}}{-j3\pi}\Bigg|_{t-1/2}^{t+1/2} = \frac{1}{\pi}e^{-j\pi t} - \frac{1}{3\pi}e^{-j3\pi t}$$

ed evidentemente contiene frequenze non presenti nel segnale d'ingresso.

1) La variabile aleatoria discreta X assume con eguale probabilità i valori interi compresi tra -4 e 3 (estremi inclusi), mentre la variabile aleatoria Y, indipendente da X, assume con eguale probabilità i valori compresi tra 0 e 3 (estremi inclusi). Trovare la probabilità dell'evento $\left|X\right| = Y$.

2) Due variabili aleatorie X ed Y assumono valori uniformemente distribuiti in una corona circolare centrata nell'origine del piano (X,Y) ed avente raggi 3 e 5. Determinare la densità di probabilità della distanza dall'origine del punto (X,Y).

3) Determinare se il segnale aleatorio periodico

$$g(t,t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(t - t_0 - 2n),$$

dipendente dalla variabile aleatoria t_0 uniforme nell'intervallo $[0,1]$ è o meno stazionario in senso lato.

Svolgimento

1) Il valore assoluto della variabile aleatoria X è a sua volta una variabile aleatoria che assume i valori interi tra 0 e 4 (estremi inclusi) con le probabilità

$$\Pr\{\left|X\right| = 0\} = \Pr\{X = 0\} = \frac{1}{8}$$

$$\Pr\{\left|X\right| = 1\} = \Pr\{X = 1\} + \Pr\{X = -1\} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr\{\left|X\right| = 2\} = \Pr\{X = 2\} + \Pr\{X = -2\} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr\{\left|X\right| = 3\} = \Pr\{X = 3\} + \Pr\{X = -3\} = \frac{1}{4}$$

$$\Pr\{\left|X\right| = 4\} = \Pr\{X = -4\} = \frac{1}{8}$$

La probabilità dell'evento $\left|X\right| = Y$ risulta allora, vista l'indipendenza delle variabili,

$$\begin{aligned}\Pr\{\left|X\right| = Y\} &= \sum_{k=0}^{3} \Pr\{\left|X\right| = k\} \Pr\{Y = k\} = \\ &= \Pr\{\left|X\right| = 0\} \Pr\{Y = 0\} + \Pr\{\left|X\right| = 1\} \Pr\{Y = 1\} + \\ &\quad + \Pr\{\left|X\right| = 2\} \Pr\{Y = 2\} + \Pr\{\left|X\right| = 3\} \Pr\{Y = 3\} \\ &= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{32}\end{aligned}$$

2) Per determinare la densità di probabilità richiesta consideriamo la variabile aleatoria

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

La distribuzione cumulativa di probabilità di Z è data da

$$F_Z(\gamma) = \Pr\{Z \le \gamma\} = \Pr\{\sqrt{X^2 + Y^2} \le \gamma\} = $$

$$= \begin{cases} 0 & \gamma < 3 \\ \displaystyle\int_3^{\gamma} \int_0^{2\pi} \frac{1}{16\pi} \rho \, d\theta d\rho = \frac{\gamma^2 - 9}{16} & 3 \le \gamma < 5 \\ 1 & \gamma \ge 5 \end{cases}$$

E risulta quindi

$$f_Z(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} F_Z(\gamma) = \frac{\gamma}{8} \mathrm{rect}(\frac{\gamma - 4}{2}).$$

3) Il segnale ha periodo pari a 2, coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier dati da

$$G_n = \frac{1}{2} \mathrm{sinc}(n / 2) e^{-j\pi n t_0},$$

e può quindi essere espresso nella forma

$$g(t, t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \mathrm{sinc}(n / 2) e^{j\pi n (t - t_0)}.$$

Per determinare se il segnale è o meno stazionario in senso lato, consideriamo il valore medio

$$\mathrm{E}[g(t, t_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \mathrm{sinc}(n / 2) e^{j\pi n t}\, \mathrm{E}[e^{-j\pi n t_0}]$$

Se il segnale fosse stazionario in senso lato, questo valore medio dovrebbe risultare indipendente dal tempo, ed affinché questo accada i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier devono annullarsi per ogni $n \neq 0$.

Si osservi che $G_n = 0$ per $n \neq 0$ pari; per n dispari il fattore $\mathrm{sinc}(n / 2)$ non si annulla e resta da valutare il valore medio

$$\mathrm{E}[e^{-j\pi n t_0}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\pi n \alpha} f_{t_0}(\alpha) d\alpha = \int_0^1 e^{-j\pi n \alpha} d\alpha \underset{n \neq 0}{=} \left. \frac{e^{-j\pi n \alpha}}{-j\pi n} \right|_0^1 = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \text{ pari} \\ \dfrac{2}{j\pi n} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Poiché anche questo per n dispari non si annulla, il segnale non è stazionario in senso lato.