**Laurea in Ingegneria Elettronica - A.A.2011/2012**
**Fondamenti di comunicazioni elettriche**
**Prova scritta del 5 novembre 2012**

*Parte I – Analisi di Fourier*

**1)** Determinare la trasformata di Fourier del segnale

$$g(t) = (1 - t^2)\,\mathrm{rect}(t / 2)$$

**2)** Determinare il segnale in uscita da un sistema LTI avente risposta impulsiva

$$h(t) = e^{-t}\,\mathrm{u}(t)$$

e segnale d'ingresso

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T_0 / 2}\right)$$

**3)** Si consideri il segnale

$$g(t) = \frac{2}{1 + \pi^2 t^2}.$$

Trovare l'energia, la banda $B_{-3\mathrm{dB}}$ e quanta energia è posseduta dal segnale a frequenze maggiori della $B_{-3\mathrm{dB}}$.

*Svolgimento*

**1)** Procedendo per derivazione

$$g'(t) = -2t\,\mathrm{rect}(t / 2)$$

$$g''(t) = 2\delta(t+1) + 2\delta(t-1) - 2\,\mathrm{rect}(t / 2)$$

$$(j2\pi f)^2 G(f) = 2e^{j2\pi f} + 2e^{-j2\pi f} - 4\,\mathrm{sinc}(2f)$$

$$G(f) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sinc}(2f) - \cos(2\pi f)}{\pi^2 f^2} & f \neq 0 \\ 4 / 3 & f = 0 \end{cases}$$

**2)** Il segnale $x(t)$ è periodico per costruzione, ed il suo sviluppo in serie è dato da

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi kt/T_0}$$

$$X_k = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(k / 2)$$

A questo punto conviene operare in frequenza, utilizzando la funzione di trasferimento del sistema

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

Ed ottenendo

$$y(t) = h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{j2\pi kt/T_0} = F^{-1}\left[H(f)\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - k / T_0)\right] =$$
$$= F^{-1}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k / T_0) X_k \delta(f - k / T_0)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(k / T_0) X_k e^{j2\pi kt/T_0} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{\mathrm{sinc}(k / 2)}{1 + j2\pi k / T_0} e^{j2\pi kt/T_0}$$

Volendo ottenere una espressione più esplicita nel dominio del tempo, sfruttando la linearità del prodotto di convoluzione si ottiene

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{-(t + T_0/4 - nT_0)}\right) \mathrm{u}(t + T_0 / 4 - nT_0)$$
$$-\left(1 - e^{-(t - T_0/4 - nT_0)}\right) \mathrm{u}(t - T_0 / 4 - nT_0) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\frac{t - nT_0}{T_0 / 2})$$
$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t - T_0/4 - nT_0)} \mathrm{u}(t - T_0 / 4 - nT_0)$$
$$- \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t + T_0/4 - nT_0)} \mathrm{u}(t + T_0 / 4 - nT_0)$$

**3)** Osservando che

$$g(t) = \frac{1}{1 + j\pi t} + \frac{1}{1 - j\pi t},$$

lo spettro del segnale risulta

$$G(f) = 2e^{-2|f|}.$$

L’energia risulta

$$\mathrm{E} = 2\int_0^{\infty} \left|G(f)\right|^2 df = 2\int_0^{\infty} 4e^{-4f} df = 2.$$

Per trovare la banda a $-3\mathrm{dB}$ impongo la condizione

$$\left|G(B_{-3})\right|^2 = \frac{1}{2} \max_f \left|G(f)\right|^2$$

$$\max_f \left|G(f)\right|^2 = \left|G(0)\right|^2 = 4$$

$$\left|G(B_{-3})\right|^2 = 2 \Rightarrow 4e^{-4|B_{-3}|} = 2 \Rightarrow B_{-3} = \frac{1}{4}\ln 2$$

L’energia posseduta dal segnale al di fuori della banda a $-3\mathrm{dB}$

$$\mathrm{E} = 2\int_{B_{-3}}^{\infty} \left|G(f)\right|^2 df = 2\int_{B_{-3}}^{\infty} 4e^{-4f} df = 8 \left.\frac{e^{-4f}}{-4}\right|_{B_{-3}}^{\infty} = 2e^{-4B_{-3}} = 1.$$

*Parte II – Probabilità e segnali aleatori*

**1)** Due variabili aleatorie indipendenti *X* ed *Y* sono distribuite uniformemente nell'intervallo $[0,1]$. Determinare e disegnare la densità di probabilità della variabile aleatoria *X*, condizionata all'evento $X > Y$.

**2)** Tre variabili aleatorie indipendenti *X*, *Y* e *Z* sono distribuite uniformemente nell'intervallo $[0,1]$. Trovare la probabilità che $Z \in [X, X+Y]$.

**3)** Una trasmissione binaria su canale AWGN utilizza la costellazione $C_0 = 1$, $C_1 = 1i$. Determinare le regioni di decisione a massima verosimiglianza e la probabilità di errore ammesso che i campioni di rumore all'ingresso del decisore abbiano varianza $N_0$ per dimensione.

*Svolgimento*

**1)** Procedendo con la definizione,

$$f_{X|X>Y}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} F_{X|X>Y}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \Pr\{X \le \alpha \mid X > Y\} = \frac{d}{d\alpha} \frac{\Pr\{X \le \alpha, X > Y\}}{\Pr\{X > Y\}}$$

$$\Pr\{X \le \alpha, X > Y\} = \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(x,y)dydx = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ \int_0^{\alpha} \int_0^{x} dydx = \frac{1}{2}\alpha^2 & \alpha \in [0,1] \\ 1/2 & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\Pr\{X > Y\} = \Pr\{X \le \infty, X > Y\} = \frac{1}{2}$$

$$f_{X|X>Y}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \frac{\Pr\{X \le \alpha, X > Y\}}{\Pr\{X > Y\}} = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ 2\alpha & \alpha \in [0,1] = 2\alpha \,\mathrm{rect}(\alpha - \frac{1}{2}) \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

**2)** Conviene considerare una ulteriore variabile aleatoria $W = Z - X$, in quanto in questo modo la probabilità richiesta può essere scritta in termini di due variabili aleatorie invece di tre:

$$\Pr\{Z \in [X, X+Y]\} = \Pr\{Z - X \in [0, Y]\} = \Pr\{W \in [0, Y]\}$$

La densità di probabilità di *W* è data da

$$f_W(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} \Pr\{Z - X \le \gamma\} = \frac{d}{d\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\gamma+x} f_{ZX}(z,x)dzdx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Z(\gamma + x) f_X(x)dx = [\ldots] = (1 - |\gamma|)\,\mathrm{rect}(\gamma / 2)$$

Risulta quindi

$$\Pr\{W \in [0,Y]\} = \int_0^{\infty} \int_w^{\infty} f_{WY}(w,y)dydw = \int_0^{1} \int_w^{1} (1-w)dydw = \int_0^{1} (1-w)^2 dw = \frac{1}{3}.$$

**3)** Si può procedere rapidamente in modo grafico. Per via analitica la regola di decisione è data da

$$\hat{a}_k = \arg\max_a f_{y_k|a_k}(y_k, a) = \arg\max_a f_{n_k}(y_k - a) =$$
$$= \arg\max_a \frac{1}{2\pi N_0} e^{-\frac{1}{2N_0}\|y_k - a\|^2} = \arg\min_a \|y_k - a\|^2 .$$

Poiché il problema è binario, si ottiene

$$\hat{a}_k = C_0 \Leftrightarrow \|y_k - C_0\|^2 < \|y_k - C_1\|^2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(y_k(C_0 - C_1)^*) > |C_0|^2 - |C_1|^2$$

E sostituendo i punti di costellazione si ottiene

$$\hat{a}_k = C_0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(y_k) > \mathrm{Im}(y_k),$$

come si poteva ottenere immediatamente in modo grafico considerando l'asse del segmento congiungente i punti di costellazione.
Per il calcolo della probabilità d'errore, questa è data da

$$P(e) = \Pr\{\hat{a}_k \neq a_k\} = \Pr\{\hat{a}_k = C_0 \mid a_k = C_1\}\Pr\{a_k = C_1\} +$$
$$+ \Pr\{\hat{a}_k = C_1 \mid a_k = C_0\}\Pr\{a_k = C_0\} =$$
$$= \frac{1}{2}\Pr\{\mathrm{Re}(y_k) > \mathrm{Im}(y_k) \mid a_k = C_1\}$$
$$+ \frac{1}{2}\Pr\{\mathrm{Re}(y_k) < \mathrm{Im}(y_k) \mid a_k = C_0\} =$$
$$= \frac{1}{2}\Pr\{n_{I,k} > 1 + n_{Q,k}\} + \frac{1}{2}\Pr\{1 + n_{I,k} < n_{Q,k}\} =$$
$$= \frac{1}{2}\Pr\{n_{I,k} - n_{Q,k} > 1\} + \frac{1}{2}\Pr\{n_{Q,k} - n_{I,k} > 1\}$$

Dove $n_{I,k}$ ed $n_{Q,k}$ sono i campioni delle componenti in fase e quadratura del rumore filtrato.
La variabile aleatoria $n_{I,k} - n_{Q,k}$, in quanto combinazione lineare di variabili gaussiane indipendenti, è gaussiana con media la combinazione lineare delle medie e varianza la combinazione lineare delle varianze, con pesi elevati al quadrato, ovvero è gaussiana con media nulla e varianza $2N_0$.
Si ottiene quindi

$$P(e) = \frac{1}{2}Q(1/\sqrt{2N_0}) + \frac{1}{2}Q(1/\sqrt{2N_0}) = Q(1/\sqrt{2N_0}).$$

Allo stesso risultato si sarebbe potuti pervenire immediatamente osservando che la distanza tra i punti di costellazione è $\sqrt{2}$ ed utilizzando il noto risultato relativo alla probabilità di errore per una segnalazione binaria

$$P(e) = Q\left(\frac{d/2}{\sqrt{N_0}}\right) = Q\left(\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{N_0}}\right).$$