Laurea in Ingegneria Elettronica - A.A.2011/2012
Fondamenti di comunicazioni elettriche
Prova scritta del 28 gennaio 2013

Parte I – Analisi di Fourier

1) Determinare la trasformata di Fourier del segnale

$$g(t) = te^{-at}\,\mathrm{u}(t)$$

in cui *a* è una costante positiva.

2) Un segnale periodico ha sviluppo in serie di Fourier con coefficienti

$$G_k = \frac{2}{1 + jk}$$

Sapendo che il periodo del segnale è pari a 2π, trovare una possibile espressione del segnale.

3) Trovare una espressione per il segnale all'uscita di un filtro passa basso ideale avente frequenza di taglio 300Hz quando al suo ingresso è presente un segnale ad onda quadra con frequenza 50Hz, ampiezze pari a 0 e 5 e *duty cycle* del 50%.

Svolgimento

1) E' opportuno impiegare la proprietà di derivazione in frequenza

$$F[-j2\pi t x(t)] = X'(f)$$

Ottenendo quindi

$$G(f) = \frac{1}{-j2\pi}\frac{d}{df}\frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{1}{(a + j2\pi f)^2}.$$

2) Visto che lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico per costruzione è dato da

$$\sum_n g(t - nT) = \sum_k \frac{1}{T} G(k\,/\,T) e^{j2\pi kt/T}$$

Si deduce che una scelta possibile per $G(f)$ è

$$G(f) = \frac{4\pi}{1 + j2\pi f}$$

Da cui segue

$$g(t) = 4\pi e^{-t}\,\mathrm{u}(t).$$

3) La risposta in frequenza di un filtro passa basso ideale con frequenza di taglio 300Hz è

$$H(f) = \mathrm{rect}(\frac{f}{600})$$

Una espressione per il segnale ad onda quadra descritto dal testo del problema è

$$x(t) = \sum_n 5\,\mathrm{rect}(\frac{t - n\,/\,50}{1\,/\,100})$$

Per passare nel dominio della frequenza consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier

$$x(t)=\sum_k \frac{5}{2}\operatorname{sinc}(k/2)e^{j2\pi 50kt}$$

$$X(f)=\sum_k \frac{5}{2}\operatorname{sinc}(k/2)\delta(f-50k)$$

Il filtro passa basso ideale, in virtù della proprietà campionatrice dell'impulso, ha l'effetto di troncare la sommatoria

$$\begin{aligned}Y(f)&=\operatorname{rect}(\frac{f}{600})\sum_k \frac{5}{2}\operatorname{sinc}(k/2)\delta(f-50k)=\\&=\sum_k \frac{5}{2}\operatorname{sinc}(k/2)\operatorname{rect}(k/12)\delta(f-50k)=\\&=\frac{5}{2}\sum_{\substack{k\in\{-5,-3,-1,\\0,1,3,5\}}}\operatorname{sinc}(k/2)\delta(f-50k)\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è usato il fatto che $\operatorname{sinc}(k/2)=0$ per *k* pari non nullo.

Si ottiene infine:

$$y(t)=\frac{5}{2}+\frac{10}{\pi}\cos(2\pi 50t)-\frac{10}{3\pi}\cos(2\pi 150t)+\frac{10}{5\pi}\cos(2\pi 250t).$$

Parte II – Probabilità e segnali aleatori

1) Trovare la densità di probabilità della funzione di variabile aleatoria $Y=X^2-1$, dove la variabile aleatoria X ha densità di probabilità $f_X(\alpha)=\exp(-2\mid\alpha\mid)$.

2) Trovare valore medio e valore quadratico medio di una variabile aleatoria avente densità di probabilità $f_X(\alpha)=k\alpha e^{-\alpha^2}\,\mathrm{u}(\alpha)$, dove *k* è una opportuna costante (di normalizzazione).

3) Un sistema di trasmissione numerica in banda base utilizza sia al trasmettitore sia al ricevitore degli impulsi di segnalazione aventi forma esponenziale $p(t)=\exp(-t)\,\mathrm{u}(t)$. Ammesso che il sistema non preveda alcun accorgimento per compensare l'interferenza intersimbolica, trovare il ritardo al quale effettuare il campionamento per avere la minima probabilità di errore ed una espressione per l'interferenza intersimbolica.

Svolgimento

1) Procedendo con la definizione

$$f_Y(\beta)=\frac{d}{d\beta}F_Y(\beta)=\frac{d}{d\beta}\Pr\{Y\le\beta\}=\frac{d}{d\beta}\Pr\{X^2-1\le\beta\}$$

$$\Pr\{X^2-1\le\beta\}=\begin{cases}\Pr\varnothing=0 & \beta<-1\\ \Pr\{X\in[-\sqrt{\beta+1},\sqrt{\beta+1}]\}=\int_{-\sqrt{\beta+1}}^{\sqrt{\beta+1}} f_X(\alpha)d\alpha & \beta\ge-1\end{cases}$$

Si ottiene quindi

$$f_Y(\beta)=\mathrm{u}(\beta+1)\frac{f_X(\sqrt{\beta+1})+f_X(-\sqrt{\beta+1})}{2\sqrt{\beta+1}}=\mathrm{u}(\beta+1)\frac{\mathrm{e}^{-2\sqrt{\beta+1}}}{\sqrt{\beta+1}}.$$

2) Determino innanzitutto la costante di normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha)d\alpha = k\int_{0}^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2}d\alpha = 1$$
$$\int_{0}^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2}d\alpha = \frac{1}{-2}e^{-\alpha^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow k = \frac{1}{\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2}d\alpha} = 2$$

Per quanto riguarda il valor medio, esso risulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha f_X(\alpha)d\alpha = \int_0^{\infty} \alpha\cdot 2\alpha e^{-\alpha^2}d\alpha = \alpha\cdot\frac{e^{-\alpha^2}}{-1}\Bigg|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2}d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ed infine il valore quadratico medio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 f_X(\alpha)d\alpha = \int_0^{\infty} \alpha^2\cdot 2\alpha e^{-\alpha^2}d\alpha = \alpha^2\frac{e^{-\alpha^2}}{-1}\Bigg|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2\alpha\cdot\frac{e^{-\alpha^2}}{-1}d\alpha = \int_0^{\infty} 2\alpha e^{-\alpha^2}d\alpha = 1\,.$$

3) Dato il segnale modulato

$$v(t) = \sum_n a_n p(t - nT)$$

l'espressione del segnale ricevuto sarà data, nel caso di trasmissione in banda base, da

$$r(t) = \sum_n a_n p(t - nT) + w(t)$$

Al ricevitore è presente un filtro avente risposta $p(t)$ sicché all'ingresso del campionatore è presente il segnale

$$z(t) = \sum_n a_n q(t - nT) + w \otimes p(t)$$

dove appare il segnale $q(t) = p(t)\otimes p(t)$ dato da

$$q(t) = p(t)\otimes p(t) = e^{-t}\,\mathrm{u}(t)\otimes e^{-t}\,\mathrm{u}(t) = te^{-t}\,\mathrm{u}(t)$$

ed il segnale $w\otimes p(t)$ è, in quanto risultato di un filtraggio lineare su un processo gaussiano, un processo di rumore gaussiano.
L'interferenza intersimbolica si manifesta, agli istanti di campionamento scelti, come il contributo dei simboli informativi non corrispondenti al simbolo desiderato. Scelto come indice del simbolo desiderato k e come istante di campionamento ad esso relativo $t_k = kT + t_0$ (dove t_0 è il ritardo da determinare), si ha

$$\begin{aligned} z(t_k) &= \sum_n a_n q(t_k - nT) + \tilde{w}(t_k) = \sum_n a_n q(t_0 + kT - nT) + \tilde{w}(t_k) \\ &= a_k q(t_0) + \underbrace{\sum_{n\neq k} a_n q(t_0 + (k-n)T)}_{\text{interferenza intersimbolica}} + \tilde{w}(t_k) \end{aligned}$$

[Nota: le considerazioni che seguono non sono oggetto di valutazione dell'elaborato] Per rispondere alla richiesta di determinare il ritardo t_0 in modo da minimizzare la probabilità di errore si deve procedere o per via numerica o utilizzando opportune approssimazioni. Ad esempio, se il periodo di segnalazione T è molto minore della durata dell'impulso, il termine di interferenza intersimbolica può essere approssimato con una variabile aleatoria gaussiana ed il problema può essere ricondotto alla ricerca del massimo rapporto segnale-rumore ovvero approssimativamente alla ricerca del massimo di $q(t_0)$.