Laurea in Ingegneria Elettronica - A.A.2011/2012
Fondamenti di comunicazioni elettriche
Prova scritta del 13 febbraio 2013

Parte I – Analisi di Fourier

1) Determinare la trasformata di Fourier del segnale:

$$g(t) = \begin{cases} t & t \in [-1,1] \\ e^{-(t-1)} & t > 1 \\ -e^{(t+1)} & t < -1 \end{cases}$$

2) Trovare una espressione per la potenza del segnale presente all'uscita di un sistema avente risposta all'impulso

$$h(t) = e^{-at}\,\mathrm{u}(t)$$

al cui ingresso è posto il segnale

$$g(t) = \left|\cos(2\pi 50 t)\right|$$

3) Trovare la minima frequenza di campionamento necessaria a ricostruire un segnale avente densità spettrale

$$S(f) = \frac{1}{1 + f^2 / (100\pi)^2}$$

con un errore di ricostruzione inferiore a $-20\,\mathrm{dB}$.

Svolgimento

1) Il segnale può essere scritto come

$$g(t) = t\,\mathrm{rect}(t/2) + e^{-(t-1)}\,\mathrm{u}(t-1) - e^{(t+1)}\,\mathrm{u}(-(t+1))$$

Ricordando la proprietà di derivazione in frequenza, si ottiene

$$\mathrm{F}\left[t\,\mathrm{rect}(t/2)\right] = \frac{1}{-j2\pi}\frac{d}{df}2\,\mathrm{sinc}(2f) = \\ = \frac{\sin(2\pi f) - 2\pi f\cos(2\pi f)}{j2\pi^2 f^2}$$

Mentre per gli altri addendi si ha

$$\mathrm{F}\left[e^{-(t-1)}\,\mathrm{u}(t-1) - e^{(t+1)}\,\mathrm{u}(-(t+1))\right] = \\ = \frac{1}{1+j2\pi f}e^{-j2\pi f} - \frac{1}{1-j2\pi f}e^{j2\pi f}$$

La trasformata richiesta è la somma di questi due addendi.

2) Il segnale $g(t)$, valore assoluto di una sinusoide, è periodico di periodo $T_0 = 1/100$. Il segnale all'uscita dal sistema sarà anch'esso periodico.
Indicando con $f_C = 50$ la frequenza della sinusoide, lo sviluppo in serie di Fourier di $g(t)$ risulta

$$g_{T_0}(t) = \cos(2\pi f_C t)\,\mathrm{rect}(t / T_0)$$
$$G_{T_0}(f) = \frac{T_0}{2}\mathrm{sinc}((f + f_C)T_0) + \frac{T_0}{2}\mathrm{sinc}((f - f_C)T_0)$$
$$G_k = \frac{1}{T_0} G_{T_0}(k / T_0) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(k + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(k - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2\pi}\frac{(-1)^k}{1/4 - k^2}$$
$$g(t) = \sum_k G_k e^{j2\pi kt/T_0}$$
Il segnale all'uscita dal sistema, lineare e stazionario, sarà periodico con ciascuna armonica moltiplicata per il valore della funzione di trasferimento alla frequenza dell'armonica
$$H(f) = \frac{1}{a + j2\pi f}$$
$$H_k = H(\frac{k}{T_0}) = \frac{T_0}{aT_0 + j2\pi k}$$
Quindi il segnale di uscita, e la relativa potenza, sono date da
$$y(t) = \sum_k G_k H_k e^{j2\pi kt/T_0}$$
$$P_y = \sum_k \left|G_k H_k\right|^2$$

3) L'errore di ricostruzione è dato dalla quota di potenza del segnale che non è possibile rappresentare, ovvero, posto $f_C = 100\pi$
$$e(f_S) = \int_{-\infty}^{-f_S/2} S(f)df + \int_{f_S/2}^{\infty} S(f)df =$$
$$= 2\int_{f_S/2}^{\infty} \frac{1}{1 + (f / f_C)^2} df = 2f_C\left[\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{f_S}{2f_C})\right]$$
L'errore in dB è dato da
$$e(f_S)_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}\frac{e(f_S)}{e(0)} = 10\log_{10}\left[1 - \frac{2}{\pi}\arctan(\frac{f_S}{2f_C})\right]$$
Imponendo che l'errore di ricostruzione sia inferiore a $-20\,\mathrm{dB}$ si trova
$$f_S > 2f_C \tan\left[\frac{\pi}{2}(1 - 10^{-2})\right].$$

Parte II – Probabilità e segnali aleatori

1) Una variabile aleatoria φ assume uniformemente valori nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Trovare valore medio e potenza del processo $v(t) = \left|V_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi)\right|$.

2) Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria
$$Z = \max(|X|, |Y|)$$
dove X ed Y sono variabili aleatorie indipendenti.

3) Due variabili aleatorie *X* ed *Y* hanno densità di probabilità congiunta data da
$$f_{XY}(\alpha, \beta) = k\exp(-(\alpha + \beta)^2)$$
Determinare la costante di normalizzazione *k* e se *X* ed *Y* sono o meno indipendenti.

Svolgimento

1) Usando il teorema della media si ottiene

$$\mathrm{E}\left[v(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(\alpha)\left|V_0 \cos(2\pi f_0 t + \alpha)\right| d\alpha =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|V_0 \cos(2\pi f_0 t + \alpha)\right| d\alpha = \frac{1}{2\pi} 2V_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\alpha) d\alpha = V_0 \frac{2}{\pi}$$

E per la potenza

$$\mathrm{E}\left[v^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varphi}(\alpha)\left|V_0 \cos(2\pi f_0 t + \alpha)\right|^2 d\alpha =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|V_0 \cos(2\pi f_0 t + \alpha)\right|^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi} 2V_0^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\alpha) d\alpha = \frac{V_0^2}{2}$$

2) Procedendo come al solito con la definizione,

$$f_Z(\gamma) = \frac{d}{d\gamma}\Pr\{Z \le \gamma\} = \frac{d}{d\gamma}\Pr\{\max(|X|,|Y|) \le \gamma\}$$

L'evento $\{\max(|X|,|Y|) \le \gamma\}$ si verifica, per $\gamma \ge 0$, nella regione $[-\gamma,\gamma]\times[-\gamma,\gamma]$, e per $\gamma < 0$ è impossibile. Si ha quindi

$$F_Z(\gamma) = \mathrm{u}(\gamma)\int_{-\gamma}^{\gamma}\int_{-\gamma}^{\gamma} f_{XY}(\alpha,\beta) d\alpha d\beta =$$
$$= \mathrm{u}(\gamma)\int_{-\gamma}^{\gamma} f_X(\alpha) d\alpha \int_{-\gamma}^{\gamma} f_Y(\beta) d\beta =$$
$$= \mathrm{u}(\gamma)\left[F_X(\gamma) - F_X(-\gamma)\right]\left[F_Y(\gamma) - F_Y(-\gamma)\right]$$

e

$$f_Z(\gamma) = \delta(\gamma)\Pr\{X = 0\}\Pr\{Y = 0\} +$$
$$+\mathrm{u}(\gamma)\left[f_X(\gamma) + f_X(-\gamma)\right]\left[F_Y(\gamma) - F_Y(-\gamma)\right] +$$
$$+\mathrm{u}(\gamma)\left[F_X(\gamma) - F_X(-\gamma)\right]\left[f_Y(\gamma) + f_Y(-\gamma)\right]$$

3) Per determinare la costante di normalizzazione occorre calcolare l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(\alpha,\beta) d\alpha d\beta$$

E, poiché evidentemente la funzione assegnata è costante quando è costante la somma $\alpha + \beta$, questo risulta infinito e quindi la funzione assegnata non descrive una densità di probabilità.