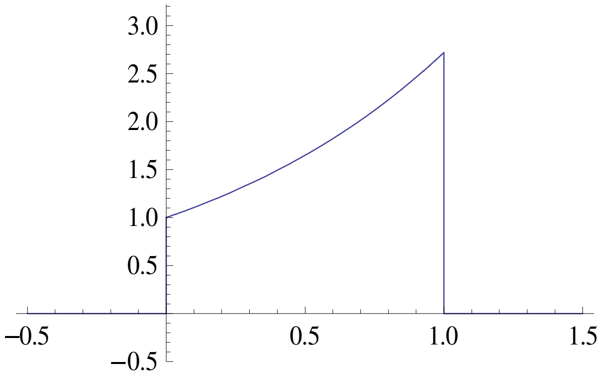
Laurea in Ingegneria Elettronica - A.A.2011/2012
Fondamenti di comunicazioni elettriche
Prova scritta del 23 aprile 2013

Parte I – Analisi di Fourier

1) Determinare la trasformata di Fourier del segnale:

$$g(t) = e^{t}\,\mathrm{rect}(t - \frac{1}{2})$$



2) Usando la funzione $Q(x)$ definita da

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-x^2/2} dx\,,$$

trovare una espressione del prodotto di convoluzione $y(t)$ tra i segnali

$$x(t) = \mathrm{rect}(t - \frac{1}{2})$$

$$h(t) = e^{-\pi t^2}\,.$$

3) Trovare la minima frequenza di campionamento necessaria a rappresentare e ricostruire il segnale

$$g(t) = \mathrm{sinc}(4t) - \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(t)\cos(3\pi t)\,.$$

Svolgimento

1) Procedendo con la definizione si ottiene

$$\mathrm{F}\big[g(t)\big] = \int_{0}^{1} e^{t} e^{-j2\pi f t} dt = \left.\frac{e^{(1-j2\pi f)t}}{1-j2\pi f}\right|_{0}^{1} = \frac{e^{1-j2\pi f} - 1}{1-j2\pi f}\,.$$

2) Il segnale $x(t)$ può essere espresso come differenza di rettangoli:

$$x(t) = \mathrm{rect}(t - \frac{1}{2}) = \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-1) = \mathrm{u}(1-t) - \mathrm{u}(-t)\,.$$

Scelta l'ultima espressione, il prodotto di convoluzione da valutare risulta

$$h(t)*x(t) = h(t)*\mathrm{u}(1-t) - h(t)*\mathrm{u}(-t) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,\mathrm{u}(1-(t-\tau))d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,\mathrm{u}(-(t-\tau))d\tau =$$
$$= \int_{t-1}^{\infty} e^{-\pi\tau^2} d\tau - \int_{t}^{\infty} e^{-\pi\tau^2} d\tau$$

Con la sostituzione di variabile $\sqrt{\pi}\tau = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$ si ottiene

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\pi}(t-1)}^{\infty} e^{-\alpha^2/2} d\alpha - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2\pi}t}^{\infty} e^{-\alpha^2/2} d\alpha =$$
$$= Q(\sqrt{2\pi}(t-1)) - Q(\sqrt{2\pi}t).$$

3) Per determinare la frequenza di campionamento minima necessaria per rappresentare e ricostruire il segnale occorre valutarne la banda.
La trasformata di Fourier del segnale risulta

$$\mathrm{F}\big[g(t)\big] = \frac{1}{4}\mathrm{rect}(\frac{f}{4}) - \frac{1}{4}\mathrm{rect}(f+\frac{3}{2}) - \frac{1}{4}\mathrm{rect}(f-\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}\mathrm{rect}(\frac{f}{2})$$

Quindi il segnale è a banda limitata e frequenza massima pari a 1, e la frequenza di campionamento minima necessaria a rappresentarlo è pari a 2.

Parte II – Probabilità e segnali aleatori

1) Trovare la densità di probabilità della variabile aleatoria $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, dove *X* ed *Y* sono variabili aleatorie Gaussiane, incorrelate, a media nulla e varianza σ^2 .

2) Le variabili aleatorie discrete X ed Y sono caratterizzate dalle seguenti probabilità condizionate

	$x=-1$	$x=0$	$x=+1$
$y=-1$	1/2	1/2	1/6
$y=0$	1/3	0	1/3
$y=+1$	1/6	1/2	1/2

$\Pr\{Y=y \mid X=x\}$

Ammesso che X assuma i valori -1 e $+1$ con la stessa probabilità pari a *p*, trovare per quale valore di *p* le variabili risultano incorrelate.

3) Determinare e tracciare il grafico del valor medio del segnale
$$g(t,T) = \mathrm{rect}(t-T)$$
dipendente dalla variabile aleatoria T avente distribuzione uniforme tra $1/2$ e $5/2$.

Svolgimento

1) Procedendo con la definizione,

$$f_Z(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} F_Z(\gamma)$$

$$F_Z(\gamma)=\Pr\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le\gamma\right\}=$$
$$=\begin{cases}\int_0^{\gamma}\int_0^{2\pi} f_{XY}(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\theta d\rho & \gamma\ge 0\\ 0 & \gamma<0\end{cases}$$

Si può quindi scrivere

$$F_Z(\gamma)=\mathrm{u}(\gamma)\int_0^{\gamma}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}\rho d\theta d\rho=\mathrm{u}(\gamma)\int_0^{\gamma}\frac{\rho}{\sigma^2}e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}d\rho$$

ed infine

$$f_Z(\gamma)=\frac{\gamma}{\sigma^2}e^{-\frac{\gamma^2}{2\sigma^2}}\mathrm{u}(\gamma)$$

2) Due variabili X ed Y risultano incorrelate se

$$\mathrm{E}[XY]=\mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$$

Poiché $\Pr\{X=-1\}=\Pr\{X=+1\}=p$ e $\Pr\{X=0\}=1-2p$, si ha

$$\mathrm{E}[X]=p\cdot 1+(1-2p)\cdot 0+p\cdot -1=0$$

La probabilità dei valori di Y è data da

$$\Pr\{Y=-1\}=\frac{1}{2}-\frac{p}{3}$$
$$\Pr\{Y=0\}=2\frac{p}{3}$$
$$\Pr\{Y=+1\}=\frac{1}{2}-\frac{p}{3}$$

Quindi anche il valor medio $\mathrm{E}[Y]=0$.
La correlazione risulta

$$\mathrm{E}[XY]=\sum_{x,y}xy\Pr\{X=x\}\Pr\{Y=y\mid X=x\}=$$
$$=1\cdot(p/2+p/2)-1\cdot(p/6+p/6)=2\frac{p}{3}$$

Quindi le variabili risultano incorrelate solo per $p=0$, valore in corrispondenza al quale $\Pr\{X=0\}=1$.

3) Si può scrivere

$$g(t,T)=\mathrm{u}(t-T+1/2)-\mathrm{u}(t-T-1/2)$$

Il gradino unitario dipendente dal parametro T è non nullo se

$$\mathrm{u}(t-T\pm 1/2)=1\Leftrightarrow T\le t\pm 1/2,$$

quindi si ha

$$\mathrm{E}[g(t,T)]=\Pr\{T\le t+1/2\}-\Pr\{T\le t-1/2\}=$$
$$=F_T(t+1/2)-F_T(t-1/2)$$

Infine, la distribuzione di probabilità di T è data da

$$F_T(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha < 1/2 \\ \dfrac{\alpha - 1/2}{2} & \alpha \in [1/2, 5/2] \\ 1 & \alpha > 5/2 \end{cases}$$

E l'andamento temporale del valor medio del segnale risulta quello in figura (lo si confronti con una generica realizzazione, in violetto).