Fondamenti di comunicazioni elettriche (Ing. Elettronica - A.A.2011-2012)

Sviluppo in serie 1

$$g_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2|t-nT_0|}$$

Soluzione

Il segnale può essere scritto come prodotto di convoluzione:

$$g_1(t) = e^{-2|t|} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

Sicché la trasformata di Fourier risulta

$$G_1(f) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\pi^2 f^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0}\delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

Ed i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier si ottengono trovando le aree degli impulsi:

$$G_{1,n} = \frac{T_0 / 2}{T_0^2 + \pi^2 n^2}$$

Sviluppo in serie 2

$$g_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-nT_0)}\,\mathrm{u}(t - nT_0)$$

Soluzione

$$g_2(t) = e^{-t}\,\mathrm{u}(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

$$G_2(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0}\delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right)$$

$$G_{2,n} = \frac{1}{T_0 + j2\pi n}$$

Sviluppo in serie 3

$$g_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (t - nT_0)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_0}{T_0}\right)$$

Soluzione

$$g_3(t) = t\,\mathrm{rect}(t / T_0) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

$$G_3(f) = \mathfrak{F}[t\,\mathrm{rect}(t / T_0)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0}\delta(f - n / T_0)$$

$$\mathfrak{F}[t\,\mathrm{rect}(t / T_0)] = T_0 \frac{\mathrm{sinc}(fT_0) - \cos(\pi f T_0)}{j2\pi f}$$

$$G_{3,n} = T_0 \frac{\mathrm{sinc}(n) - \cos(\pi n)}{j2\pi n} = T_0 \frac{\delta_n - (-1)^n}{j2\pi n} \;\; (G_{3,0} = 0)$$

Sviluppo in serie 4

$$g_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| t - nT_0 \right| \mathrm{rect}\left(\frac{t - nT_0 - T_0 / 2}{T_0} \right)$$

Soluzione

$$g_4(t) = \left| t \right| \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_0 / 2}{T_0} \right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - nT_0 \right)$$

$$G_4(f) = \mathfrak{F}[\left| t \right| \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_0 / 2}{T_0} \right)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} \delta\left(f - \frac{n}{T_0} \right)$$

$$\mathfrak{F}[\left| t \right| \mathrm{rect}\left(\frac{t - T_0 / 2}{T_0} \right)] = T_0 \frac{\mathrm{sinc}(fT_0) e^{-j\pi f T_0} - e^{-j2\pi f T_0}}{j2\pi f}$$

$$G_{4,n} = T_0 \frac{\mathrm{sinc}(n) e^{-j\pi n} - e^{-j2\pi n}}{j2\pi n} = T_0 \frac{\delta_n - 1}{j2\pi n} \; (G_{4,0} = T_0 / 2)$$

Sviluppo in serie 5

$$g_5(t) = \left| \cos(t) \right|$$

Soluzione

Il segnale è periodico di periodo $T_0 = \pi$. I coefficienti dello sviluppo risultano

$$\begin{aligned} G_{5,n} &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g_5(t) e^{-j2\pi n \frac{t}{T_0}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t) e^{-j2nt} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{j(1-2n)t} + e^{-j(1+2n)t}}{2} dt = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n}{1 - 4n^2} \end{aligned}$$

Prodotto di convoluzione 1

$$g_6(t) = \left[\mathrm{rect}(t + 1/2) - \mathrm{rect}(t - 1/2) \right] * e^{-t}\, \mathrm{u}(t)$$

Soluzione

$$g_6(t) = \left[\mathrm{u}(t+1) - 2\,\mathrm{u}(t) + \mathrm{u}(t-1) \right] * e^{-t}\, \mathrm{u}(t)$$

$$\mathrm{u}(t) * e^{-t}\, \mathrm{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau} d\tau = (1 - e^{-t})\, \mathrm{u}(t)$$

$$g_6(t) = (1 - e^{-t-1})\, \mathrm{u}(t+1) - 2(1 - e^{-t})\, \mathrm{u}(t) + (1 - e^{-t+1})\, \mathrm{u}(t-1)$$

Prodotto di convoluzione 2

$$g_7(t) = \left[\mathrm{rect}(t + 1/2) - \mathrm{rect}(t - 1/2) \right] * \sin(2\pi f_0 t)$$

Soluzione

$$\begin{aligned} g_7(t) &= \mathfrak{F}^{-1}[\mathfrak{F}[\mathrm{rect}(t + 1/2) - \mathrm{rect}(t - 1/2)] \cdot \mathfrak{F}[\sin(2\pi f_0 t)]] = \\ &= \mathfrak{F}^{-1}[2j\, \mathrm{sinc}(f) \sin(\pi f) (\frac{1}{2j} \delta(f - f_0) - \frac{1}{2j} \delta(f + f_0))] = \\ &= \mathfrak{F}^{-1}[(\mathrm{sinc}(f_0) \sin(\pi f_0) \delta(f - f_0) + \mathrm{sinc}(f_0) \sin(\pi f_0) \delta(f + f_0))] = \\ &= 2\, \mathrm{sinc}(f_0) \sin(\pi f_0) \cos(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Prodotto di convoluzione 3

$$g_8(t) = \mathrm{rect}(t) * t\,\mathrm{u}(t)$$

Soluzione

$$g_8(t) = (\mathrm{u}(t+1/2) - \mathrm{u}(t-1/2)) * t\,\mathrm{u}(t)$$

$$\mathrm{u}(t) * t\,\mathrm{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} \tau\,\mathrm{u}(\tau)\,d\tau = \frac{t^2}{2}\mathrm{u}(t)$$

$$g_8(t) = \frac{1}{2}(t+1/2)^2\,\mathrm{u}(t+1/2) - \frac{1}{2}(t-1/2)^2\,\mathrm{u}(t-1/2)$$

Prodotto di convoluzione 4

$$g_9(t) = e^{-t}\,\mathrm{u}(t) * e^{t}\,\mathrm{u}(-t)$$

Soluzione

$$g_9(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}\,\mathrm{u}(\tau) e^{t-\tau}\,\mathrm{u}(-(t-\tau))d\tau = e^{t} \int_{\max(0,t)}^{\infty} e^{-2\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}e^{t-2\max(0,t)} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{t} & t < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-t} & t > 0 \end{cases} = \frac{1}{2}e^{-|t|}$$

Prodotto di convoluzione 5

$$g_{10}(t) = \mathrm{sinc}(t) * \sin(2\pi f_0 t)$$

Soluzione

$$g_{10}(t) = \mathfrak{F}^{-1}[\mathrm{rect}(f)(\frac{1}{2j}\delta(f-f_0) - \frac{1}{2j}\delta(f+f_0))] =$$

$$= \mathfrak{F}^{-1}[(\mathrm{rect}(f_0)\frac{1}{2j}\delta(f-f_0) - \mathrm{rect}(-f_0)\frac{1}{2j}\delta(f+f_0))] =$$

$$= \mathrm{rect}(f_0)\sin(2\pi f_0 t)$$

Frequenza minima di campionamento 1

$$g_{11}(t) = \mathrm{sinc}(4t) - \mathrm{sinc}(4(t-1))$$

Soluzione

$$G_{11}(f) = \frac{1}{4}\mathrm{rect}(\frac{f}{4}) - \frac{1}{4}\mathrm{rect}(\frac{f}{4})e^{-j2\pi f} = \frac{1}{4}\mathrm{rect}(\frac{f}{4})(1-e^{-j2\pi f})$$

$$f_{\max} = 2 \Rightarrow f_{s,\min} = 4$$

Frequenza minima di campionamento 2

$$g_{12}(t) = \mathrm{sinc}(2t)\cos(2\pi t)$$

Soluzione

$$G_{12}(f) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{f}{2}) * (\frac{1}{2}\delta(f-1) + \frac{1}{2}\delta(f+1)) =$$

$$= \frac{1}{4}\mathrm{rect}(\frac{f-1}{2}) + \frac{1}{4}\mathrm{rect}(\frac{f+1}{2}) = \frac{1}{4}\mathrm{rect}(\frac{f}{4})$$

$$f_{\max} = 2 \Rightarrow f_{s,\min} = 4$$

Si poteva anche osservare che

$$g_{12}(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{2\pi t}\cos(2\pi t) = \frac{2\sin(2\pi t)\cos(2\pi t)}{4\pi t} = \mathrm{sinc}(4t)$$

e concludere immediatamente

Frequenza minima di campionamento 3

$$g_{13}(t) = \mathrm{sinc}^2(t-1)$$

Soluzione

$$\begin{aligned} G_{13}(f) &= [\mathrm{rect}(f)e^{-j2\pi f}] * [\mathrm{rect}(f)e^{-j2\pi f}] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\varphi)e^{-j2\pi\varphi}\,\mathrm{rect}(f-\varphi)e^{-j2\pi(f-\varphi)}d\varphi = \\ &= e^{-j2\pi f}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\varphi)\,\mathrm{rect}(f-\varphi)d\varphi = e^{-j2\pi f}(1-|f|)\,\mathrm{rect}(\frac{f}{2}) \end{aligned}$$

$$f_{\max} = 1 \Rightarrow f_{s,\min} = 2$$

Frequenza minima di campionamento 4

$$g_{14}(t) = \mathrm{sinc}(2t) + \mathrm{sinc}(3t)$$

Soluzione

$$G_{14}(f) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{f}{2}) + \frac{1}{3}\mathrm{rect}(\frac{f}{3})$$

$$f_{\max} = \frac{3}{2} \Rightarrow f_{s,\min} = 3$$

Frequenza minima di campionamento 5

$$g_{15}(t) = \mathrm{sinc}(t) * \mathrm{sinc}(2t)$$

Soluzione

$$G_{15}(f) = \mathrm{rect}(f)\frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{f}{2}) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}(f)$$

$$f_{\max} = \frac{1}{2} \Rightarrow f_{s,\min} = 1$$

Frequenza minima di campionamento 6

$$g_{16}(t) = \mathrm{sinc}(t)\,\mathrm{sinc}(4t)$$

Soluzione

$$G_{16}(f) = \mathrm{rect}(f) * \frac{1}{4}\mathrm{rect}(\frac{f}{4}) = \frac{1}{4}\mathrm{rect}(f) * [\mathrm{u}(f+2) - \mathrm{u}(f-2)]$$

$$\mathrm{rect}(f) * \mathrm{u}(f) = \int_{-\infty}^{f} \mathrm{rect}(\varphi)d\varphi = \begin{cases} 0 & f < -1/2 \\ f + 1/2 & f \in (-1/2, 1/2) \\ 1 & f > 1/2 \end{cases}$$

$$G_{16}(f)=\begin{cases} 0 & f<-5/2 \\ (f+5/2)/4 & f\in(-5/2,-3/2) \\ 1/4 & f\in(-3/2,3/2) \\ (5/2-f)/4 & f\in(3/2,5/2) \\ 0 & f>5/2 \end{cases}$$

$$f_{\max}=\frac{5}{2}\Rightarrow f_{s,\min}=5$$

Si poteva anche osservare che il prodotto di convoluzione tra due rettangoli ha supporto di durata pari alla somma delle durate dei supporti (perché?) e concludere immediatamente