Fondamenti di comunicazioni elettriche (Ing. Elettronica - A.A.2011-2012)

Es. 1
La variabile aleatoria X ha densità di probabilità uniforme nell'intervallo [0,2]. Trovare valor medio e varianza di X^2.
Soluzione
La densità di probabilità di X è

$$f_X(\alpha) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{\alpha - 1}{2}\right)$$

Quindi il valor medio di X^2 è dato da

$$\mathrm{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 f_X(\alpha) d\alpha = \int_0^2 \alpha^2 \frac{1}{2} d\alpha = \frac{1}{2}\frac{\alpha^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{8}{6}$$

Per quanto riguarda la varianza, calcoliamo il valore quadratico medio di X^2

$$\mathrm{E}[(X^2)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^4 f_X(\alpha) d\alpha = \int_0^2 \alpha^4 \frac{1}{2} d\alpha = \frac{1}{2}\frac{\alpha^5}{5}\bigg|_0^2 = \frac{32}{10}$$

Ne segue che la varianza risulta

$$\sigma_{X^2}^2 = \mathrm{E}[(X^2)^2] - (\mathrm{E}[X^2])^2 = \frac{32}{10} - \frac{16}{9} = \frac{64}{45}$$

Es. 2
La variabile aleatoria X ha densità di probabilità uniforme nell'intervallo [0,4]. Trovare valor medio e varianza di $\sqrt{X}$.
Soluzione
La densità di probabilità di X è

$$f_X(\alpha) = \frac{1}{4}\mathrm{rect}\left(\frac{\alpha - 2}{4}\right)$$

Quindi il valor medio di $\sqrt{X}$ è dato da

$$\mathrm{E}[\sqrt{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\alpha} f_X(\alpha) d\alpha = \int_0^4 \sqrt{\alpha} \frac{1}{4} d\alpha = \frac{1}{4}\frac{2}{3}\alpha^{\frac{3}{2}}\bigg|_0^4 = \frac{4}{3}$$

Per quanto riguarda la varianza, calcoliamo il valore quadratico medio di $\sqrt{X}$

$$\mathrm{E}[(\sqrt{X})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\alpha}^2 f_X(\alpha) d\alpha = \int_0^4 \alpha \frac{1}{4} d\alpha = \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{2}\bigg|_0^4 = \frac{16}{8}$$

Ne segue che la varianza risulta

$$\sigma_{\sqrt{X}}^2 = \mathrm{E}[(\sqrt{X})^2] - (\mathrm{E}[\sqrt{X}])^2 = \frac{16}{8} - \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

Es. 3
La variabile aleatoria X ha densità di probabilità uniforme nell'intervallo [0,3]. Trovare la probabilità che $X > X^2$.
Soluzione
L'evento $X > X^2$ si verifica per $X \in [0,1]$, quindi occorre calcolare

$$\Pr\{X > X^2\} = \Pr\{X \in [0,1]\} = \int_0^1 f_X(\alpha)d\alpha$$

Questa, visto che $f_X(\alpha) = 1/3$ per $\alpha \in [0,3]$, risulta pari ad $1/3$.

Es. 4

La variabile aleatoria *X* ha densità di probabilità uniforme nell'intervallo [0,10]. Trovare la densità di probabilità di $Y = -1 + X/5$.

Soluzione

La densità di probabilità di *Y* è definita come

$$f_Y(\beta) = \frac{d}{d\beta}F_Y(\beta) = \frac{d}{d\beta}\Pr\{Y \le \beta\} = \frac{d}{d\beta}\Pr\{-1 + X/5 \le \beta\}$$

Quindi occorre determinare, al variare del parametro β, dove si verifica l'evento $-1 + X/5 \le \beta$:

$$\{X : -1 + X/5 \le \beta\} = (-\infty, 5\beta + 5]$$

Risulta quindi

$$f_Y(\beta) = \frac{d}{d\beta}\Pr\{X \in (-\infty, 5 + 5\beta]\} = \frac{d}{d\beta}\int_{-\infty}^{5+5\beta} f_X(\alpha)d\alpha =$$

$$= \frac{d}{d\beta}[F_X(5 + 5\beta) - F_X(-\infty)] = 5 f_X(5 + 5\beta)$$

Volendo trovare una espressione che non dipenda dalla $f_X(\alpha)$ basta sostituirne l'espressione

$$f_Y(\beta) = 5\frac{1}{10}\mathrm{rect}\left(\frac{(5 + 5\beta) - 5}{10}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}(\beta/2)$$

Es. 5

La variabile aleatoria X ha densità di probabilità uniforme nell'intervallo [0,10]. Trovare la densità di probabilità di $Y = (X - 3)^2$.

Soluzione

La densità di probabilità di *Y* è definita come

$$f_Y(\beta) = \frac{d}{d\beta}F_Y(\beta) = \frac{d}{d\beta}\Pr\{Y \le \beta\} = \frac{d}{d\beta}\Pr\{(X - 3)^2 \le \beta\}$$

Quindi occorre determinare, al variare del parametro β, dove si verifica l'evento $(X - 3)^2 \le \beta$:

$$\{X : (X - 3)^2 \le \beta\} = \begin{cases} \varnothing & \beta < 0 \\ [3 - \sqrt{\beta}, 3 + \sqrt{\beta}] & \beta \ge 0 \end{cases}$$

Risulta quindi $f_Y(\beta) = 0$ per $\beta < 0$, mentre per $\beta > 0$

$$f_Y(\beta) = \frac{d}{d\beta}\int_{3-\sqrt{\beta}}^{3+\sqrt{\beta}} f_X(\alpha)d\alpha = f_X(3 + \sqrt{\beta})\frac{1}{2\sqrt{\beta}} + f_X(3 - \sqrt{\beta})\frac{1}{2\sqrt{\beta}}.$$

Volendo trovare una espressione che non dipenda dalla $f_X(\alpha)$ occorre discutere i punti $3 \pm \sqrt{\beta}$ rispetto all'intervallo [0,10] (supporto della $f_X(\alpha)$):

$$3 + \sqrt{\beta} \in [0,10] \Leftrightarrow \beta \le 49$$

$$3 - \sqrt{\beta} \in [0,10] \Leftrightarrow \beta \le 9$$

Risulta infine

$$
f_Y(\beta) = \begin{cases} 0 & \beta < 0 \\ \dfrac{1}{10\sqrt{\beta}} & \beta \in (0,9) \\ \dfrac{1}{20\sqrt{\beta}} & \beta \in (9,49) \\ 0 & \beta > 49 \end{cases}
$$

Es. 6

La coppia di variabili aleatorie *X* ed *Y* è uniformemente distribuita in [0,2]×[0,2]. Determinare la probabilità dell'evento $\{X+Y>3\}$.

Soluzione

L'evento $\{X+Y>3\}$ si verifica, per ogni *X*, quando $Y>3-X$, quindi si può scrivere

$$
\Pr\{X+Y>3\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{3-\alpha}^{\infty} f_{XY}(\alpha,\beta)d\beta d\alpha
$$

La densità di probabilità congiunta delle due variabili in gioco è

$$
f_{XY}(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1/4 & \alpha\in[0,2]\wedge\beta\in[0,2] \\ 0 & \alpha\notin[0,2]\vee\beta\notin[0,2] \end{cases}
$$

quindi

$$
\Pr\{X+Y>3\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{3-\alpha}^{\infty} \frac{1}{4}\operatorname{rect}(\frac{\alpha-1}{2})\operatorname{rect}(\frac{\beta-1}{2})d\beta d\alpha =
$$

$$
= \frac{1}{4}\int_{0}^{2}\int_{[3-\alpha,\infty)\cap[0,2]} d\beta d\alpha = \frac{1}{4}\int_{1}^{2}\int_{3-\alpha}^{2} d\beta d\alpha = \frac{1}{4}\int_{1}^{2}\alpha-1 d\alpha = \frac{1}{8}
$$

Notare che si poteva giungere al medesimo risultato valutando il rapporto tra l'area della regione in cui le variabili sono distribuite <u>uniformemente</u> e l'area, interna a questa regione, in cui si verifica l'evento.

Es. 7

La coppia di variabili aleatorie *X* ed *Y* ha distribuzione data da

$$
f_{XY}(\alpha,\beta) = Ke^{-(\alpha+\beta)}\operatorname{rect}(\frac{\alpha-1}{2})\operatorname{rect}(\frac{\beta-1}{2})
$$

Determinare il valore della costante *K* e la probabilità dell'evento $\{X+Y>3\}$.

Soluzione

La costante *K* si determina imponendo la condizione di normalizzazione:

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(\alpha,\beta)d\beta d\alpha = 1
$$

Si ottiene

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(\alpha,\beta)d\beta d\alpha = \int_{0}^{2}\int_{0}^{2} Ke^{-\alpha}e^{-\beta}d\beta d\alpha = K(1-e^{-2})^2 = 1
$$

quindi $K=(1-e^{-2})^{-2}$.

La probabilità dell'evento $\{X+Y>3\}$, procedendo come nell'es.6, risulta

$$\Pr\{X+Y>3\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{3-\alpha}^{\infty} f_{XY}(\alpha,\beta)d\beta d\alpha =$$
$$= \int_{1}^{2}\int_{3-\alpha}^{2} \frac{1}{(1-e^{-2})^2} e^{-(\alpha+\beta)} d\beta d\alpha = \frac{1}{(1-e^{-2})^2}\int_{1}^{2} e^{-\alpha}\int_{3-\alpha}^{2} e^{-\beta} d\beta d\alpha =$$
$$= \frac{1}{(1-e^{-2})^2}\int_{1}^{2} e^{-3} - e^{-2-\alpha} d\alpha = \frac{e^{-4}}{(1-e^{-2})^2}$$
Notare che, a differenza dell'es.6, non si poteva giungere a questo risultato con considerazioni geometriche (in quanto la distribuzione delle variabili non è uniforme).

Es. 8
Determinare la densità di probabilità del rapporto tra due variabili aleatorie indipendenti *X* ed *Y* gaussiane con media nulla e varianza unitaria
Soluzione
Posto $Z = Y / X$, la densità di probabilità di *Z* è data da
$$f_Z(\gamma) = \frac{d}{d\gamma}F_Z(\gamma) = \frac{d}{d\gamma}\Pr\{Z \le \gamma\} = \frac{d}{d\gamma}\Pr\{Y / X \le \gamma\}$$
La regione di piano in cui si verifica l'evento $\{Y / X \le \gamma\}$ può essere descritta come $\{Y \ge \gamma X, X < 0\} \cup \{Y \le \gamma X, X > 0\}$, o come $\theta \in [-\pi / 2, \arctan\gamma] \cup [\pi / 2, \pi + \arctan\gamma]$ in coordinate polari.

Osservando che $f_{XY}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \frac{1}{2\pi}\exp(-\frac{1}{2}\rho^2)$ non dipende da θ, si deduce che θ è distribuita uniformemente in un intervallo di ampiezza 2π e la densità di probabilità richiesta risulta
$$f_Z(\gamma) = \frac{d}{d\gamma}\left(\int_{-\pi/2}^{\arctan\gamma}\frac{1}{2\pi}d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi+\arctan\gamma}\frac{1}{2\pi}d\theta\right) = \frac{1}{\pi(1+\gamma^2)}$$
Si noti che questa densità di probabilità tende a zero per $\gamma \to \infty$ come $1 / \gamma^2$ ed il valore quadratico medio risulta infinito (ed il valore medio è indeterminato, perché?).

Es. 9
Le variabili aleatorie *X* ed *Y* hanno densità di probabilità uniforme all'interno di un cerchio di raggio 2. Trovare la densità di probabilità delle variabili aleatorie M e θ definite da
$$X + jY = M\exp(j\theta)$$
Soluzione
La densità di probabilità di *M* è definita da
$$f_M(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}F_M(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\Pr\{M \le \alpha\} = \frac{d}{d\alpha}\Pr\{\sqrt{X^2+Y^2} \le \alpha\}$$
Per valutare quest'ultima nel caso $\alpha \in [0,2]$ conviene operare in coordinate polari:
$$\Pr\{\sqrt{X^2+Y^2} \le \alpha\} = \int_{0}^{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} f_{XY}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\theta d\rho = \int_{0}^{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4\pi}\rho\, d\theta d\rho = \frac{\alpha^2}{4}$$
e risulta
$$f_M(\alpha) = \begin{cases} 0 & \alpha < 0 \\ \alpha / 2 & \alpha \in [0,2] \\ 0 & \alpha > 2 \end{cases}$$

Per quanto riguarda la densità di probabilità dell'angolo θ, procedendo nello stesso modo, risulta uniforme in qualsiasi intervallo di ampiezza 2π

Es. 10

La coppia di variabili aleatorie gaussiane a media nulla X_1 e X_2 è caratterizzata dalla matrice di covarianza

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Ammesso di avere effettuato un esperimento ed avere potuto osservare il solo valore di $X_1 = 1$, trovare la densità di probabilità (condizionata) ed il corrispondente valore più probabile della variabile X_2

Soluzione

La densità di probabilità congiunta di due variabili gaussiane è data da

$$f_{X_1X_2}(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1}{(2\pi)^{2/2}\,|\,\Sigma\,|^{1/2}}\exp(-\frac{1}{2}[\alpha_1 \quad \alpha_2]\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{bmatrix})$$

che in questo caso risulta, essendo $|\,\Sigma\,| = 1/2$ e $\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$,

$$f_{X_1X_2}(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\exp(-(\alpha_1^2 - \sqrt{2}\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2))$$

La densità di probabilità di X_2, condizionata ad un valore di $X_1 = 1$, è data da

$$f_{X_2|X_1}(\alpha_2,\alpha_1) = \frac{f_{X_1X_2}(\alpha_1,\alpha_2)}{f_{X_1}(\alpha_1)}$$

in cui appare, oltre alla densità congiunta, quella del primo ordine della variabile X_1

$$f_{X_1}(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}\alpha_1^2)$$

E si ottiene

$$f_{X_2|X_1}(\alpha_2,\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{1}{2}\alpha_1^2 - \sqrt{2}\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2))$$

Per trovare il valore più probabile di X_2 condizionato ad un valore osservato X_1 basta cercare il massimo

$$\arg\max_{\alpha_2} f_{X_2|X_1}(\alpha_2,\alpha_1) = \arg\max_{\alpha_2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-(\frac{1}{2}\alpha_1^2 - \sqrt{2}\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2))$$

$$\frac{d}{d\alpha_2}(\frac{1}{2}\alpha_1^2 - \sqrt{2}\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) = -\sqrt{2}\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_1/\sqrt{2}$$

che per $X_1 = 1$ produce $1/\sqrt{2}$. Notare che avremmo ottenuto il medesimo risultato massimizzando direttamente la $f_{X_1X_2}(1,\alpha_2)$.