Fondamenti di comunicazioni elettriche (Ing. Elettronica - A.A.2011-2012)

Es. 1
Il segnale

$$g(t,T) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

dipende dalla variabile aleatoria T avente densità di probabilità uniforme nell'intervallo [0,2]. Trovare valor medio ed autocorrelazione del segnale.
Soluzione
Il segnale può essere scritto come

$$g(t,T) = \mathrm{u}(t) - \mathrm{u}(t-T)$$

La media può quindi essere valutata come

$$\mathrm{E}\left[g(t,T)\right] = \mathrm{u}(t) - \mathrm{E}\left[\mathrm{u}(t-T)\right] = \mathrm{u}(t) - \Pr\{T < t\}$$

Dove si è usato il fatto che

$$\mathrm{u}(t-T) = \begin{cases} 1 & t > T \\ 0 & t < T \end{cases}$$

Da cui segue $\mathrm{E}\left[\mathrm{u}(t-T)\right] = 1 \cdot \Pr\{t > T\} + 0 \cdot \Pr\{t < T\} = \Pr\{t > T\}$.
La probabilità che appare nel valor medio può essere valutata come

$$\Pr\{T < t\} = \int_{-\infty}^{t} f_T(\alpha) d\alpha = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/2 & t \in (0,2) \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$

Per quanto riguarda l'autocorrelazione, risulta

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[g(t_1,T) g^*(t_2,T)\right] &= \mathrm{E}\left[\left(\mathrm{u}(t_1) - \mathrm{u}(t_1 - T)\right)\left(\mathrm{u}(t_2) - \mathrm{u}(t_2 - T)\right)\right] = \\ &= \mathrm{u}(t_1)\mathrm{u}(t_2) - \mathrm{u}(t_1)\mathrm{E}\left[\mathrm{u}(t_2 - T)\right] - \mathrm{u}(t_2)\mathrm{E}\left[\mathrm{u}(t_1 - T)\right] + \mathrm{E}\left[\mathrm{u}(t_1 - T)\mathrm{u}(t_2 - T)\right] = \\ &= \mathrm{u}(t_1)\mathrm{u}(t_2) - \mathrm{u}(t_1)\Pr\{T < t_2\} - \mathrm{u}(t_2)\Pr\{T < t_1\} + \Pr\{T < \min(t_1,t_2)\} \end{aligned}$$

Dove si è usato in particolare $T < t_1 \wedge T < t_2 \Rightarrow T < \min(t_1,t_2)$.

Es. 2
Il segnale

$$s(t) = \mathrm{u}(t-T)$$

dipende dalla variabile aleatoria T avente densità di probabilità esponenziale

$$f_T(\alpha) = 2e^{-2\alpha}\,\mathrm{u}(\alpha)$$

Trovare valor medio ed autocorrelazione del segnale.
Soluzione
Il valor medio risulta

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[s(t)\right] &= \mathrm{E}\left[\mathrm{u}(t-T)\right] = 1 \cdot \Pr\{T < t\} + 0 \cdot \Pr\{T > t\} = \\ &= \int_{-\infty}^{t} f_T(\alpha) d\alpha = (1 - e^{-2t})\,\mathrm{u}(t) \end{aligned}$$

L'autocorrelazione risulta

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[s(t_1)s^*(t_2)\right] &= \mathrm{E}\left[\mathrm{u}(t_1 - T)\,\mathrm{u}(t_2 - T)\right] = \Pr\{T < t_1 \wedge T < t_2\} = \\ &= \Pr\{T < \min(t_1,t_2)\} = \int_{-\infty}^{\min(t_1,t_2)} f_T(\alpha) d\alpha = (1 - e^{-2\min(t_1,t_2)})\,\mathrm{u}(\min(t_1,t_2)) \end{aligned}$$

Es. 3
Il segnale

$$s(t)=\mathrm{u}(t-T_1)-\mathrm{u}(t-T_2)$$

dipende dalla coppia di variabili aleatorie T_1, T_2. La densità di probabilità della T_1 è uniforme in $[0,1]$, mentre la densità di probabilità di T_2 condizionata dal valore assunto da T_1 è uniforme in $[T_1,T_1+2]$. Trovare il valor medio del segnale.

Soluzione
Il valor medio

$$\mathrm{E}\left[s(t)\right]=\mathrm{E}\left[\mathrm{u}(t-T_1)\right]-\mathrm{E}\left[\mathrm{u}(t-T_2)\right]=\Pr\{T_1<t\}+\Pr\{T_2<t\}$$

Queste probabilità risultano

$$\Pr\{T_1<t\}=\int_{-\infty}^{t}f_{T_1}(\alpha)d\alpha=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\in(0,1)\\ 1 & t>1\end{cases}$$

$$\Pr\{T_2<t\}=\int_{-\infty}^{t}f_{T_2}(\alpha)d\alpha$$

La densità di probabilità di T_2 si ottiene per marginalizzazione della densità di probabilità congiunta

$$f_{T_1T_2}(\alpha,\beta)=f_{T_1}(\alpha)f_{T_2|T_1}(\beta,\alpha)=\mathrm{rect}(\alpha-\frac{1}{2})\frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{\beta-\alpha-1}{2})$$

ovvero

$$\begin{aligned}f_{T_2}(\beta)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{T_1T_2}(\alpha,\beta)d\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{rect}(\alpha-\frac{1}{2})\frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{\beta-\alpha-1}{2})d\alpha=\\&=\mathrm{rect}(\beta-\frac{1}{2})*\frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{\beta-1}{2})=(\mathrm{u}(\beta)-\mathrm{u}(\beta-1))*\frac{1}{2}\mathrm{rect}(\frac{\beta-1}{2})=\\&=\begin{cases}0 & \beta<0\vee\beta>3\\ t/2 & \beta\in(0,1)\\ 1/2 & \beta\in(1,2)\\ (3-t)/2 & \beta\in(2,3)\end{cases}\end{aligned}$$

Da cui si ottiene infine

$$\Pr\{T_2<t\}=\begin{cases}0 & \beta<0\\ t^2/4 & \beta\in(0,1)\\ t/2-1/4 & \beta\in(1,2)\\ (-5+6t-t^2)/4 & \beta\in(2,3)\\ 1 & \beta>3\end{cases}$$

Es. 4
Il segnale

$$g(t)=A\cos(2\pi f_c t+\theta)$$

dipende dalla variabile aleatoria θ, distribuita uniformemente in $[-\pi/2,\pi/2]$. Trovare valor medio e funzione di autocorrelazione del segnale.

Soluzione

Il valore medio risulta

$$\mathrm{E}\left[g(t)\right] = \mathrm{E}\left[A\cos(2\pi f_c t+\theta)\right] = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} A\cos(2\pi f_c t+\theta)d\theta =$$
$$= \frac{A}{\pi}\sin(2\pi f_c t+\theta)\,\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2A}{\pi}\cos(2\pi f_c t)$$

La funzione di autocorrelazione

$$\mathrm{E}\left[g(t_1)g^*(t_2)\right] = A^2\,\mathrm{E}\left[\cos(2\pi f_c t_1+\theta)\cos(2\pi f_c t_2+\theta)\right] =$$
$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c(t_1-t_2)) + \frac{A^2}{2}\mathrm{E}\left[\cos(2\pi f_c(t_1+t_2)+2\theta)\right] =$$
$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c(t_1-t_2))$$

Dove si è usato $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(2x)dx = 0$

Es. 5

Il segnale

$$s(t) = \sum_k a_k p(t-kT)$$

dipende dalla sequenza di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite (iid) $a_k \in \{0,1\}$, con $\Pr(a_k = 0) = \Pr(a_k = 1) = 1/2$. Determinare il valore medio e l'autocorrelazione del segnale $s(t)$ e dire se si tratta di un segnale stazionario in senso lato.

Soluzione

Sfruttando la linearità dell'operatore media statistica si ottiene subito

$$\mathrm{E}\left[s(t)\right] = \mathrm{E}\left[\sum_k a_k p(t-kT)\right] = \sum_k \mathrm{E}\left[a_k\right]p(t-kT) = \frac{1}{2}\sum_k p(t-kT)$$

Dove si è usato $\overline{a_k} = 0\cdot\Pr\{a_k = 0\} + 1\cdot\Pr\{a_k = 1\} = 1/2$

Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione

$$\mathrm{E}\left[s(t_1)s^*(t_2)\right] = \mathrm{E}\left[\sum_k a_k p(t_1-kT)\sum_m a_m p^*(t_2-mT)\right] = \sum_k\sum_m \mathrm{E}\left[a_k a_m^*\right]p(t_1-kT)p^*(t_2-mT)$$

appare il valor medio $\mathrm{E}\left[a_k a_m^*\right]$

$$\mathrm{E}\left[a_k a_m^*\right] = \begin{cases} \mathrm{E}\left[a_k\right]\mathrm{E}\left[a_m^*\right] = \dfrac{1}{4} & k\neq m \\ \mathrm{E}\left[\left|a_k\right|^2\right] = \dfrac{1}{2} & k = m \end{cases}$$

che si può scrivere

$$\mathrm{E}\left[a_k a_m^*\right] = \frac{1}{4}(1+\delta_{k-m}).$$

Risulta quindi

$$R_s(t_1,t_2) = \mathrm{E}\left[s(t_1)s^*(t_2)\right] = \sum_k\sum_m \frac{1}{4}(1+\delta_{k-m})p(t_1-kT)p^*(t_2-mT) =$$
$$= \sum_k \frac{1}{4}p(t_1-kT)p^*(t_2-kT) + \sum_k\sum_m \frac{1}{4}p(t_1-kT)p^*(t_2-mT)$$

Scrivendo la funzione di autocorrelazione in tempo e ritardo si ottiene

$$R_s(t,t-\tau) = \frac{1}{4}\sum_k p(t-kT)p^*(t-\tau-kT)$$
$$+\frac{1}{4}\sum_k\sum_l p(t-kT)p^*(t-kT-\tau-lT)$$

che è periodica di periodo *T* rispetto a *t*, e quindi in generale il segnale non è stazionario in senso lato ma bensì ciclo stazionario

Es. 6

Si vuole impiegare il segnale

$$g(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-1/4}{1/2}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t-3/4}{1/2}\right)$$

come impulso di segnalazione di un sistema di trasmissione numerica in banda base. Ammesso di operare su un canale AWGN con ricevitore a filtro adattato, qual è la massima frequenza di segnalazione utilizzabile per potere operare in assenza di interferenza intersimbolica?

Soluzione

Si deve osservare la funzione di autocorrelazione del segnale $g(t)$:

$$\gamma_g(\tau) = \langle g(t), g(t-\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t-\tau)dt$$

Per trovare il minimo T_b per il quale vale la condizione

$$\gamma_g(kT_b) = \begin{cases} \mathcal{E}_g & k=0 \\ 0 & k\neq 0 \end{cases}$$

Poiché si può scrivere $g(t) = \mathrm{u}(t) - 2\,\mathrm{u}(t-1/2) + \mathrm{u}(t-1)$, risulta

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t-\tau)dt = \begin{cases} 0 & t<-1 \\ t+1 & t\in(-1,-1/2) \\ -1-3t & t\in(-1/2,0) \\ -1+3t & t\in(0,1/2) \\ -t+1 & t\in(1/2,1) \\ 0 & t>1 \end{cases}$$

Che si annulla per $|t|>1$ e per $t=\pm 1/3$. Se ne deduce che il minimo periodo di segnalazione per il quale è soddisfatta la condizione è $T_b = 1$

Es. 7

Un processo di rumore bianco Gaussiano con densità spettrale di potenza $N_0/2$ viene sottoposto a filtraggio con la funzione di trasferimento $|Q(f)|^2 = (1-|f|)\mathrm{rect}(f/2)$. Trovare la frequenza di campionamento alla quale i campioni del processo filtrato risultano indipendenti. Determinare infine media e varianza dei campioni del processo di rumore filtrato.

Soluzione

La condizione per l'indipendenza dei campioni di un processo di rumore filtrato è identica alla condizione per l'annullamento dell'interferenza intersimbolica:

$$\left\langle q(t), q(t-kT_s)\right\rangle = \mathcal{E}_q \delta_k$$

Per rispondere al quesito, consideriamo la funzione di autocorrelazione

$$\gamma_q(\tau) = \left\langle q(t), q(t-\tau)\right\rangle = q(t) * q^*(-t)$$

avente spettro pari a $|Q(f)|^2$.

In questo caso risulta (anti trasformando)

$$\gamma_q(\tau) = \mathrm{sinc}^2(\tau)$$

E la condizione di indipendenza diventa

$$\mathrm{sinc}^2(kT_s) = \delta_k$$

che è soddisfatta per qualsiasi T_s intero.

Es. 8

Un sistema di trasmissione numerica in banda base impiega come alfabeto l'insieme di valori $\{-i, -1, i, 1\}$. Determinare la strategia di decisione a massima verosimiglianza sul canale AWGN.

Soluzione

La strategia di decisione a massima verosimiglianza è data da

$$\hat{a}_k = \arg\max_a f_{y_k|a_k}(y_k, a)$$

Nel caso del canale AWGN, risulta

$$\hat{a}_k = \arg\min_a \left\|y_k - a\right\|^2$$

Per determinare le regioni di decisione (ovvero l'insieme dei valori y che producono una determinata decisione) si deve imporre che la distanza corrispondente al punto prescelto sia la minima. Il generico problema da risolvere è del tipo

$$\left\|y_k - C_i\right\|^2 < \left\|y_k - C_j\right\|^2$$

che ha soluzione

$$\mathrm{Re}\{y_k(C_j - C_i)^*\} < \frac{|C_j|^2 - |C_i|^2}{2}$$

In questo caso, ad esempio per il punto $-i$, si ha

$$\hat{a}_k = -i \Leftrightarrow \left\{\left\|y_k + i\right\|^2 < \left\|y_k - 1\right\|^2\right\} \wedge \left\{\left\|y_k + i\right\|^2 < \left\|y_k + 1\right\|^2\right\} \wedge \left\{\left\|y_k + i\right\|^2 < \left\|y_k - i\right\|^2\right\}$$

e si ottiene

$$\hat{a}_k = -i \Leftrightarrow \left\{\mathrm{Im}\, y_k < -\mathrm{Re}\, y_k\right\} \wedge \left\{\mathrm{Im}\, y_k < \mathrm{Re}\, y_k\right\} \wedge \left\{\mathrm{Im}\, y_k < 0\right\}$$

C'è però un modo molto più semplice di procedere, ovvero per via grafica. Infatti la regione di decisione di un punto è l'intersezione di tutti i semipiani individuati dagli assi dei segmenti aventi un estremo nel punto prescelto.

In questo caso risulta

$$\begin{aligned}
\hat{a}_k &= -i \Leftrightarrow \mathrm{Im}(y_k) < -|\mathrm{Re}(y_k)| \\
\hat{a}_k &= +i \Leftrightarrow \mathrm{Im}(y_k) > |\mathrm{Re}(y_k)| \\
\hat{a}_k &= +1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(y_k) > |\mathrm{Im}(y_k)| \\
\hat{a}_k &= -1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(y_k) < -|\mathrm{Im}(y_k)|
\end{aligned}$$

Es. 9

Un segnale $g(t)$ avente energia $\mathrm{E}_g = 1$ può venire trasmesso su un canale AWGN in banda base. Al ricevitore è presente un filtro adattato seguito da un decisore a soglia pari a λ.

Trovare le seguenti probabilità, in funzione di λ ed N_0:

- ammesso che il segnale non sia stato trasmesso, che il rivelatore decida erroneamente per la presenza del segnale
- ammesso che il segnale sia stato trasmesso, il rivelatore decida erroneamente che il segnale non è presente

Soluzione

Nel caso il segnale non sia stato trasmesso, l'uscita del filtro adattato risulta

$$y_k = n_k$$

ed il ricevitore decide per la presenza del segnale con probabilità data da

$$\Pr\{y_k > \lambda\} = \Pr\{n_k > \lambda\} = Q\left(\lambda / \sigma\right)$$

Dove appaiono $Q(x) \triangleq \Pr\{N(0,1) > x\}$ e $\sigma = \sqrt{N_0 / 2}$.

Nel secondo caso, in cui il segnale viene trasmesso, l'uscita del filtro adattato risulta

$$y_k = 1 + n_k$$

ed il ricevitore decide per l'assenza del segnale con probabilità data da

$$\Pr\{y_k < \lambda\} = \Pr\{1 + n_k < \lambda\} = Q((1 - \lambda) / \sigma)$$

Es. 10

Si consideri il modello equivalente si un sistema di trasmissione numerica in banda base con canale AWGN e filtro adattato (per semplicità si assuma $\mathrm{E}_g = 1$):

$$y_l = a_l + n_l$$

Le variabili aleatorie $a_k \in \{0,1\}$ costituiscono una sequenza di variabili iid equiprobabili. Il ricevitore opera secondo la regola (notare la presenza del quadrato!)

$$\hat{a}_k = \begin{cases} 1 & y_l^2 > 1/2 \\ 0 & y_l^2 < 1/2 \end{cases}$$

Trovare la probabilità di errore di questo ricevitore

Soluzione

Il ricevitore compie un errore quando il simbolo deciso differisce dal simbolo trasmesso:

$$\Pr(\text{errore}) = \Pr\{\hat{a}_k \neq a_k\} = \sum_a \Pr\{\hat{a}_k \neq a \mid a_k = a\} \Pr\{a_k = a\}$$

Con due simboli equiprobabili risulta

$$\Pr(\text{errore}) = \Pr\{\hat{a}_k = 1 \mid a_k = 0\} \frac{1}{2} + \Pr\{\hat{a}_k = 0 \mid a_k = 1\} \frac{1}{2}$$

Dove appaiono

$$\Pr\{\hat{a}_k = 1 \mid a_k = 0\} = \Pr\{y_k^2 > 1/2 \mid a_k = 0\} =$$
$$= \Pr\{n_k > 1/\sqrt{2} \vee n_k < -1/\sqrt{2}\} = 2Q\left(\frac{1/\sqrt{2}}{\sigma}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\Pr\{\hat{a}_k = 0 \mid a_k = 1\} &= \Pr\{y_k^2 < 1/2 \mid a_k = 1\} = \\
&= \Pr\{-1/\sqrt{2} - 1 < n_k < 1/\sqrt{2} - 1\} = \\
&= \Pr\{n_k > -1/\sqrt{2} - 1\} - \Pr\{n_k > 1/\sqrt{2} - 1\} = \\
&= Q\left(\frac{1 - 1/\sqrt{2}}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{1/\sqrt{2} + 1}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

E si è usata l'identità $Q(-x) = 1 - Q(x)$.