Laurea in Ingegneria Elettronica

Fondamenti di comunicazioni elettriche

Laurea in Ingegneria Informatica e delle telecomunicazioni

Comunicazioni elettriche

Prova in itinere - 24 aprile 2013

1) Determinare e disegnare le funzioni di distribuzione cumulativa e di densità di probabilità della funzione di variabile aleatoria

$$Y = g(X) = \begin{cases} 1 & X < 1 \\ (3 - X)/2 & X \in [1,3] \\ 0 & X > 3 \end{cases}$$

dove X è una variabile aleatoria esponenziale con $\mathrm{E}[X] = 1$.

2) E' dato un processo aleatorio $s(t)$ Gaussiano, stazionario in senso lato con valore medio μ ed autocorrelazione $R(t_1 - t_2)$.

Considerato un sistema con ingresso $s(t)$ ed uscita a tempo discreto data da

$$w_k = As((k-1)T) + B - s(kT),$$

determinare i coefficienti A e B in corrispondenza ai quali si ha $\mathrm{E}[w_k] = 0$ e $\mathrm{E}[w_k^2]$ risulta minimo. Trovare infine il coefficiente di correlazione tra w_k e $w_{k\pm1}$.

3) Un sistema di trasmissione numerica in banda base utilizza una modulazione lineare 2-PAM con periodo di segnalazione T ed impulsi

$$p(t) = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{T}}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Si ammetta che il canale trasmissivo sia affetto dal solo rumore additivo Gaussiano con densità spettrale di potenza pari ad η.

Al ricevitore, avente la struttura: filtro passa bassa seguito da campionatore e decisore, invece del filtro adattato è presente un filtro passa basso avente risposta all'impulso

$$h(t) = e^{-t}\,\mathrm{u}(t).$$

Si determinino:

- l'espressione della variabile di decisione relativa ad un simbolo, evidenziando il termine di interferenza intersimbolica
- trascurando il termine di interferenza intersimbolica, il rapporto segnale-rumore tra la varianza della parte utile e la varianza del rumore nella variabile di decisione
- confrontare il rapporto segnale-rumore trovato con quello che si ottiene impiegando un filtro adattato.

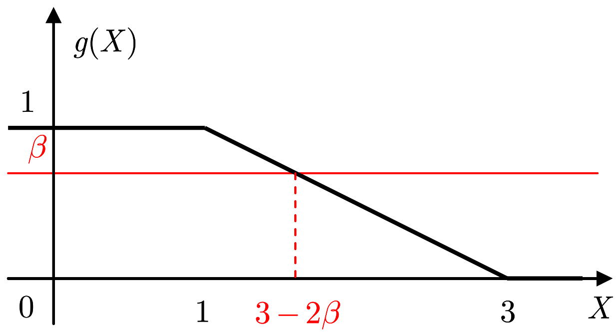
Svolgimento

1) Procedendo con la definizione

$$F_Y(\beta) = \Pr\{Y \le \beta\} = \Pr\{g(X) \le \beta\}$$

Dall'andamento della $g(X)$ troviamo che la probabilità richiesta può essere valutata come

$$\Pr\{g(X) \le \beta\} = \begin{cases} 0 & \beta < 0 \\ \Pr\{X \ge 3 - 2\beta\} & 0 \le \beta < 1 \\ 1 & \beta \ge 1 \end{cases}$$



Tenendo conto che la densità di probabilità di X è

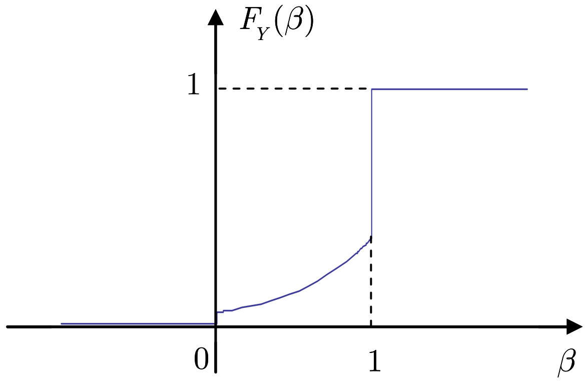
$$f_X(\alpha) = e^{-\alpha}\,\mathrm{u}(\alpha)$$

e che per $0 < \beta < 1$

$$\Pr\{X \ge 3 - 2\beta\} = \int_{3-2\beta}^{\infty} f_X(\alpha)d\alpha = \int_{3-2\beta}^{\infty} e^{-\alpha}d\alpha = e^{2\beta-3}$$

si ottiene

$$F_Y(\beta) = e^{2\beta-3}\,\mathrm{rect}(\beta - \frac{1}{2}) + \mathrm{u}(\beta - 1)$$



Infine la densità di probabilità si ottiene derivando (in senso generalizzato) ed ottenendo

$$f_Y(\beta) = e^{-3}\delta(\beta) + 2e^{2\beta-3}\,\mathrm{rect}(\beta - \frac{1}{2}) + (1 - \frac{1}{e})\delta(\beta - 1)\,.$$

2) Dalla condizione sul valore medio si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[w_k] &= \mathrm{E}[A s((k-1)T) + B - s(kT)] = \\ &= A\,\mathrm{E}[s((k-1)T)] + B - \mathrm{E}[s(kT)] = \\ &= A\mu + B - \mu = 0 \end{aligned}$$

Questa condizione può essere risolta come

$$B = \mu(1 - A)$$

da cui risulta

$$w_k = As((k-1)T) - A\mu - s(kT) + \mu\,.$$

Ponendo $\tilde{s}(t) = s(t) - \mu$ si può scrivere

$$w_k = A\tilde{s}((k-1)T) - \tilde{s}(kT)\,.$$

Si noti che il processo $\tilde{s}(t)$ è stazionario con valor medio nullo ed autocorrelazione data da

$$\tilde{R}(t_1, t_2) = \mathrm{E}[\tilde{s}(t_1)\tilde{s}(t_2)] = \mathrm{E}[(s(t_1) - \mu)(s(t_2) - \mu)] = R(t_1 - t_2) - \mu^2\,.$$

Il valore quadratico medio di w_k risulta a questo punto

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[w_k^2] &= \mathrm{E}[(A\tilde{s}((k-1)T) - \tilde{s}(kT))^2] = \\ &= A^2\tilde{R}(0) - 2A\tilde{R}(T) + \tilde{R}(0)\end{aligned}$$

La derivata rispetto ad A di questo valore quadratico medio risulta

$$\frac{\partial}{\partial A}\mathrm{E}[w_k^2] = 2A\tilde{R}(0) - 2\tilde{R}(T)$$

e per trovare il minimo occorre eguagliarla a zero.
Risulta quindi

$$A = \frac{\tilde{R}(T)}{\tilde{R}(0)}$$

che produce la relazione ingresso-uscita

$$w_k = \frac{\tilde{R}(T)}{\tilde{R}(0)}\tilde{s}((k-1)T) - \tilde{s}(kT)\,.$$

Per quanto riguarda il coefficiente di correlazione tra w_k e w_{k+1}, occorre l'autocorrelazione

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[w_k w_{k+l}] = \mathrm{E}[&(A\tilde{s}((k-1)T) - \tilde{s}(kT)) \\ &(A\tilde{s}((k+l-1)T) - \tilde{s}((k+l)T))] = \\ = (A^2+1)&\tilde{R}(lT) - A\tilde{R}((l-1)T) - A\tilde{R}((l+1)T)\end{aligned}$$

e il coefficiente richiesto risulta

$$\begin{aligned}\rho_k &= \frac{\mathrm{E}[w_k w_{k+1}] - \mathrm{E}[w_k]\mathrm{E}[w_{k+1}]}{\sqrt{\mathrm{E}[w_k^2] - \mathrm{E}^2[w_k]}\sqrt{\mathrm{E}[w_{k+1}^2] - \mathrm{E}^2[w_{k+1}]}} = \\ &= \frac{\mathrm{E}[w_k w_{k+1}]}{\mathrm{E}[w_k^2]} = \frac{\tilde{R}^3(T) - \tilde{R}(2T)\tilde{R}(T)\tilde{R}(0)}{\tilde{R}^3(0) - \tilde{R}(0)\tilde{R}^2(T)}.\end{aligned}$$

3) Per la segnalazione 2-PAM con canale AWGN, il segnale ricevuto risulta

$$r(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i p(t - iT) + w(t)$$

$$p(t) = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{T}}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

$$h(t) = e^{-t}\,\mathrm{u}(t)$$

$$S_w(f) = \eta$$

All'uscita del filtro passa basso si avrà

$$z(t) = r(t) * h(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i q(t - iT) + n(t)$$

dove $q(t)=\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau)h(t-\tau)d\tau$ ed $n(t)$ è un processo Gaussiano stazionario a media nulla e densità spettrale di potenza $S_n(f)=\eta\left|H(f)\right|^2$.

Il generico istante di campionamento per la decisione sul *k*-esimo simbolo è $t_k = kT + t_0$.

L'espressione della variabile di decisione relativa al generico simbolo risulta quindi

$$\begin{aligned} z(t_k) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i q(t_0+(k-i)T)+n(t_k) = \\ &= a_k q(t_0) + \underbrace{\sum_{i\neq k} a_i q(t_0+(k-i)T)}_{\text{intereferenza intersimbolica}} + n(t_k) \end{aligned}$$

Ammesso a questo punto di trascurare l'ISI, il termine utile ai fini della decisione è $a_k q(t_0)$, ed il termine di rumore è $n(t_k)$; il rapporto segnale-rumore risulta quindi

$$\mathrm{SNR}=\frac{\mathrm{E}[a_k^2 q^2(t_0)]}{\mathrm{E}[n^2(t_k)]}=\frac{q^2(t_0)}{\eta\mathcal{E}_h}$$

In questo caso si ha

$$\begin{aligned} q(t_0) &= \int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{T}}\operatorname{rect}\left(\frac{\tau-T/2}{T}\right)e^{-(t_0-\tau)}\,\mathrm{u}(t_0-\tau)d\tau = \\ &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{T}}e^{-t_0}\int_0^T e^{\tau}\,\mathrm{u}(t_0-\tau)d\tau \underset{t_0>0}{=} \begin{cases} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{T}}(1-e^{-t_0}) & t_0<T \\ \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{T}}e^{-t_0}(e^T-1) & t_0>T \end{cases} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_h=\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)dt=\int_0^{\infty}e^{-2t}dt=\frac{1}{2}$$

Il massimo di $q(t_0)$ si ottiene quindi, come nel caso del filtro adattato, per $t_0=T$, ed il rapporto segnale-rumore risulta

$$\mathrm{SNR}=\frac{\mathrm{E}[a_k^2 q^2(t_0)]}{\mathrm{E}[n^2(t_k)]}=\frac{\mathcal{E}}{\eta}\frac{(1-e^{-T})^2}{T/2}$$

Questo va confrontato col rapporto segnale-rumore che si ottiene nel caso di filtro adattato, che risulta

$$\mathrm{SNR}=\frac{\mathrm{E}[a_k^2 q^2(t_0)]}{\mathrm{E}[n^2(t_k)]}=\frac{\mathcal{E}}{\eta}$$