Laurea in Ingegneria Elettronica

Fondamenti di comunicazioni elettriche

Laurea in Ingegneria Informatica e delle telecomunicazioni

Comunicazioni elettriche

Appello - 19 giugno 2013

1) Determinare la probabilità di errore di un sistema di trasmissione numerica binario con simboli

$$a_k = \begin{cases} e^{j\theta} & d_k = 0 \\ -e^{j\theta} & d_k = 1 \end{cases}$$

Si assuma che il modulo dell'angolo θ sia inferiore a $\pi / 2$, il canale sia modellabile come AWGN, e che la regola di decisione adottata sia

$$\hat{d}_k = \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}\, r_k > 0 \\ 1 & \mathrm{Re}\, r_k < 0 \end{cases}$$

2) Determinare funzione di autocorrelazione e potenza media dell'uscita di un sistema lineare e stazionario avente risposta all'impulso data da

$$h(t) = (e^{-t} - e^{-2t})\,\mathrm{u}(t),$$

quando all'ingresso del sistema è presente un processo di rumore bianco Gaussiano con densità spettrale di potenza pari ad η.

3) Determinare valore medio, matrice di covarianza e coefficiente di correlazione di due variabili aleatorie Gaussiane aventi densità di probabilità congiunta data da

$$f_{XY}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{2\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta - 6\alpha + 4\beta + 5}{2} \right)$$

Svolgimento

1) Con le solite ipotesi di modello di canale AWGN (ovvero simboli equiprobabili, ricevitore a filtro adattato, sincronizzazione ideale di tempo e frequenza), i campioni complessi all'uscita del filtro adattato possono essere scritti come

$$r_k = a_k \mathcal{E} + n_k$$

dove $n_k = n_k^I + j n_k^Q$ racchiude una coppia di variabili aleatorie Gaussiane incorrelate a media nulla e varianza $2\eta\mathcal{E}$.

La probabilità d'errore del ricevitore può essere scritta come

$$\begin{aligned} P(e) &= \Pr\{\hat{d}_k \neq d_k\} = \\ &= \frac{1}{2}\Pr\{\hat{d}_k = 1 \mid d_k = 0\} + \frac{1}{2}\Pr\{\hat{d}_k = 0 \mid d_k = 1\} \end{aligned}$$

La prima delle probabilità condizionate risulta

$$\begin{aligned} \Pr\{\hat{d}_k = 1 \mid d_k = 0\} &= \Pr\{\mathrm{Re}\, r_k < 0 \mid d_k = 0\} = \\ &= \Pr\{\mathrm{Re}(e^{j\theta}\mathcal{E} + n_k) < 0\} = \\ &= \Pr\{-n_k^I > \cos(\theta)\mathcal{E}\} = Q(\cos(\theta)\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2\eta}}) \end{aligned}$$

Ed è facile verificare che, per simmetria, l'altra risulta identica, sicché la probabilità d'errore richiesta è

$$P(e) = Q(\cos(\theta)\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2\eta}}).$$

2) La funzione di autocorrelazione dell'uscita di un sistema lineare e tempo invariante è data da

$$R_y(t_1,t_2) = \mathrm{E}[\int x(\tau_1)h(t_1-\tau_1)d\tau_1 \int x(\tau_2)h(t_2-\tau_2)d\tau_2] =$$
$$= \int\int R_x(\tau_1,\tau_2)h(t_1-\tau_1)h(t_2-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$$

In questo esercizio si ha

$$R_x(t_1,t_2) = \eta\delta(t_2-t_1)$$

e quindi

$$R_y(t_1,t_2) = \eta\int h(t)h(t+t_2-t_1)dt.$$

Il processo di uscita risulta stazionario in senso lato, e la funzione di autocorrelazione è data

$$R_y(\tau) = \eta\int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t+\tau)dt$$

Vista l'espressione della $h(t)$, per effettuare questo calcolo conviene definire una funzione ausiliaria

$$\varphi_{ab}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\,\mathrm{u}(t)e^{-b(t+\tau)}\,\mathrm{u}(t+\tau)dt =$$
$$= \int_{\max(0,-\tau)}^{\infty} e^{-b\tau}e^{-(a+b)t}dt = \frac{e^{-b\tau-(a+b)\max(0,-\tau)}}{a+b} = \begin{cases} \dfrac{e^{-b\tau}}{a+b} & \tau>0 \\ \dfrac{e^{a\tau}}{a+b} & \tau<0 \end{cases}$$

ed in questo modo l'autocorrelazione richiesta risulta

$$R_y(\tau) = \eta\varphi_{11}(\tau) - \eta\varphi_{12}(\tau) - \eta\varphi_{21}(\tau) + \eta\varphi_{22}(\tau) = \eta\frac{2e^{-|\tau|}-e^{-2|\tau|}}{12}.$$

La potenza media dell'uscita si ottiene infine valutando l'autocorrelazione per $\tau = 0$, e risulta $\mathrm{E}[y^2(t)] = \eta/12$.

3) Ricordando che la densità di probabilità congiunta di due variabili aleatorie Gaussiane è data da

$$f_{X_1X_2}(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\,|\,\Sigma\,|}}\exp(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\alpha_1-\mu_1\\ \alpha_2-\mu_2\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2\\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\alpha_1-\mu_1\\ \alpha_2-\mu_2\end{bmatrix})$$

Si trova per ispezione diretta che i coefficienti di $-\alpha_1^2/2$, $-\alpha_2^2/2$ e $-\alpha_1\alpha_2$ sono gli elementi $S_{11}=2$, $S_{22}=1$ ed $S_{12}=S_{21}=-1$ dell'inversa della matrice di covarianza Σ. Si ottiene quindi

$$\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2\\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

Ovvero $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 2$ e $\rho_{12} = 1/\sigma_1\sigma_2 = 1/\sqrt{2}$.

Per determinare i valori medi osserviamo che i coefficienti di α_1 ed α_2 nella forma quadratica sono dati da

$$\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = -\frac{-6\alpha_1 + 4\alpha_2}{2} = 3\alpha_1 - 2\alpha_2$$

Ed è quindi possibile scrivere il sistema lineare nelle incognite μ_1 e μ_2

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ -2\end{bmatrix}$$

Da cui risulta $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$.